

УДК 66.047.75

# МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРОЦЕСУ ТЕПЛООБМІНУ ПІД ЧАС ДРУГОГО ПЕРІОДУ ФІЛЬТРАЦІЙНОГО СУШІННЯ ДИСПЕРСНИХ МАТЕРІАЛІВ

*Наведено результати теоретичних досліджень теплообміну між тепловим агентом і шаром дисперсного матеріалу під час фільтраційного сушіння у другому періоді. Запропонована система диференціальних рівнянь у безрозмірних комплексах, що описує процес теплообміну у стаціонарному шарі вологого дисперсного матеріалу та її розв'язок у зображеннях. Наведені наближені розв'язки цієї задачі для часткових випадків, порівняння розрахованих та експериментальних даних*

**В. М. Атаманюк**

Доктор технічних наук, доцент, професор  
Кафедра хімічної інженерії\*  
Контактний тел.: (032) 258-26-57  
e-mail: atamanyuk@ukr.net

**Я. М. Гумницький**

Доктор технічних наук, професор  
Кафедра "Екологія та охорона навколишнього середовища"\*  
\*Національний університет "Львівська політехніка"  
вул. Ст. Бандери, 12, м. Львів, 79013  
Контактний тел.: 8 (032) 258-23-54  
e-mail: jgumnitsky@ukr.net

## Вступ

Фільтраційне сушіння належить до високоефективних методів сушіння, суть якого полягає в профільтовуванні теплового агента крізь пористу структуру вологого матеріалу в напрямку "шар матеріалу–перфорована перегородка" [1]. Внаслідок цього тепловий агент віддає своє тепло вологим частинкам і насичується парами вологи, а інтенсивність сушіння визначається теплообміном між тепловим агентом і стаціонарним шаром вологого дисперсного матеріалу.

## Аналіз останніх публікацій

Дослідженню процесів теплообміну під час сушіння присвячені роботи багатьох авторів [2-9]. Теплообмін між тепловим агентом і вологим дисперсним матеріалом під час першого періоду наведено у [2]. Однак, як свідчать результати досліджень [3], після

досягнення критичного вологовмісту більше теплоти затрачається на нагрівання матеріалу, ніж на випаровування вологи, а це є неекономною втратою теплоти, крім цього зростання температури вище деякої межі може привести до погіршення якості висушеного продукту. Наведені дослідження в роботі [4] стосуються сушіння відходів деревини за початкової вологості 15% і пористості шару  $\epsilon = 0,94$ . Тепловий агент подається під решітку, а швидкість його фільтрування вибирають в таких межах, щоби псевдозріджений шар не утворювався. Запропонована авторами математична модель дозволяє враховувати вплив швидкості фільтрування теплового агента і його температури на режим сушіння пористого матеріалу. Автори [5] приводять результати теоретичних та експериментальних досліджень теплообміну між окремою гранулою, тепловим агентом та розчином під час гранулювання мінеральних добрив в псевдозрідженому шарі. Запропоновані вище моделі [4, 5] описують процес теплообміну в невеликому діапазоні швидкостей теплового агента (до настання

псевдозрідження або вільного витання). Ряд авторів задачу теплообміну вирішують для одинарної частинки кулястої форми [6, 7]. Теоретичне вирішення задачі теплообміну між стаціонарним шаром дисперсного матеріалу і тепловим агентом також приведено у [8].

Під час фільтраційного сушіння швидкість фільтрування можна змінювати в широких економічно обґрунтованих межах це обумовлено напрямом руху теплового агента. В роботі [9] наведені результати теоретичних та експериментальних досліджень тепломасообміну під час фільтраційного сушіння кам'яного вугілля після процесів збагачення та приведені критеріальні рівняння для визначення коефіцієнтів тепло- і масовідадачі в першому періоді сушіння а також коефіцієнту внутрішньої дифузії під час другого періоду сушіння. Разом з цим процес теплообміну під час фільтраційного сушіння є недостатньо дослідженим, що не дає змоги широко впроваджувати його у масове виробництво.

### Постановка проблеми

Кількість випаруваної вологи під час фільтраційного сушіння є пропорційною кількості теплоти переданої тепловим агентом до вологого матеріалу. В другому періоді сушіння тепло, яке вноситься в шар тепловим агентом йде на нагрівання вологих частинок і на випаровування вологи. При цьому температура змінюється в об'ємі окремої частинки (від її поверхні до центру), по висоті шару і в часі. Тобто процес теплообміну під час другого періоду є нестационарним і його математичний опис є набагато складнішим, ніж у першому періоді сушіння. Однак, з енергетичної точки зору найбільш важливим є процес теплообміну теплового агента з вологим матеріалом саме в другому періоді сушіння, тому що лише невеличка частка теплової енергії йде на випаровування вологи, а решту теплоти непродуктивно витрачається на нагрів матеріалу і виноситься за межі шару разом із тепловим агентом. Точного вирішення задачі теплообміну під час фільтрування теплового агента крізь стаціонарний шар вологих частинок (які сохнуть в другому періоді) є надзвичайно складною задачею. Тому теоретичні та експериментальні дослідження процесів теплообміну під час другого періоду сушіння, зокрема фільтраційного є актуальною задачею.

### Теоретична частина

Розглядається шар зернистого матеріалу висотою  $Z$  (рис. 1), що складається з частинок діаметром  $d$ . Пористість шару складає величину  $\epsilon$ . Все тепло, яке підводиться до поверхні частинок витрачається на їх нагрів та випаровування внутрішньої вологи.

Оскільки, розглядається другий період, то поверхня частинок є вільною від зовнішньої вологи. Через шар зернистого матеріалу рухається тепловий агент з об'ємною витратою  $V_c$  і початковою температурою  $t_n$ . Запишемо балансове рівняння для одиниці висоти шару:

$$V_c \cdot \rho \cdot c \cdot \frac{\partial t}{\partial z} = -\lambda \cdot S \cdot 1 \cdot \frac{1-\epsilon}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3} \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=R} \cdot 4 \cdot \pi \cdot R^2 \quad (1)$$

де  $\rho$  - густина теплового агента,  $c$  - теплоємність теплового агента,  $\lambda$  - коефіцієнт теплопровідності твердої частинки,  $S$  - площа поперечного перерізу шару дисперсного матеріалу,  $\epsilon$  - пористість шару,  $R$  - радіус частинки,  $r$  - біжучий радіус,  $t$  - температура теплового агента,  $T$  - температура твердої частинки.

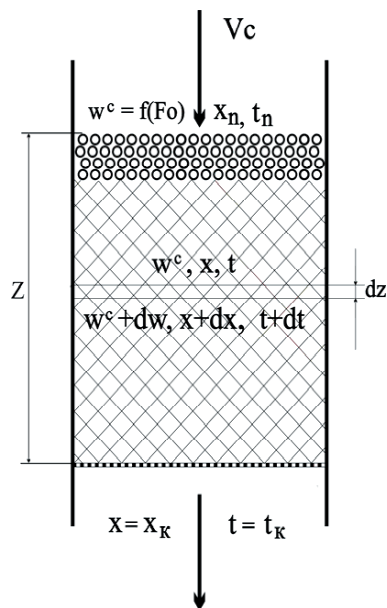


Рисунок 1. Розподіл температур, вологовмісту частинок ДМ та теплового агента під час ФС у другому періоді

Представимо рівняння (1) у безрозмірних координатах:

$$\frac{\partial t}{\partial \omega} = -3 \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=1} \quad (2)$$

де  $\omega = \frac{a \cdot \xi \cdot (1-\epsilon) \cdot z}{\nu_0 \cdot R^2}$  - безрозмірна довжина шару,  $a$  - ко-

ефіцієнт температуропровідності,  $\xi = \rho_s \cdot c_s / (\rho \cdot c)$  - відношення об'ємних теплот дисперсного матеріалу і теплового агента,  $\rho_s$  - густина дисперсного матеріалу,  $c_s$  - теплоємність дисперсного матеріалу,  $\nu_0$  - фіктивна швидкість фільтрування теплового агента,  $\varphi = r/R$  - безрозмірний симплекс.

Задача теплообміну окремої частинки кулястої форми формулюється у виді диференціального рівняння теплопровідності з початковими та граничними умовами III роду:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \cdot \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad (4)$$

$$T_{(r,\tau=0)} = T_0; \quad t_{(z=0,\tau)} = t_n, \quad (5)$$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=0} = 0, \quad (6)$$

$$-\lambda \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{r=R} = \alpha \cdot \left[ t_{(r,z)} - T_{(R,\tau)} \right] \quad (7)$$

де  $\alpha$  - коефіцієнт тепловіддачі,  $\tau$  - час,  $\tau'$  - означає відлік часу від приходу теплового агенту у пункт  $z$  і буде рівний:

$$\tau' = \tau - \frac{z}{v} \tag{8}$$

Очевидно, що  $d\tau' = d\tau$ .

Доповнення системи (4) – (7) рівнянням теплового балансу (1) повністю описує теплообмін, а її розв'язок  $t = f(\tau', z)$  дозволяє визначити температуру теплоносія на висоті  $z$  в час  $\tau$ .

З врахуванням введених безрозмірних параметрів система (1), (4) – (7) запишеться:

$$\frac{\partial T}{\partial \omega} = \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{\varphi} \cdot \frac{\partial T}{\partial \varphi}$$

$$T_{(\varphi, \omega=0)} = T_0; \left( \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=0} = 0$$

$$t_{(\omega=0, \varphi_0)} = t_n \tag{9}$$

$$-\left( \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=1} = Bi \left( t_{(\omega, \varphi_0)} - T_{L, \varphi_0} \right)$$

$$\frac{\partial t}{\partial \omega} + 3 \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=1} = 0$$

де  $Fo = a \cdot \tau / R^2$  - теплове число Фур'є (безрозмірний час),  $Bi = \alpha \cdot R / \lambda$  - теплове число Біо.

Розв'язок системи (9) проводимо операційним методом, який базується на перетворенні Лапласа [10].

Система рівнянь (9) у зображеннях має вигляд:

$$T_L(\varphi, s) - \frac{T_0}{s} = B \cdot \frac{\text{sh}\sqrt{s} \cdot \varphi}{\varphi} \tag{10}$$

$$T_L(1, s) - \frac{T_0}{s} = B \cdot \text{sh}\sqrt{s} \cdot \varphi \tag{11}$$

$$\left[ \frac{dT_L(\varphi, s)}{d\varphi} \right]_{\varphi=1} = B \cdot (\sqrt{s} \cdot \text{ch}\sqrt{s} - \text{sh}\sqrt{s}) \tag{12}$$

$$\left( \frac{dT_L(\varphi, s)}{d\varphi} \right)_{\varphi=1} = Bi \cdot [F - T_L(1, s)] \tag{13}$$

$$\frac{dF}{d\omega} + 3 \cdot \left( \frac{dT_L(\varphi, s)}{d\varphi} \right)_{\varphi=1} = 0 \tag{14}$$

де  $F$  – зображення температури теплового агента  $t(\omega, Fo)$ ,  $s$  – оператор Лапласа,  $B$  – коефіцієнт.

З рівнянь (11), (12), (13) визначаємо коефіцієнт  $B$ :

$$B = - \frac{F - \frac{T_0}{s}}{\frac{1}{Bi} \cdot \sqrt{s} \cdot \text{ch}\sqrt{s} - \left( 1 + \frac{1}{Bi} \right) \cdot \text{sh}\sqrt{s}}$$

$$\frac{dF}{d\omega} = 3 \cdot \frac{F - \frac{T_0}{s}}{\frac{1}{Bi} \cdot \sqrt{s} \cdot \text{ch}\sqrt{s} - \left( 1 + \frac{1}{Bi} \right) \cdot \text{sh}\sqrt{s}} \cdot (\sqrt{s} \cdot \text{ch}\sqrt{s} - \text{sh}\sqrt{s}) =$$

$$= 3 \cdot \frac{F - \frac{T_0}{s}}{\frac{1}{Bi} - \frac{1}{\sqrt{s} \cdot \text{cth}\sqrt{s} - 1}}$$

З врахуванням (12), рівняння (14) запишеться:

Інтегрування рівняння шляхом розділення перемінних (15):

$$\int_{\frac{t_n - T_0}{s}}^{\frac{F - T_0}{s}} \frac{dF}{F - \frac{T_0}{s}} = \frac{3}{Bi} \cdot \frac{1}{\sqrt{s} \cdot \text{cth}\sqrt{s} - 1} \cdot \int_0^{\omega} d\omega$$

приводить до результату:

$$\frac{F - \frac{T_0}{s}}{\frac{t_n - T_0}{s}} = \frac{1}{s} \cdot \exp \left( - \frac{3 \cdot \omega}{\frac{1}{\sqrt{s} \cdot \text{cth}\sqrt{s} - 1} - \frac{1}{Bi}} \right) \tag{16}$$

де  $F(0) = \frac{t_n}{s}$  означає умови на початку шару при  $\omega = 0$ .

Оригіналу, який би відповідав зображенню (16) немає. Тому зупинимось на одержанні наближених рішень задачі про теплообмін теплового агенту з шаром дисперсного матеріалу. У зв'язку з цим розглянемо наближені розв'язки задачі тепломасообміну у шарі дисперсного матеріалу. Наближені розв'язки отримуються при певних допущеннях. Прийmemo, що конвективний теплообмін є значно інтенсивніший від теплопровідності у твердій частинці, що дозволяє вважати великим число Біо великим ( $Bi = \infty$ ). У цьому випадку зображення (16) має вигляд:

$$\frac{F - \frac{T_0}{s}}{t_n - T_0} = \frac{1}{s} \cdot \exp \left( -3 \cdot \omega \cdot (\sqrt{s} \cdot \text{cth}\sqrt{s} - 1) \right) \tag{17}$$

а) Випадок малих чисел Фур'є  $Fo \ll 1$  (у випадку коли час сушіння у другому періоді є нетривалим). Йому відповідає велике значення  $s$  у зображеннях. Значення  $\text{cth}\sqrt{s}$  може бути розкладене у ряд [11]:

$$\text{cth}\sqrt{s} = 1 + 2 \cdot (e^{-2\sqrt{s}} + e^{-4\sqrt{s}} + e^{-6\sqrt{s}} + \dots)$$

Для великих значень  $s$   $\text{cth}\sqrt{s} \approx 1$ , тоді зображення (17) запишеться:

$$\frac{F - \frac{T_0}{s}}{t_n - T_0} = \frac{1}{s} \cdot e^{-3\omega(\sqrt{s}-1)} \tag{18}$$

що дозволяє за цим зображенням знайти оригінал функції [10]:

$$\frac{t - T_0}{t_n - T_0} = e^{3\omega} \cdot \text{erfc} \frac{3 \cdot \omega}{2 \cdot \sqrt{Fo}} \tag{19}$$

б) Великі числа Фур'є  $Fo \gg 1$ . Значення  $s$  у цьому випадку є малими, тоді розкладаючи у рівнянні (17)  $\text{cth}\sqrt{s}$  та обмежуючись першими двома членами розкладу отримуємо:

$$\sqrt{s} \cdot \text{cth}\sqrt{s} - 1 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 \cdot s}{s + i^2 \cdot \pi^2} \approx \frac{2 \cdot s}{s + \pi^2} + 0,1307 \cdot s$$

Зображення з врахуванням даного розкладу має вигляд:

$$F - \frac{T_0}{s} = \frac{1}{s} \cdot \exp \left[ -6 \cdot \omega \cdot \left( \frac{s}{s + \pi^2} + 0,06535 \cdot s \right) \right] \quad (20)$$

$$\frac{t - T_0}{t_n - T_0} = e^{-6\omega} \cdot \left[ e^{-\eta} \cdot I_0(2 \cdot \sqrt{6 \cdot \omega \cdot \eta}) + \int_0^{\eta} e^{-\eta} \cdot I_0(2 \cdot \sqrt{6 \cdot \omega \cdot \eta}) \cdot d\eta \right] \quad (21)$$

Знаходимо оригінал зображення (19) [10]:

де  $\eta = \pi^2 \cdot (Fo - m \cdot \omega)$ ;  $m = 0,392076$ ,  $I_0(y)$  – функція Бесселя нульового порядку.

в) Випадок малих значень  $\omega$ :  $\omega \ll 1$ .

Використовуючи розклад  $(\text{cth}\sqrt{s} - 1)$  аналогічний, як у випадку б) отримуємо розв'язок рівняння (17) у вигляді:

$$\frac{t - T_0}{t_n - T_0} = 1 - \omega \cdot \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot e^{-\mu_n^2 \cdot Fo} \quad (22)$$

$$\text{де } A_n = \frac{6 \cdot Bi^2}{Bi \cdot (Bi - 1) + \mu_n^2}; \quad \frac{\mu}{1 - \mu \cdot \text{ctg}\mu} = \frac{\mu}{Bi}$$

Отриманий результат для шару невеликої висоти  $\omega \ll 1$  (має назву “короткий” шар) за формою практично не відрізняється від загального рішення для одинарної частинки в граничних умовах третього роду.

г) Випадок великих довжин шарів  $\omega \gg 1$  дозволяє отримати результат [10]:

$$\frac{t - T_0}{t_n - T_0} = \frac{1}{2} \cdot \left[ 1 + \text{erf} \frac{Fo - \omega}{\sqrt{\frac{4}{3} \cdot \omega \cdot \left( \frac{1}{Bi} + \frac{1}{5} \right)}} \right] \quad (23)$$

### Експериментальна частина

Для перевірки адекватності математичної моделі досліджували зміну температури під шаром дрібнодисперсного вугілля. Експерименти проводили на експериментальній установці опис якої наведений у [10]. Початкову температуру теплового агента підтримували постійною ( $t = 50 \pm 0,5^\circ\text{C}$ ) і вимірювали на висоті 20 мм над шаром вугілля, початкова температура твердих частинок становила  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ . Температуру під шаром вугілля вимірювали за допомогою термопар ХК і 7-ми канального вимірювального інтелектуального перетворювача ПВІ-028 з виводом інформації через 1,7

с на монітор комп'ютера. Термопари розташовували на відстані 20 мм нижче шару вугілля і на різній відстані від центру контейнера. Температуру теплового агента під шаром дрібнодисперсного вугілля розраховували як середнє арифметичне показів шести термопар. Результати експериментальних досліджень у безрозмірній формі наведені на рис. 2.

Безрозмірні значення висоти шару відповідно становили:

$$H = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м} - \omega = 0,26; \quad H = 26 \cdot 10^{-3} \text{ м} - \omega = 3,52;$$

$$H = 41 \cdot 10^{-3} \text{ м} - \omega = 5,56; \quad H = 56 \cdot 10^{-3} \text{ м} - \omega = 7,59;$$

$$H = 71 \cdot 10^{-3} \text{ м} - \omega = 9,62; \quad H = 86 \cdot 10^{-3} \text{ м} - \omega = 11,65.$$

Наведені на рис. 2 дані свідчать про те, що інтервал чисел  $Fo$  не відповідає прийнятим допущенням  $Fo \gg 1$  і  $Fo \ll 1$ , а число  $Bi \neq \infty$ . Тому скористатись наближеними розв'язками (19) і (21) не є можливим. Ми використали наближені залежності (22) для малих довжин шару  $\omega \ll 1$  та (23) для  $\omega \gg 1$ . Як видно з рис. 2 для малої товщини шару  $H = 3 \cdot 10^{-3} < - \omega = 0,26$ , яка з певним наближенням відповідає  $\omega \ll 1$  з достатнім ступенем точності, залежність (22) описує цей процес і її можна рекомендувати для проектних розрахунків під час проектування нового сушильного обладнання. Теоретично розраховані значення на основі залежності (23) для  $H = 86 \cdot 10^{-3} \text{ м} - \omega = 11,65$  представлені кривою 2. Необхідно відзначити характерну подібність експериментальних значень (точки) та теоретичної кривої.

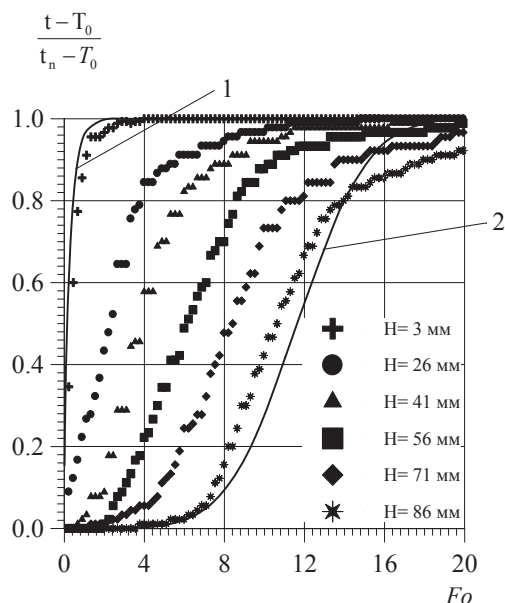


Рисунок 2. Зміна температури сушильного агента під шаром дрібнодисперсного вугілля фракції  $(1,25 \div 2,5) \cdot 10^{-3} \text{ м}$  у безрозмірних координатах: Лінії теоретично розраховані: 1 – за залежністю (22); 2 – за залежністю (23); точки – експериментальні значення

---

**Висновок**


---

1. Запропонована і обґрунтована система диференціальних рівнянь у безрозмірних параметрах, яка описує теплообмін у другому періоді під час фільтраційного сушіння дисперсних матеріалів.
  2. Отриманий розв'язок цієї системи у зображеннях.
  3. Отримані наближені розв'язки цієї системи для  $Bi = \infty$  коли  $Fo \ll 1$ ,  $Fo \gg 1$ ,  $\omega \ll 1$  і  $\omega \gg 1$ .
  4. Встановлена адекватність запропонованої моделі для  $\omega \ll 1$  і  $\omega \gg 1$ .
- 

**Література**

1. Атаманюк В.М. Дисперсні матеріали Механізм і кінетика фільтраційного сушіння // Хімічна промисловість України. К.: 2007. –№4, –С.24-29.
2. Атаманюк В.М. Зовнішній тепломасообмін під час фільтраційного сушіння // Промышленная теплотехника. –К.: 2006, Т. 28, –№5, –С.47-54.
3. Снежкін Ю.Ф., Боряк Л.А., Шапар Р.О. Вплив процесу сушіння на теплообмін // Промышленная теплотехника. –К.: 2003, Т. 25, приложение к –№4, –С.346-349.
4. Исаков Г.Н., Субботин А.Н. Моделирование тепло- и массообмена в продуваемом пористом слое при сушке гранулированного материала // Труды второй международной научно-практической конференции “Современные энергосберегающие технологии (Сушка и тепловые процессы) СЭТТ–2005” –М.: Т. 1, –С. 127 – 130.
5. Розв'язання фізичної та математичної моделі процесу сушки зернистих компонентів в псевдозрідженому шарі

/ Дахненко А.В., Степанюк А.Р., Воронін Л.Г., Гевліч К.О.  
// Наукові праці Одеської національної академії харчових технологій. –№32, 2008, С.189–192.

6. Никитенко Н.И., Снежкін Ю.Ф., Сорокова Н.Н. Кинетика и динамика тепломассопереноса при сушке слоя диспергированного коллоидного капиллярно-пористого материала // Наукові праці Одеської національної академії харчових технологій. Одеса: 2006. Вип. 28. –Т.2 – С.140-146.
7. Романков П.Г., Фролов В.Ф. Массообменные процессы химической технологии (системы с дисперсной твердой фазой). Л.: Химия, 1990. – 384 с.
8. Аэров О.М., Тодес О.М., Наринский Д.А. Аппараты со стационарным зернистым слоем (Гидравлические и тепловые основы) // –Л.: Химия, 1979. –176 с.
9. Атаманюк В.М., Гумницький Я.М. Тепломасообмін під час сушіння кам'яного вугілля // Збірник праць 5-ї міжнародної науково-практичної конференції Проблеми економії енергії. –Львів: 2008. –С. 266–268.
10. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление – М.: Высшая школа, 1975. – 407 с.
11. Аксельруд Г.А. Метод инвариантных функций для процессов массообмена в системе твердое тело жидкость –Львов: Из-во ЛПИ, 1991. –27 с.
12. Гідродинаміка процесу фільтраційного сушіння матеріалів, для яких властиве явище сідання / Я.М. Ханік, Я.М. Гумницький, В.М. Атаманюк, П.В. Білей. Науковий вісник: Проблеми деревообробного виробництва. Збірник науково-технічних праць. Вип. 2. –Львів: УкрДЛТУ, 1994. С.29–39.