

Причиною появи неоднорідності в елементі конструкцій може бути термічна і механічна обробка, неоднорідність складу матеріалу, технологія виготовлення та ряд інших причин. В роботі розглядається задача про власне коливання прямої ділянки безперервно неоднорідного пружного трубопроводу, що лежить на двоконстантній основі типу П. Л. Пастернака. Рівняння вирішується комбінованим способом. Результати розрахунків показують істотний вплив неоднорідності на значення кругової частоти, і залежать від закону розподілу неоднорідності

Ключові слова: неоднорідність, труба, безперервність, основа, частота, модуль пружності, щільність, рівняння руху

Причиной появления неоднородности в элементе конструкций может быть термическая и механическая обработка, неоднородность состава материала, технология изготовления и ряд других причин. В работе рассматривается задача о собственном колебании прямого участка непрерывно неоднородного упругого трубопровода, лежащего на двухконстантном основании типа П. Л. Пастернака. Уравнение решается комбинированным способом. Результаты расчетов показывают существенное влияние неоднородности на значение круговой частоты и зависят от закона распределения неоднородности

Ключевые слова: неоднородность, труба, непрерывность, основание, частота, модуль упругости, плотность, уравнение движения

УДК 539

DOI: 10.15587/1729-4061.2014.31195

ПОПЕРЕЧНОЕ КОЛЕБАНИЕ ПРЯМОГО УЧАСТКА НЕОДНОРОДНОГО ТРУБОПРОВОДА, ЛЕЖАЩЕГО НА ДВУХКОНСТАНТНОМ ОСНОВАНИИ

В. Д. ГаджиевДоктор физико-математических наук, профессор,
заведующий отделом

Отдел "Теория упругости и пластичности"

Института Математики и Механики

Национальная Академия Наук Азербайджана

ул. Б. Вахабзаде, 9, г. Баку, Азербайджан, AZ 1143

E-mail: h.vaqif@inbox.ru

Х. Г. Джафаров

Аспирант

Азербайджанский

Архитектурно-Строительный Университет

ул. А. Султанова, 5, г. Баку, Азербайджан, AZ 1073

E-mail: xaqani76@mail.ru

1. Введение

В настоящее время магистральные трубопроводы различного назначения, эксплуатируемые в сложных климатических условиях, представляют сложные инженерные конструкции [1, 2].

При проектировании и сооружении трубопроводов от инженера-расчетчика требуется максимально правильно оценивать реальные свойства материала трубы (неоднородность составов, технология изготовления, сварочные напряжения и другие факторы) [3–5].

Отметим, что вопросы прочности, устойчивости, долговечности и анализа частотно амплитудных характеристик с учетом вышеуказанных специфических особенностей существенным образом усложняют решение задач, а не учет может привести к большим погрешностям.

Известно, что в результате взрыва, сильного ветра, землетрясения и ряда других причин в трубопроводе может появиться колебательный процесс. В связи с

тем, что в инженерной практике широко применяются трубы из неоднородных материалов, в данной работе исследуется свободное колебание неоднородной по длине трубы с учетом сопротивления внешней среды.

2. Анализ литературных данных и постановка проблемы

Существуют работы [3, 6], где показано, что модуль упругости и плотность материала могут зависеть от пространственных координат. В данном случае, исходя из работы [3], предполагается, что модуль упругости и плотность зависят только от координаты длины. В [3] изложены основные теоретические и экспериментальные исследования по механике трубопроводов. Результаты исследований, посвященные вопросам долговечности магистральных трубопроводов различного назначения, приведены в [4]. В [5] проводятся экспериментально теоретические исследования, посвященные неоднородным конструкциям.

Было указано, что в результате определенного технологического изготовления длинной балки, модуль упругости и плотность могут являться непрерывной функцией координаты длины.

Немаловажным является учет сопротивления внешней среды, который существенным образом зависит от природно-климатических условий [6–9].

Предполагается, что материал трубы является непрерывно неоднородным, модуль упругости E и плотность ρ являются непрерывными функциями координата длины:

$$E = E_0 f(x) \quad \rho = \rho_0 \psi(x), \quad (1)$$

здесь E_0 , ρ_0 соответствуют однородному случаю, а функция $f(x)$ со своими производными до второго порядка является непрерывной функцией.

Реакция грунта описывается математической моделью П. Л. Пастернака [2].

$$q = k_1 W - k_2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad (2)$$

где k_1 и k_2 – постоянные величины и характеризуют свойства внешней среды; W – прогиб.

Уравнение движения с учетом (1) в (2) записывается в следующем виде [10]:

$$E_0 J_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[f(x) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right] - 2A_1 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + A_2 W + \rho_0 \psi(x) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0, \quad (3)$$

здесь приняты следующие обозначения:

$$A_1 = k_2 \cdot d \left(1 + \frac{1}{\beta \cdot d} \right); \quad A_2 = k_1 \cdot d \left(1 + \frac{2}{\beta \cdot d} \right); \quad \beta = \sqrt{\frac{k_1}{2k_2}}, \quad (4)$$

где d – диаметр трубы; $E_0 J_0$ – жесткость однородной трубы при изгибе.

В [1] рассмотрены распространенные способы и системы сооружения трубопроводов, их особенности и недостатки. Исследован расчет трубопроводов из однородно упругих материалов, здесь решены задачи колебания и не учтено сопротивление внешней среды. В работе [2] излагаются теоретические основы долговечности магистральных и технологических трубопроводов из упруго неоднородных материалов. Вопросы колебаний и сопротивления внешней среды не учитываются. Впервые решена задача [5] устойчивости прямого участка трубопровода из непрерывно по длине материала, лежащей на основании типа Пастернака. Показано, что учет неоднородности и сопротивления среды существенным образом влияет на величины критической нагрузки, и это зависит от краевых условий. Также в [6] впервые были решены задачи колебания неоднородно циклических и конических оболочек с учетом внешнего анизотропного сопротивления.

Для случая осесимметричного колебания для цилиндрической оболочки проведен подробный численный анализ. Результаты вычислительного эксперимента по определению

влияния неоднородности консольной балки, находящейся под равномерно распределенной нагрузкой с учетом большого перемещения, излагается в [7]. В [8] исследуется задача колебания однородной балки с учетом вязкоупругого сопротивления. Применяются приближенно аналитические способы решения. Работа [9] посвящена теории экспериментальных исследований расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. Необходимость проведения этих исследований связано с тем, что гидростатическая модель Винклера не учитывает сдвиговое сопротивление основания.

3. Цель и задачи исследования

Целью работы являлось исследование влияния одновременного учета непрерывно неоднородного по длине двухконстантного основания Пастернака.

Для достижения данной цели решалась задача свободного поперечного колебания прямого участка трубы с учетом вышеуказанных эффектов.

4. Методы исследований уравнения движения

Уравнение (3) является сложным и при произвольном $f(x)$ и $\psi(x)$ получение точного решения невозможно или же затруднительно.

Поэтому уравнение движения (3) будет решено комбинированно приближенно-аналитическими методами.

В первом этапе будем применять метод разделения переменных, причем $W(x, t)$ выбираем в виде:

$$W(x, t) = V(x) l^i \omega^t. \quad (5)$$

Функция $V(x)$ должна удовлетворять соответствующим краевым условиям; ω – круговая частота; t – время.

Подставляя (5) в (3), получим:

$$f(x) \frac{d^4 V}{dx^4} + 2 \frac{df}{dx} \cdot \frac{d^3 V}{dx^3} + \frac{d^2 f}{dx^2} \cdot \frac{d^2 V}{dx^2} - a_2 \frac{d^2 V}{dx^2} + a_1 V - \omega^2 (a_3 \psi(x)) V = 0. \quad (6)$$

где

$$a_1 = 2A_1 (E_0 J_0)^{-1}; \quad a_2 = A_2 (A_0 J_0)^{-1}; \quad a_3 = \rho_0 (E_0 J_0)^{-1}.$$

Решение (6) будем строить с помощью метода ортогонализации Бубнова-Галеркина, причем функцию $V(x)$ будем искать в следующем виде [1]:

$$V(x) = \sum_{i=1}^k b_i \theta_i(x), \quad (7)$$

здесь b_i – неизвестные постоянные, а каждый θ_i – удовлетворяет соответствующим краевым условиям.

В данном случае функция ошибки имеет вид:

$$\eta_i(x) = \sum_{i=1}^k b_i \left[f(x) \frac{d^4 \theta_i}{dx^4} + 2 \frac{df}{dx} \cdot \frac{d^3 \theta_i}{dx^3} + \frac{d^2 f}{dx^2} \cdot \frac{d^2 \theta_i}{dx^2} - a_2 \frac{d^2 \theta_i}{dx^2} + a_1 \theta_i - \omega^2 (a_3 \psi(x)) \theta_i \right] \neq 0. \quad (8)$$

В общем случае ω^2 определяется из системы однородных алгебраических уравнений, составленных из

коэффициентов b_i . Для существования нетривиального решения главный определитель системы должен равняться нулю

$$\|\omega^2\| = 0. \tag{9}$$

Однако для инженерного расчета обычно пренебрегают первым приближением, хотя определение ω^2 в произвольном приближении не вызывает особой трудности.

Учитывая вышесказанное, на основании метода ортогонализации можно записать:

$$\int_0^1 \eta_i(x)\theta_q(x)dx = 0 \quad q=1, 2, 3. \tag{10}$$

Для первого приближения, (10) принимает следующий вид:

$$\int_0^1 \eta_1(x)\theta_1(x)dx = 0, \tag{11}$$

основной тон частоты определяются следующим соотношением :

$$\omega^2 = \frac{\int_0^1 \left[f(x) \frac{d^4\theta_1}{dx^4} + 2 \frac{df}{dx} \cdot \frac{d^3\theta_1}{dx^3} + \frac{d^2f}{dx^2} \cdot \frac{d^2\theta_1}{dx^2} - a_2 \frac{d^2\theta_1}{dx^2} + a_1\theta_1 \right] \theta_1 dx}{a_3 \int_0^1 \psi(x) \cdot \theta_1^2(x) dx}. \tag{12}$$

Задавая функцию аппроксимации $\theta_1(x)$ функцией, характеризующей неоднородность характеристики основания a_1, a_2 , можно установить значение основного тона частоты.

В качестве примера рассмотрим шарнирно закрепленный на двух концах стержень. Пусть

$$\theta_1 = \sin m\pi\bar{x}; \quad f(x) = 1 + \epsilon\bar{x}; \quad \psi = 1 + \mu\bar{x}, \tag{13}$$

здесь $\epsilon \in [0, 1], \mu \in [0, 1]; \bar{x} = x \cdot l^{-1}$.

С учетом (12) в (13) получим:

$$\omega^2 = \frac{\int_0^1 \left[(1 + \epsilon\bar{x}) \left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 \sin m\pi\bar{x} - 2\epsilon l^{-1} \left(\frac{m\pi}{l}\right)^3 \cos m\pi\bar{x} \right] \sin m\pi\bar{x} dx}{a_3 \int_0^1 (1 + \mu\bar{x}) \cdot \sin^2 m\pi\bar{x} dx} + \frac{\int_0^1 a_2 \left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 \sin^2 m\pi\bar{x} dx + a_1 \int_0^1 \sin^2 m\pi\bar{x} dx}{a_3 \int_0^1 (1 + \mu\bar{x}) \cdot \sin^2 m\pi\bar{x} dx}. \tag{14}$$

Учитывая что,

$$\int_0^1 \sin^2 m\pi\bar{x} dx = \frac{1}{2}; \quad \int_0^1 \bar{x} \sin^2 m\pi\bar{x} dx = \frac{1}{4}; \quad \int_0^1 \sin 2m\pi\bar{x} dx = 0,$$

из (12) получим:

$$\omega^2 = \frac{(1 + 0,5\epsilon) \left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 + 0,5a_2 \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 + a_1}{a_3(1 + 0,5\mu)}. \tag{15}$$

В случае однородной трубы ($\epsilon = 0, \mu = 0$) из (15) получим:

$$\omega_0^2 = \frac{\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 + 0,5a_2 \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 + a_1}{a_3}. \tag{16}$$

Если труба неоднородная, только по удельной плотности, частота определяется следующим соотношением:

$$\omega_1^2 = \frac{\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 + 0,5a_2 \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 + a_1}{a_3(1 + 0,5\mu)}. \tag{17}$$

Из (15) при $\mu = 0, \epsilon \neq 0$, получим значения круговой частоты для случая неоднородной трубы по модулю упругости:

$$\omega_2^2 = \frac{(1 + 0,5\epsilon) \left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 + a_2 \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 + a_1}{a_3}. \tag{18}$$

Из вышеуказанных соотношений получим важное соотношение:

$$\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 = \left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2 = \frac{1}{1 + 0,5\mu}. \tag{19}$$

Вводим обозначение

$$\frac{\omega^2 \left(\frac{m\pi}{l}\right)^{-4}}{a_3} = \bar{\omega}^2. \tag{20}$$

Из формулы (18) можно получить решение аналогичной задачи без учета внешнего сопротивления среды:

$$\bar{\omega}_3^2 = \frac{1 + 0,5\epsilon}{1 + 0,5\mu}. \tag{21}$$

5. Результаты исследований определения значения круговой частоты с учетом переменности модуля упругости и плотности, а также сопротивления двухконстантного основания

Результаты численного расчета показаны в табл. 1 и на рис. 1.

Отметим, что аналогичные расчеты можно провести для других аппроксимаций и функций, характеризующий материал. Результаты численного анализа показывают, что значения ω существенным образом зависят от вида аппроксимации, функций $f(x)$ и $\psi(x)$ и от характеристики внешней среды k_1, k_2 .

Из рис. 1, а видно, что при постоянной плотности $\mu = 1$ значение круговой частоты ω_1^2 возрастает, а из

рис. 1, б видно, что при различных значениях ε (при $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon = 0,3$) значения круговой частоты резко отличаются друг от друга.

Таблица 1

Значение круговой частоты $\overline{\omega}_1^2, \overline{\omega}_2^2, \overline{\omega}_3^2$ от параметров упругости ε и плотности μ

$\mu=1$		$\varepsilon=0$		$\varepsilon=0,3$	
μ	$\overline{\omega}_1^2$	μ	$\overline{\omega}_2^2$	μ	$\overline{\omega}_3^2$
0	0,6666	0	1	0	1,1500
0,2	0,7333	0,2	0,9090	0,2	1,0454
0,4	0,8000	0,4	0,8333	0,4	0,9583
0,6	0,8666	0,6	0,7692	0,6	0,8846
0,8	0,9333	0,8	0,7142	0,8	0,8214
1,0	1	1,0	0,6666	1,0	0,7666

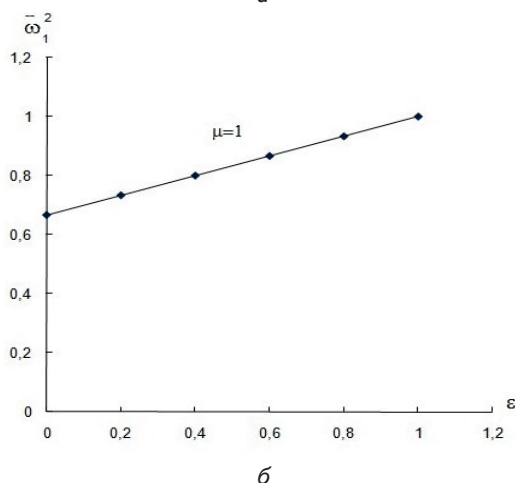
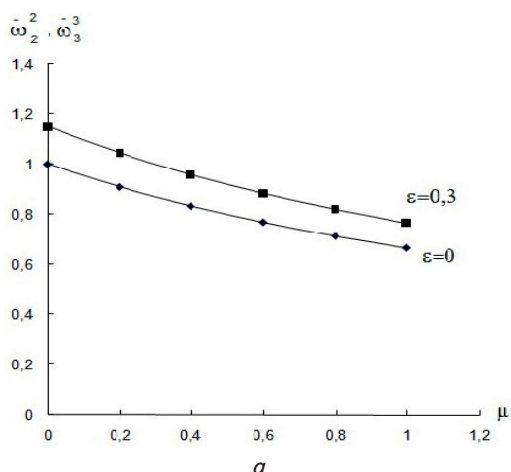


Рис. 1. График зависимости квадрата круговой частоты ($\overline{\omega}_1^2, \overline{\omega}_2^2, \overline{\omega}_3^2$) от параметров неоднородности: а — модуля упругости; б — плотности трубы

5. Выводы

Показано, что на значение круговой частоты существенным образом влияют учет:

- переменности модуля упругости;
- плотности;
- сопротивление внешней среды.

В работе рассмотрена задача о собственном колебании прямого участка непрерывно неоднородной по длине трубы, лежащей на двухконстантном основании типа Пастернака, и показано существенное влияние неоднородности трубы и внешней среды на величины круговой частоты.

Литература

1. Тартаковский, С. А. Строительная механика трубопроводов [Текст] / С. А. Тартаковский. – М.: Недра, 1967. – 312 с.
2. Завойчинский, Б. И. Долговечность магистральных и технологических трубопроводов. Теория, методы расчета проектирование [Текст] / Б. И. Завойчинский. – М.: Недра, 1992. – 271 с.
3. Кравчук, А. С. Механика полимерных и композитных материалов [Текст] / А. С. Кравчук, В. П. Майборода, Ю. С. Уржумцев. - М.: Наука, 1985. – 305 с.
4. Маткаримов, А. Исследования колебаний подземных трубопроводов при сейсмических воздействиях [Текст] / А. Маткаримов // Изв. Ан УзССР, серия тех. наук. – 1986. - № 3. – С. 40-44.
5. Gadjiev, V. D. On non-homogeneous underground pipelines stability [Text] / V. D. Gadjiev, Kh. G. Jafarov // Transactions issue mathematics and mechanics, series of physical-technical and mathematical science. Baku. – 2013. – Vol. XXXIII, Issue 1. –P. 85-89.
6. Sofiyev, A. H. Effect of the two-parameter elastic foundation on the critical parameters of non-homogeneous orthotropic shells [Text] / A. H. Sofiyev, E. Schack, V. D. Hacıyev, N. Kuruoglu // International Journal of Structural stability and Dynamics. – 2012. – Vol. 12, Issue 5. – P. 120048-120065. doi: 10.1142/s0219455412500411
7. Шамровский, А. Д. Влияние неоднородностей на жесткость консольной балки [Текст] / А. Д. Шамровский, Д. Н. Колесник, Е. Н. Михайлуца // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2013. – Т. 6, № 7 (66). – С. 4–7. – Режим доступа: <http://journals.uran.ua/eejet/article/view/18729/17050>
8. Carnet, H. Free vibrations of Reinforced elastic shells [Text] / H. Carnet, L. Lieyy // Conference of ASME. Los Angeles, California, 1969. – P. 16-20.
9. Пастернак, П. Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели [Текст] / П. Л. Пастернак. - М.: Стройиздат, 1954. - 56 с.
10. Бабаков, И. М. Теория колебаний [Текст] / И. М. Бабаков. – М.: Наука, 1968. - 559 с.