УДК 639.1.053:502.744

МОНИТОРИНГ КОПЫТНЫХ ЖИВОТНЫХ, ОБИТАЮЩИХ В ОХОТНИЧЬИХ ХОЗЯЙСТВАХ УКРАИНЫ

И.А. Пилькевич
Доктор технических наук, доцент, заведующий кафедрой
Кафедра мониторинга окружающей природной среды*
Контактный тел. (0412)415-686, 067-39-787-39

А.В. Маевский*
Контактный тел. 097-403-14-96
*Житомирский национальный агроэкологический университет
бульвар Старый, 7, г. Житомир, Украина, 10008

Розроблено метод підвищення точності оцінювання основних ресурсів мисливських господарств, що заснований на використанні додаткової апріорної інформації про зв'язок між параметрами, які оцінюються, у вигляді кінцевого рівняння

Ключові слова: мисливські господарства України, кількість особин копитних, умовна сумісна оцінка параметрів

Разработан метод повышения точности оценивания основных ресурсов охотничьих хозяйств, основанный на использовании дополнительной априорной информации о связи оцениваемых параметров в виде конечных уравнений

Ключевые слова: охотничьи хозяйства Украины, количество особей копытных, условная совместная оценка параметров

A method for increasing the accuracy of estimating core hunting, based on the use of additional a priori information on the relationship of estimated parameters in the form of finite equations

Key words: hunting economy of Ukraine, the number of species of ungulates, the conditional joint evaluation parameters

1. Введение

Для изучения экологических условий охотничьих хозяйств необходимо предварительно проанализировать данные проектов охот- и лесоустройства. Без объективной информации по состоянию ресурсов и уровню численности животных невозможно их использование. Поэтому для определения кормности лесных угодий хозяйства и степени влияния на них имеющихся копытных животных проводятся полевые исследования, результаты которых позволяют рассчитать запасы древесно-веточных и травяно-кустарных кормов.

Учет основных ресурсов охотничьих хозяйств Украины проводится государственным управлением лесного и охотничьего хозяйства два раза в год с использованием специалистов государственного управления охраны окружающей природной среды по каждой области отдельно. Однако должного внимания учету ресурсов диких животных не уделяется, так как методики учета не совершенны, а у специалистов, работающих в охотничьих хозяйствах, низкая квалификация. Например, используемый для учета копытных животных метод зимнего маршрутного учета не совершенен и в результате дает большие ошибки. Кроме того, отдельными сотрудниками охотничьих хозяйств и научными работниками допускаются искажения сведений о состоянии ресурсов того или иного вида дикой фауны, на основании которых и строится неверная политика в отношении оптимального использования ресурсов охотничьих хозяйств Украины. Поэтому в статистических ежегодниках Украины, издаваемых государственным комитетом статистики Украины, встречаются ошибки и неточности [1].

В статье решается задача получения совместных точных статистических оценок нескольких числовых параметров (данных регистрации) по экспериментальным данным при условии, что данные регистрации связаны априорно известными конечными уравнениями [2]. Получаемые при этом условные оценки обладают более высокой точностью по сравнению с безусловными, получаемыми методами классического параметрического оценивания исключительно по данным регистрации.

2. Оценка векторного процесса с использованием уравнения связи его компонент

Задача оценки векторного процесса с использованием уравнения связи оцениваемых компонент является обобщением задачи условной оценки некоторых параметров физического состояния объекта с использованием связывающих эти параметры законов, известных априорно [2]. Если оцениваемые величины (параметры) являются функциями времени и изменяются с его течением, то есть представляют собой процессы каждый в отдельности и векторный процесс в совокупности, то при совместном оценивании появляется возможность использовать помимо известной априорно статистической взаимосвязи между различными параметрами в виде их ковариации еще и статистическую связь измерений по времени в виде корреляционной функции. Это должно привести к повышению качества оценивания. Однако переход от оценивания вектора величин к оцениванию вектора процессов с учетом их предистории означает усложнение процедуры оценивания, что является платой за повышение точности оценок.

Область практического использования алгоритма оценки векторного процесса с использованием уравнения связи не ограничивается случаем одного уравнения связи, а возникает всегда, когда производятся одновременные измерения серии физических величин, связанных известными физическими законами в виде уравнений (в общем случае) или специально установленными закономерностями. Поэтому рассматриваемая задача требует самостоятельного математического исследования.

Задачами, требующими исследования, являются:

выбор способа метризации пространства векторного процесса и его обоснование;

разработка алгоритма совместного оценивания компонентов векторного процесса;

оценка эффективности алгоритма совместного оценивания.

Как и в задаче совместного оценивания величин [2] (в отличие от рассматриваемой задачи совместного оценивания процессов) алгоритм совместной оценки должен строиться по принципу минимизации расстояния, что предполагает наличие метрики в пространстве параметров регистрации. Если в конечном пространстве параметров регистрации (например – величин α и β) метрика задавалась обратной корреляционной матрицей измерений, то в бесконечном пространстве процессов ввиду их непрерывности такой способ метризации невозможен, чем продиктована первая задача. Ее решение открывает возможности для непосредственного построения алгоритма совместного оценивания, то есть для решения второй задачи. Новый полученный алгоритм требует оценки его эффективности и рекомендаций по его практическому применению (третья задача).

2.1. Метризация пространства векторного процесса

В случае конечномерного пространства эвклидова метрика задается метрической квадратичной формой. В [2] была показана целесообразность использования в качестве ее обратной корреляционной матрицы измерений. Если непрерывные процессы, являющиеся компонентами векторного процесса, заменить их отсчетами в дискретные моменты времени, то в принципе можно использовать для метризации пространства измерений ту же обратную корреляционную матрицу, так как дискретизация означает переход к конечномерному пространству измерений. Обратный переход от дискретной реализации к непрерывной означает уменьшение интервала дискретизации до нуля. Последнее означает возрастание корреляционных связей между соседними отсчетами до максимума, корреляционная матрица при неограниченном „учащении" отсчетов становится плохообусловленной, а в пределе – вырожденной, что делает невозможным ее обращение. Тем не менее, способ метризации с помощью корреляционных связей, благодаря его положительным свойствам (см. [2]), желательно сохранить. Решение задачи можно получить путем отказа от использования собственно корреляционной матрицы и определением скалярного произведения с помощью вспомогательного весового вектора, определяемого корреляционной матрицей φ скалярное произведение векторов $\vec{\xi}_1$ и $\vec{\xi}_2$ определяется формой

$$\left(\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2\right)=\vec{\xi}_1^{\mathrm{T}}\varphi^{-1}\vec{\xi}_2\,, \tag{1}$$

то, введя весовой вектор

$$\vec{\eta}_1=\vec{\xi}_1^{\mathrm{T}}\varphi^{-1}=\varphi^{-1}\vec{\xi}_1\,, \tag{2}$$

скалярное произведение (1) запишется как произведение векторов

$$\left(\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2\right)=\vec{\eta}_1^{\mathrm{T}}\vec{\xi}_2\,. \tag{3}$$

Весовой вектор $\vec{\eta}$ определяется формулой (2) для случая, когда обращение матрицы φ возможно и корректно. В более общем случае вектор $\vec{\eta}$ определяется (в частности, на основании (2)), как решение матричного уравнения весового вектора:

$$\varphi\vec{\eta}=\vec{\xi}\,. \tag{4}$$

Уравнение (4) в отличие от (2) имеет смысл при произвольной матрице φ. Это дает возможность перейти к непрерывному аналогу (4). Предельный переход к непрерывной реализации векторного процесса $\vec{\xi}(t)$ приводит к интегрально-матричному уравнению весового вектора [3]:

$$\int\varphi(t,\tau)\vec{\eta}(\tau)d\tau=\vec{\xi}(t). \tag{5}$$

Здесь и далее пределы интегрирования понимаются бесконечными и не проставляются.

Непрерывный аналог (5) выражается весовым интегралом:

$$\vec{\eta}^{\mathrm{T}}\vec{\xi}\xrightarrow{\Delta t\to 0}\int\vec{\eta}^{\mathrm{T}}(t)\vec{\xi}(t)dt\,, \tag{6}$$

где Δt – интервал дискретизации измерений.

Выражения (5) и (6) дают возможность сформулировать понятие расстояния в пространстве векторного процесса $\vec{\xi}(t)$. Квадрат расстояния между двумя процессами $\vec{\xi}_1(t)$ и $\vec{\xi}_2(t)$ равен значению интеграла:

$$\rho^2(\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2)=\int\left[\vec{\eta}_1(t)-\vec{\eta}_2(t)\right]^{\mathrm{T}}\cdot\left[\vec{\xi}_1(t)-\vec{\xi}_2(t)\right]dt\,, \tag{7}$$

весовые вектор-функции $\vec{\eta}_1$ и $\vec{\eta}_2$ в котором являются решением интегральных уравнений:

$$\int\varphi(t,\tau)\vec{\eta}_1(\tau)d\tau=\vec{\xi}_1(t); \tag{8,а}$$

$$\int\varphi(t,\tau)\vec{\eta}_2(\tau)d\tau=\vec{\xi}_2(t), \tag{8,б}$$

где

$$\varphi(t_1,t_2)=<(\vec{\xi}(t_1)-<\vec{\xi}(t_1)>)(\vec{\xi}(t_2)-<\vec{\xi}(t_2)>)^{\mathrm{T}}> \tag{9}$$

корреляционная матрица ошибок измерений.

Для того, чтобы величину ρ, введенную с помощью (7) и (8), можно было обосновано использовать в качестве метрического расстояния необходимо, чтобы, во-первых, функционал (7), заданный в пространстве интегрируемых вектор-функций, был неотрицателен, и, во-вторых, чтобы он подчинялся трем метрическим аксиомам [4]:

1. *Аксиома невырожденности* $\rho(\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2)=0$ тогда и только тогда, когда $\vec{\xi}_1 \equiv \vec{\xi}_2$;

2. *Аксиома симметрии* $\rho(\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2)=\rho(\vec{\xi}_2,\vec{\xi}_1)$;

3. *Аксиома треугольника* $\rho(\vec{X},\vec{Z}) \le \rho(\vec{X},\vec{Y})+\rho(\vec{Y},\vec{Z})$.

Неотрицательность функционала

Обозначим в (7) $\vec{\eta}_1-\vec{\eta}_2=\vec{\eta}$, $\vec{\xi}_1-\vec{\xi}_2=\vec{\xi}$. Тогда функционал (7) принимает вид весового интеграла (6):

$$\rho=\int \vec{\eta}^T\vec{\xi}dt. \tag{10}$$

Транспонируем в (8) правую и левую части и домножим справа на $\vec{\xi}(t)$. Проинтегрировав по t, получаем:

$$\iint \vec{\eta}^T(\tau)\varphi(t,\tau)\vec{\xi}(t)dtd\tau=\int \vec{\xi}^T(t)\vec{\xi}(t)dt. \tag{11}$$

Правая часть неотрицательна как интеграл от суммы квадратов компонентов вектора $\vec{\xi}$. Это значит, что для любой корреляционной матрицы

$$\iint \vec{\eta}^T(\tau)\varphi(t,\tau)\vec{\xi}(t)dtd\tau \ge 0. \tag{12}$$

Положим

$$\varphi(t,\tau)=I\cdot\delta(t-\tau), \tag{13}$$

где I – единичная матрица;

$\delta(t)$ – дельта-функция Дирака.

С такой матрицей φ (12) преобразуется в интеграл (10), что и доказывает неотрицательность ρ на всем пространстве вектор-функций $\vec{\xi}(t)$.

Аксиома невырожденности

Из (7) очевидно, что при $\vec{\xi}_1 \equiv \vec{\xi}_2$ $\rho=0$. С другой стороны, если $\vec{\xi}_1 \ne \vec{\xi}_2$, а $\rho=0$, то должно быть $\vec{\eta}_1 \equiv \vec{\eta}_2$, а это возможно лишь при равенстве векторов $\vec{\xi}_1$ и $\vec{\xi}_2$ на основании (8). Поэтому их неравенство влечет за собой отличие от нуля функционала расстояния ρ.

Аксиома симметрии

$$\begin{aligned}\rho(\vec{\xi}_2,\vec{\xi}_1)&=\int(\vec{\eta}_2-\vec{\eta}_1)^T(\vec{\xi}_2-\vec{\xi}_1)dt=\\&=\int(\vec{\eta}_1-\vec{\eta}_2)^T(\vec{\xi}_1-\vec{\xi}_2)dt=\rho(\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2).\end{aligned}$$

Аксиома треугольника

Она состоит в требовании выполнения неравенства

$$\begin{aligned}&\sqrt{\int(\vec{\eta}_x-\vec{\eta}_z)^T(\vec{x}-\vec{z})dt} \le\\ &\le \sqrt{\int(\vec{\eta}_x-\vec{\eta}_y)^T(\vec{x}-\vec{y})dt}+\sqrt{\int(\vec{\eta}_y-\vec{\eta}_z)^T(\vec{y}-\vec{z})dt}\end{aligned} \tag{14}$$

для $\forall \vec{x},\vec{y},\vec{z}$ из пространства интегрируемых вектор-функций.

Обозначим:

$$\begin{aligned}&\vec{\eta}_x-\vec{\eta}_y=\vec{\eta}_1;\\&\vec{\eta}_y-\vec{\eta}_z=\vec{\eta}_2;\\&\vec{\eta}_x-\vec{\eta}_z=\vec{\eta}_1+\vec{\eta}_2;\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}&\vec{x}-\vec{y}=\vec{\xi}_1;\\&\vec{y}-\vec{z}=\vec{\xi}_2;\\&\vec{x}-\vec{z}=\vec{\xi}_1+\vec{\xi}_2.\end{aligned} \tag{16}$$

Возведем (14) в квадрат. С учетом (15) и (16), получим:

$$\begin{aligned}&\int(\vec{\eta}_1+\vec{\eta}_2)^T(\vec{\xi}_1+\vec{\xi}_2)dt \le \int \vec{\eta}_1^T\vec{\xi}_1 dt+\\&+\int \vec{\eta}_2^T\vec{\xi}_2 dt+2\sqrt{\int \vec{\eta}_1^T\vec{\xi}_1 dt}\cdot\sqrt{\int \vec{\eta}_2^T\vec{\xi}_2 dt}.\end{aligned} \tag{17}$$

Интеграл в левой части (17) разбивается на сумму

$$\int \vec{\eta}_1^T\vec{\xi}_1 dt+\int \vec{\eta}_2^T\vec{\xi}_2 dt+\int\left(\vec{\eta}_1^T\vec{\xi}_2+\vec{\eta}_2^T\vec{\xi}_1\right)dt. \tag{18}$$

Первые два слагаемых в (18) и в правой части (17) сокращаются, а третье слагаемое в (18) преобразуется

$$\int\left(\vec{\eta}_1^T\vec{\xi}_2+\vec{\eta}_2^T\vec{\xi}_1\right)dt=2\int \vec{\eta}_1^T\vec{\xi}_2 dt=2\int \vec{\eta}_2^T\vec{\xi}_1 dt. \tag{19}$$

Для получения (19) достаточно уравнения (8) транспонировать, (8,а) домножить справа на $\vec{\xi}_2$, (8,б) на $\vec{\xi}_1$, проинтегрировать по t. Правые части с очевидностью равны:

$$\int \vec{\xi}_1^T\vec{\xi}_2 dt=\int \vec{\xi}_2^T\vec{\xi}_1 dt. \tag{20}$$

Уравниваем левые части:

$$\iint \vec{\eta}_1^T\varphi\vec{\xi}_2 dtd\tau=\iint \vec{\eta}_2^T\varphi\vec{\xi}_1 dtd\tau, \tag{21}$$

что имеет место для $\forall\varphi(t,\tau)$. Полагаем в (21) φ, определенной в соответствии с (13). Получим:

$$\int \vec{\eta}_1^T\vec{\xi}_2 dt=\int \vec{\eta}_2^T\vec{\xi}_1 dt,$$

откуда и следует (19).

С учетом (18) и (19) (17) преобразуется к виду:

$$\int \vec{\eta}_1^T\vec{\xi}_2 dt \le \sqrt{\int \vec{\eta}_1^T\vec{\xi}_1 dt}\cdot\sqrt{\int \vec{\eta}_2^T\vec{\xi}_2 dt}. \tag{22}$$

Возводим (22) в квадрат и получаем неравенство

$$\left(\int \vec{\eta}_1^T\vec{\xi}_2 dt\right)^2 \le \int \vec{\eta}_1^T\vec{\xi}_1 dt\cdot\int \vec{\eta}_2^T\vec{\xi}_2 dt, \tag{23}$$

которое представляет собой векторное обобщение интегральной формы неравенства Коши-Буняковского [4], что и доказывает справедливость исходного неравенства (14).

Таким образом, введенный с помощью (7), (8) функционал расстояния ρ удовлетворяет необходимым требованиям и может быть использован для метризации пространства процессов, описываемых вектор-функциями времени.

2.2. Алгоритм условного оценивания компонентов векторного процесса

Пусть имеется безусловная оценка значений векторного процесса $\hat{\vec{\xi}}(t)$ за время наблюдения (регистрации). Предположим, что известна корреляционная матрица ошибок измерений $\varphi(t_1,t_2)$. Известно также конечное уравнение, которому в любой момент времени должны удовлетворять компоненты процесса $\vec{\xi}(t)$:

$$\Phi[\xi_1(t),\xi_2(t),...,\xi_m(t)]=0. \tag{24}$$

Задача состоит в получении условной совместной оценки процесса $\vec{\xi}(t)$, удовлетворяющей уравнению связи (24) и обладающей наименьшим среднеквадратическим отклонением от истинного процесса среди всех оценок, удовлетворяющих (24).

Введем квадрат отклонения с помощью метрического функционала (7).

Если первичная оценка $\hat{\vec{\xi}}(t)$ оптимальна в смысле минимума среднего квадрата отклонения от истинного значения, а истинное значение $\vec{\xi}(t)$ принадлежит гиперповерхности (24), то в качестве окончательной следует искать точку на поверхности (24), ближайшую в смысле принятой метрики к первичной оптимальной оценке $\hat{\vec{\xi}}(t)$. Таким образом, окончательная оценка $\vec{\xi}(t)$ должна минимизировать функционал $\rho^2[\vec{\xi}(t),\hat{\vec{\xi}}(t)]$ при условии ее принадлежности гиперповерхности (24). Поиск такой оценки представляет собой вариационную задачу об исследовании функционала ρ^2 на условный экстремум при наличии голономных связей. Методика ее решения методом неопределенных множителей Лагранжа общеизвестна [5]. Она состоит в формировании вспомогательного функционала

$$\rho^{*2}(\vec{\xi},\hat{\vec{\xi}}) = \int [(\vec{\eta}-\hat{\vec{\eta}})^T(\vec{\xi}-\hat{\vec{\xi}}) - \lambda\Phi(\vec{\xi})]dt \qquad (25)$$

и исследовании его на безусловный экстремум (λ – неопределенный множитель).

Вектор-функция $\vec{\xi}(t)$, на которой функционал (25) достигает безусловный экстремум, обязана удовлетворять системе уравнений Эйлера [5]

$$\frac{\partial F}{\partial\vec{\xi}} - \frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial F}{\partial\left(d\vec{\xi}/dt\right)} = 0\,, \qquad (26)$$

где F – подинтегральная функция в (25).

Ввиду независимости F от производной $d\vec{\xi}/dt$ дифференциальные уравнения (26) вырождаются в конечные

$$\frac{\partial F}{\partial\vec{\xi}} = \vec{\eta} - \hat{\vec{\eta}} - \lambda\frac{d\Phi(\vec{\xi})}{\partial\vec{\xi}} = 0 \qquad (27)$$

или

$$\lambda\frac{\partial\Phi(\vec{\xi})}{\partial\vec{\xi}} = \vec{\eta} - \hat{\vec{\eta}}. \qquad (28)$$

Чтобы исключить весовые вектор-функции $\vec{\eta}(t)$ и $\hat{\vec{\eta}}(t)$ домножим (28) слева на корреляционную матрицу φ и проинтегрируем. Получим:

$$\lambda\int\varphi(t,\tau)\cdot\frac{\partial\Phi[\vec{\xi}(t)]}{\partial\vec{\xi}}d\tau = \int\varphi(t\tau)\left(\vec{\eta}-\hat{\vec{\eta}}\right)d\tau. \qquad (29)$$

На основании (8) меняем правую часть (29) на разность $\vec{\xi}-\hat{\vec{\xi}}$, после чего приходим к системе интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода относительно искомой оценки процесса $\vec{\xi}(t)$:

$$\vec{\xi}(t) = \hat{\vec{\xi}}(t) + \lambda\int\phi(t,\tau)\cdot\frac{\partial\Phi(\vec{\xi})}{\partial\vec{\xi}}d\tau. \qquad (30)$$

Дополняя систему (30) уравнением связи (24), получаем полную систему уравнений, однозначно определяющую вектор-функцию $\vec{\xi}(t)$.

Система (30) совместно с (24) представляет собой общий алгоритм оценивания векторного процесса с учетом априорно известной связи его компонентов.

Для практики особый интерес представляет частный случай, когда уравнение связи (24) описывает гиперплоскость. В этом случае функция $\Phi(\vec{\xi})$ представляет собой линейную форму от $\vec{\xi}$ со смещением на некоторое слагаемое C:

$$\Phi(\vec{\xi}) = \vec{\alpha}^T\vec{\xi} - C = \sum_i \alpha_i\xi_i - C\,. \qquad (31)$$

Так связаны между собой, например, давление и абсолютная температура в уравнении состояния идеального газа. Так связаны между собой напряжение на концах участка цепи и сила тока в нем, сила, приложенная к телу, с сообщаемым ему ускорением и его массой. В экологии линейно связаны между собой на некотором промежутке времени вес некоторых рыб и их возраст на ранней стадии своего развития и т.д. Более того, в случае нелинейной связи компонентов вектора $\vec{\xi}$ (24) при ограниченном средним квадратом ошибки оценивания $\hat{\vec{\xi}}$ множество возможных точек $\vec{\xi}$, изображающих окончательные оценки по алгоритму (30), (24), будет занимать на гиперповерхности (24) ограниченную область, которую можно в первом приближении заменить касательной гиперплоскостью. В этом случае уравнение (24) линеаризуется и приводится к виду:

$$\left[\frac{\partial\Phi(\vec{\xi})}{\partial\vec{\xi}}\Big|_{\vec{\xi}=\hat{\vec{\xi}}}\right]^T\cdot(\vec{\xi}-\hat{\vec{\xi}}) = 0\,. \qquad (32)$$

Сравнивая (31) и (32), находим:

$$\vec{\alpha} = \frac{\partial\Phi(\vec{\xi})}{\partial\vec{\xi}}\Big|_{\vec{\xi}=\hat{\vec{\xi}}},\quad C = \vec{\alpha}^T\hat{\vec{\xi}}\,. \qquad (33)$$

Конкретизация уравнения связи (24) до уравнения гиперплоскости с помощью (31), (32) позволяет получить явное решение системы (30) в простом виде. Подстановка (31) в (30) дает совместно с (24) систему:

$$\vec{\xi}(t) = \hat{\vec{\xi}}(t) + \lambda\cdot F(t)\cdot\vec{\alpha}\,; \qquad (34)$$

$$\vec{\alpha}^T\vec{\xi}(t) = C(t)\,, \qquad (35)$$

где

$$F(t) = \int\varphi(t,\tau)d\tau\,. \qquad (36)$$

Исключаем из системы (34), (35) неопределенный множитель λ и получаем окончательно:

$$\vec{\xi}(t) = \hat{\vec{\xi}}(t) + \frac{F(t)\vec{\alpha}}{\vec{\alpha}^T F(t)\vec{\alpha}}\left[c(t) - \vec{\alpha}^T\hat{\vec{\xi}}(t)\right]. \qquad (37)$$

Алгоритм (37) состоит в „уточнении" первичной оценки $\hat{\vec{\xi}}$ на взвешенную невязку $C-\vec{\alpha}^T\hat{\vec{\xi}}$, которая характеризует удаление оценки $\hat{\vec{\xi}}$ от гиперплоскости (35), заведомо содержащей истинное значение $\vec{\xi}$.

Алгоритм оценки векторного случайного процесса (37) с учетом связи его компонентов (24) является наиболее общим и универсальным. Алгоритм совместной оценки параметров [2] включается в алгоритм (37) как частный случай.

2.3. Оценка эффективности алгоритма условного оценивания

Показателем эффективности алгоритма оценивания является точность получаемых оценок. Для несмещенных оценок (полагаем, что с такими только имеем дело) точность характеризуется дисперсией. Для вектора оценок рассматривают определитель ковариационной матрицы, представляющей собой обобщенную дисперсию [6].

Анализ эффективности алгоритма оценивания (30) в самом общем случае аналитически сложен и возможен по-видимому только численными методами путем статистического моделирования на ЭВМ. Процедура оценивания среднего квадрата ошибки состоит в генерировании по заданной корреляционной матрице φ вектора первичных оценок $\hat{\vec{\xi}}$, расчете путем решения системы (30) окончательной оценки $\vec{\xi}$, вычислении квадрата невязки оценки $\vec{\xi}$ с истинным значением, повторении этой процедуры множество раз и расчете среднего значения квадрата невязки.

Для аналитического исследования эффективности алгоритма ограничимся частным случаем линейной связи (24) в виде уравнения (35) с независимыми и равноточными измерениями по координатам векторного процесса $\vec{\xi}(t)$.

По определению, ковариационная матрица оценок равна:

$$R(t_1,t_2)=<\left(\vec{\xi}(t_1)-<\vec{\xi}(t_1)>\right)\left(\vec{\xi}(t_2)-<\vec{\xi}(t_2)>\right)^T>, \quad (38)$$

где “< >” – знак усреднения.

Путем подстановки (37) в (38), получаем:

$$R(t_1,t_2)=\left(I-\frac{F(t_1)\vec{\alpha}\vec{\alpha}^T}{\vec{\alpha}^TF(t_1)\vec{\alpha}}\right)\cdot\kappa(t_1,t_2)\cdot\left(I-\frac{F(t_2)\vec{\alpha}\vec{\alpha}^T}{\vec{\alpha}^TF(t_2)\vec{\alpha}}\right)^T. \quad (39)$$

Корреляционная функция (39) является обобщенной характеристикой точности окончательной оценки вектора $\vec{\xi}$. Характеризовать точность вектора $\vec{\xi}$ по обобщенной дисперсии, вычисляемой как определитель матрицы (39) при $t_1=t_2$ при линейной связи компонентов $\vec{\xi}(t)$ (см. (35)), бессмысленно, поскольку определитель $|R|$ всегда будет равен нулю. Это означает, что при заведомо линейной связи компонентов $\vec{\xi}(t)$ (35) матрица R (39) всегда вырождена. Действительно запишем матрицу (39) так:

$$R=<\begin{pmatrix}\xi_1^2 & \xi_1\xi_2 & \xi_1\xi_3 & \dots & \xi_1\xi_m\\ \xi_2\xi_1 & \xi_2^2 & \xi_2\xi_3 & \dots & \xi_2\xi_m\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \xi_m\xi_1 & \xi_m\xi_2 & \xi_m\xi_3 & \dots & \xi_m^2\end{pmatrix}> \quad (40)$$

и выразим, например, ξ_1 в первом столбце с помощью (35) через остальные компоненты:

$$\xi_1=\sum_{j=2}^{m}\beta_j\xi_j, \quad (41)$$

где константа «C» отсутствует, так как в (40) подразумевается центрирование по среднему $\beta_j=\alpha_j/\alpha_1$. Получим

$$R=<\begin{pmatrix}\sum_{j=2}^{m}\beta_j\xi_1\xi_j & \xi_1\xi_2 & \dots & \xi_1\xi_m\\ \sum_{j=2}^{m}\beta_j\xi_2\xi_j & \xi_2^2 & \dots & \xi_2\xi_m\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \sum_{j=2}^{m}\beta_j\xi_m\xi_j & \xi_m\xi_2 & \dots & \xi_m^2\end{pmatrix}>. \quad (42)$$

Видим, что в (42) первый столбец представляет собой линейную комбинацию остальных столбцов, откуда и следует вырожденность матрицы R [7].

Для такого случайного вектора $\vec{\xi}$ корреляционный эллипсоид вырождается в гиперповерхность (теряя одно измерение) и его объем, естественно, равен нулю. В таком случае точность оценок следует характеризовать диагональными элементами корреляционной матрицы R, представляющими собой дисперсию каждой из компонент окончательной оценки $\vec{\xi}$ в отдельности. Ввиду сложности выражения (39) для его расчета рекомендуется использовать численные методы. Однако для простейшего случая некоррелированных во времени и между собой двух компонентов вектора $\vec{\xi}$ ($m=2$) и равноточных измерениях по каждой из компонентов можно получить количественную оценку выигрыша в точности оценивания за счет использования априорной информации в виде уравнения связи компонентов (35). Для описанного случая

$$\varphi(t_1,t_2)=\varphi_0 I\delta(t_2-t_1), \quad (43)$$

где $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$;

$\frac{N_1}{2}\cdot\alpha_1^2=\frac{N_2}{2}\cdot\alpha_2^2$ – это означает равноточность.

Тогда

$$R=\varphi_0\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\\ -\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha_1}{\alpha_2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^2\delta(t_2-t_1)= =\varphi_0\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\\ -\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha_1}{\alpha_2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\delta(t_2-t_1). \quad (44)$$

Диагональные элементы в R/φ_0 равны $1/2$, что говорит об ожидаемом выигрыше в точности оценивания по дисперсии в 2 раза. Этот результат, в частности, согласуется с полученным ранее в [2] для совместного оценивания двух числовых параметров α и β.

Оценим выигрыш в точности по дисперсии при совокупном оценивании компонентов векторного процесса $\vec{\xi}(t)$. Предположение о равноточности и некоррелированности компонентов между собой и во времени полагаем действующим. Опуская в (39) функцию корреляции (43) и отождествляя моменты времени t_1 и t_2, имеем матрицу:

$$G=ZZ^T=\left(I-\frac{F\vec{\alpha}\vec{\alpha}^T}{\vec{\alpha}^TF\vec{\alpha}}\right)\cdot\left(I-\frac{F\vec{\alpha}\vec{\alpha}^T}{\vec{\alpha}^TF\vec{\alpha}}\right). \quad (45)$$

Заметим, что матрица Z симметрична, поэтому знак транспонирования в (45) писать необязательно.

Вычисления элементов матрицы G дают:

$$G_{ij}=\sum_k Z_{ik}Z_{kj}=\sum_k\left(\delta_{ik}-\frac{F_{ii}\alpha_i\alpha_k}{\sum_{i,j=1}^{m}F_{ij}\alpha_i\alpha_j}\right)\cdot\left(\delta_{kj}-\frac{F_{kk}\alpha_k\alpha_j}{\sum_{i,j=1}^{m}F_{ij}\alpha_i\alpha_j}\right). \quad (46)$$

Авторов интересуют только диагональные элементы матрицы G, поскольку именно они представляют собой коэффициенты уменьшения дисперсий ошибок оценивания соответствующих компонентов вектора $\vec{\xi}$. Отождествляя индексы i и j, из (46), получаем:

$$G_{ii}=1-\frac{F_{ii}\alpha_i^2}{\sum_{k=1}^{m}F_{kk}\alpha_k^2}. \quad (47)$$

Теперь в (47) используем условие равноточности измерений

$$F_{ii}\alpha_i^2=F_{kk}\alpha_k^2,\ \forall i,k\in\{1,2,\dots,m\},$$

необходимое постольку, поскольку в общем анализе нет оснований различать оцениваемые компоненты по точности.

Формула (47) принимает вид:

$$G_{ii}=1-\frac{1}{m}=\frac{m-1}{m}. \quad (48)$$

Видим, что с увеличением числа совместно оцениваемых компонентов выигрыш в точности по дисперсии снижается от коэффициента $\frac{I}{G}=2$ (при $m=2$) до $\frac{I}{G}=1$ (при $m\to\infty$), когда выигрыша нет вообще. Физически это объясняется тем, что единственное уравнение связи компонентов (35) снижает размерность области локализации вектора $\vec{\xi}$ только на единицу. Если размерность $\vec{\xi}$ равна двум, то „свобода" вектора ограничивается в два раза. При достаточно большой размерности m снижение размерности области локализации $\vec{\xi}$ на единицу „ощущается" слабо и тем меньше, чем больше m. При бесконечном m уравнение связи практически ничего не уточняет относительно истинных значений составляющих оцениваемого вектора $\vec{\xi}$, и точности первичной и вторичной (с учетом уравнения связи) оценок не отличаются.

3. Уточненные параметры численности основных видов копытных животных в охотничьих хозяйствах Украины

Исходной информацией для получения условных оценок количества особей копытных животных охотничьих хозяйств Украины являются данные, представленные в статистическом ежегоднике Украины за 2008 год [2]. Однако, как известно, любые статистические данные содержат случайные и преднамеренные ошибки. С целью их уменьшения авторами были выделены взаимосвязанные параметры (характеристики) по состоянию ресурсов и уровню численности животных в охотничьих угодьях, а также получены уравнения связи этих параметров.

В результате использования разработанного алгоритма условного совместного оценивания нескольких параметров по результатам измерений с учетом априорных связей между ними в виде конечных уравнений были получены уточненные оценки количества особей некоторых копытных животных охотничьих хозяйств Украины, представленные в табл. 1.

Таблица 1

Динамика численности основных видов диких животных, голов

Вид копытного животного	Год					
	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Олень	16734	16992	17606	17899	18480	19610
Кабан	38796	40351	43119	44808	48982	53084
Косуля	121666	122476	126267	126556	131831	136441
Лань	2217	2268	2692	2664	3143	3183
Куланы	78	83	89	93	98	105

Цель повышения точности оценивания достигается путем использования при условном оценивании дополнительной априорной информации о связи оцениваемых параметров в виде конечных уравнений, которую безусловные статистические оценки не учитывают [8].

Выводы и практические рекомендации

1. Замалчивание истинного положения состояния ресурсов отдельных видов охотничьих животных приводит к тому, что в ряде хозяйств численность некоторых видов завышена в несколько раз. Это недопустимо, так как учтенная численность является основным показателем определения размера изъятия того или иного вида фауны Украины, что неизбежно приводит к снижению его численности.

2. Уравнения связи оцениваемых параметров, отражая физическую природу объекта, несут в себе информацию о возможных значениях этих параметров и, тем самым, ограничивают область их возможной локализации. Эту информацию можно использовать при совместной экспериментальной оценке параметров (характеристик) изучаемого объекта с целью повышения точности оценивания.

3. Использование уравнения связи при совместном независимом и равноточном условном оценивании m параметров позволяет уменьшить средний квадрат ошибки (дисперсию – для несмещенных оценок) в $m/(m-1)$ раз, то есть максимум в 2 раза, что достигается при оценивании двух параметров. Чем большее число параметров подлежит совместной оценке, тем меньше информации в себе несет уравнение связи и тем меньший выигрыш по среднему квадрату ошибки обеспечивает.

4.Уточненные данные о численности копытных животных в охотничьих хозяйствах Украины целесообразно использовать при идентификации математической модели динамики популяций.

Литература

1. Статистичний щорічник України за 2008 рік / [за ред. О.Г.Осауленка]. – К.: Державний комітет статистики України, 2009. – 566 с.
2. Пилькевич И.А. Повышение точности оценивания характеристик динамики популяций / И.А. Пилькевич, А.В.Маевский // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – 2010. – №4/4 (46). – С. 48-52.
3. Ширман Я.Д. Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех / Я.Д.Ширман, В.Н.Манжос. – М.: Радио и связь, 1981. – 416 с.
4. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н.Колмогоров, С.В.Фомин. – М.: Наука, 1976. – 542 с.
5. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л.Э.Эльсгольц. – М.: Наука, 1969. – 424 с.
6. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники / Б.Р.Левин. Т.1. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Сов. радио, 1974. – 552 с.
7. Ефимов Н.В. Линейная алгебра и многомерная геометрия / Н.В.Ефимов, Э.Р.Розендорн. – М.: Наука, 1974. – 544 с.
8. Тарасова В.В. Екологічна статистика (з блочно-модульною формою контролю знань): [підруч.] / В.В.Тарасова. – К.: Центр учбової літ-ри, 2008. – 392 с.