УДК 519.216

АНАЛИЗ КАЧЕСТВА ЛИНЕЙНОЙ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ НА БАЗЕ АППАРАТА КАНОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ

Осуществлен анализ качества линейной экстраполяции скалярных случайных процессов при различном объеме информации на базе аппарата канонических разложений. В частности получен вывод о том, что переход от скалярного случайного процесса со значительным последействием к векторному марковскому процессу дает квазиоптимальный результат решения задачи фильтрации-экстраполяции методом Калмана

И.П. Атаманюк
Кандидат технических наук, доцент
Кафедра высшей и прикладной математики
Николаевский государственный аграрный университет
54010, г.Николаев ул. Парижской коммуны, 9
Контактный тел.: 8098 7971234
e-mail: atamanyuk_igor@mail.ru

Широкий круг задач управления связан с необходимостью предсказания будущего состояния объекта контроля по его настоящему и прошлому. В случае, когда данная задача решается в условиях неопределенности одним из подходов к ее решению является рассмотрение значений параметров объекта в качестве реализаций случайного процесса и применение к данным реализациям аппарата экстраполяции случайных процессов. Наиболее универсальным методом экстраполяции с точки зрения накладываемых на случайный процесс ограничений является метод прогноза, базирующийся на каноническом разложении исследуемого случайного процесса [1]. Получаемая с помощью данного метода оптимальная в среднеквадратическом смысле оценка $m_x^{(k)}(i)$ линейного прогноза незашумленного случайного процесса $X(t)$ по результатам последовательных измерений $x(\mu),\mu=\overline{1,k}$ имеет вид [1]:

$$m_x^{(\mu)}(i)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad \mu=0,\ i=\overline{1,I};\\ m_x^{(\mu-1)}(i)+[x(\mu)-m_x^{(\mu-1)}(\mu)]\varphi_\mu(i), & \mu=\overline{1,k},\ i=\overline{\mu+1,I}.\end{cases} \quad (1)$$

Выражение (1) может быть записано в явной эквивалентной форме:

$$m_x^{(k)}(i)=\sum_{\mu=1}^{k}x(\mu)f_\mu^{(k)}(i),\ i=\overline{k+1,I}, \quad (2)$$

где

$$f_\mu^{(k)}(i)=\begin{cases}f_\mu^{(k-1)}(i)-f_\mu^{(k-1)}(k)\varphi_k(i), & \mu\le k\text{-}1;\\ \varphi_k(i), & \mu=k.\end{cases} \quad (3)$$

В (1), (2) без ограничения общности положено, что математическое ожидание случайного процесса $X(t)$ в исследуемых точках дискретизации равно нулю $m_x(i)=0,\ i=\overline{1,I}$, (данное предположение сохраняется на протяжении всего последующего изложения), а $\varphi_\mu(i),\ \mu=\overline{1,k}$ являются координатными функциями канонического разложения процесса $X(t)$

$$X(i)=\sum_{\nu=1}^{i}V_\nu\varphi_\nu(i),\ i=\overline{1,I}, \quad (4)$$

элементы которого с использованием известной дискретизированой функции дисперсии $D_X(i)$ и корреляционной функции $R_X(i,j),i,j=\overline{1,I}$ определены стандартным образом:

$$V_i=X(i)-\sum_{\nu=1}^{i-1}V_\nu\varphi_\nu(i),\ i=\overline{1,I}; \quad (5)$$

$$D_V(\nu)=D_x(i)-\sum_{\nu=1}^{i-1}D_V(\nu)\varphi_\nu^2(i),\ i=\overline{1,I}; \quad (6)$$

$$\varphi_\nu(i)=\frac{1}{D_V(\nu)}[R_x(\nu,i)-\sum_{j=1}^{\nu-1}D_V(j)\varphi_j(\nu)\varphi_j(i)],\ \nu=\overline{1,I}\ ,i=\overline{j,I}\ ; \quad (7)$$

где $D_V(i),\ i=\overline{1,I}$ - дисперсия некоррелированых случайных коэффициентов $V_i\ i=\overline{1,I}$.

Выражения (1), (2) в рамках линейного приближения определяют условное математическое ожидание случайного процесса $X(t)$ при условии $X(\mu)=x(\mu),\ \mu=\overline{1,k}$, т.е. дают несмещенную оценку будущих значений экстраполируемой реализации и обеспечивают абсолютный минимум среднего квадрата погрешности линейной экстраполяции

$$E_x^{(k)}(i)=M[\left|m_x^{(k)}(i)-X(i)\right|^2],\ i=\overline{k+1,I} \quad (8)$$

равный дисперсии

$$E_x^{(k)}(i)=D_x^{(k)}(i)=\sum_{\nu=k+1}^{i}D_V(\nu)\varphi_\nu^2(i),\ i=\overline{k+1,I} \quad (9)$$

апостериорной случайной последовательности

$$X^{(k)}(i)=m_x^{(k)}(i)+\sum_{\nu=k+1}^{i}V_\nu\varphi_\nu(i),\ i=\overline{1,I}. \quad (10)$$

Единственное требование алгоритма (1),(2) к исследуемому процессу - конечность дисперсии в точках дискретизации - не является существенным ограничением и, как правило, выполняется для физических процессов.

Предположим, что значения $X(i), i=\overline{1,I}$ не наблюдаемы из-за погрешностей измерений $Y(i),\ i=\overline{1,I}$: $m_y(i)=0, R_y(i,i)=D_y(i), i=\overline{1,I},\quad R_y(i,j)=0, i\neq j, i=\overline{1,I}$. В совокупности $X(i)$ и $Y(i)$ формируют случайную последовательность результатов измерений $\{Z\}$:

$$Z(i)=X(i)+Y(i),\ i=\overline{1,I}\ . \quad (11)$$

Простейший алгоритм экстраполяции $X(t)$ по $z(\mu),\ \mu=\overline{1,k}$, на базе канонического разложения (4) имеет вид:

$$m_{x/z}^{(k)}(i)=\sum_{\mu=1}^{k}z(\mu)f_\mu^{(k)}(i),\ i=\overline{k+1,I}\ . \quad (12)$$

Средний квадрат погрешности экстраполяции алгоритмом (12) определяется из выражения

$$E_{x/z}^{(k)}=D_x(i)-2\sum_{\mu=1}^{k}R_x(\mu,i)f_\mu^{(k)}(i)+$$
$$+\sum_{\mu=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{k}R_z(\mu,\nu)f_\mu^{(k)}(i)f_\nu^{(k)}(i),\ i=\overline{1,I} \quad (13)$$

Естественным шагом к повышению качества экстраполяции является замена в алгоритме (12) результатов измерений $z(\mu),\ \mu=\overline{1,k}$ некоторыми оценками $\hat{x}(\mu),\ \mu=\overline{1,k}$, обладающие лучшими точностными характеристиками: $M[\left|X(\mu)-\hat{X}(\mu)\right|^2]<D_y(\mu)$.

Используя подход Калмана, выражение для определения несмещенной оценки запишется как:

$$\hat{x}(\mu)=(1-B_\mu)m_{\hat{x}}^{(\mu-1)}(\mu)+B_\mu z(\mu),\ \mu=\overline{1,k}\ , \quad (14)$$

где $m_{\hat{x}}^{(\mu-1)}(\mu)$ - результат прогноза на μ - тый шаг по $(\mu-1)$ предшествующей оценке $\hat{x}(\nu),\ \nu=\overline{1,\mu\text{-}1}$;

B_μ - коэффициент фильтрации, который определяется из условия минимума среднего квадрата ошибки приближения $M[\left|X(\mu)-\hat{X}(\mu)\right|^2]$.

Подстановка оценки (14) в (12) дает алгоритм экстраполяции с предварительной фильтрацией погрешностей измерений, который может быть записан в рекуррентной и явной форме [2]:

$$m_{\hat{x}}^{(\mu)}(i)=\begin{cases}0,\ \text{при}\ \mu=0,\ i=\overline{1,I}\ ;\\ m_{\hat{x}}^{(\mu-1)}(i)+B_\mu[z(\mu)-m_{\hat{x}}^{(\mu-1)}(\mu)]\varphi_\mu(i),\mu=\overline{1,k},\ \ i=\overline{k+1,I}\ ;\end{cases} \quad (15)$$

$$m_{\hat{x}}^{(k)}(i)=\sum_{\mu-1}^{k}S_\mu^{(k)}(i)z(\mu),\ k<I,\ i=\overline{k+1,I}\ ; \quad (16)$$

где

$$S_\mu^{(k)}(i)=\begin{cases}S_\mu^{(k)}(i)-S_\mu^{(k-1)}(k)B_k\varphi_k(i),\ \mu<k\ ,\\ B_k\varphi_k(i),\ \mu=k\ .\end{cases} \quad (17)$$

С учетом выражения (16) соотношения для определения оптимальных значений B_μ запишется как:

$$B_\mu=\frac{E_{\hat{x}}^{(\mu-1)}(\mu)}{E_{\hat{x}}^{(\mu-1)}(\mu)+D_y(\mu)}\ , \quad (18)$$

где $E_{\hat{x}}^{(\mu-1)}(\mu)$ - средний квадрат ошибки экстраполяции $x(\mu)$ по $(\mu-1)$ результатам измерений:

$$E_{\hat{x}}^{(\mu-1)}(\mu)=D_x(\mu)-2\sum_{\nu=1}^{\mu-1}R_x(\nu,\mu)S_\nu^{(\mu-1)}(\mu)+$$
$$\sum_{\nu=1}^{\mu-1}\sum_{j=1}^{\mu-1}R_z(\nu,j)S_\nu^{(\mu-1)}(\mu)S_j^{(\mu-1)}(\mu). \quad (19)$$

Соответственно качество экстраполяции алгоритмом (15), (16) в точках дискретизации $i=\overline{k+1,I}$ для к известных значений $z(\mu),\ \mu=\overline{1,k}$, определяется выражением:

$$E_{\hat{x}}^{(k)}=D_x(i)-2\sum_{\mu=1}^{k}R_x(\mu,i)S_\mu^{(k)}(i)+$$
$$+\sum_{\mu=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{k}R_Z(\mu,\nu)S_\mu^{(k)}(i)S_\nu^{(k)}(i),\ i=\overline{k+1,I}. \quad (20)$$

Следует отметить, что алгоритм (15), (16) является аналогом известных модификаций фильтра Калмана для фильтрации (экстраполяции) немарковских случайных процессов. Так, например, не сложно показать, что в одном из таких решений, базирующимся на понятии "пространство фазовых состояний" [3] размерности эквивалентной количеству известных измерений, матричное уравнение системы

$$\overline{X}(\mu)=A(\mu,\mu-1)\overline{X}(\mu-1)+A(\mu)\cdot V_{\mu} ,$$

которое описывает динамику изменения

$X(t)$ в точке t_{μ}, с учетом свойства

$$M[\overline{X}(\mu)\overline{X}(\mu-1)]=™(\mu,\mu-1)M[\overline{X}(\mu-1)\overline{X}(\mu-1)]$$

$$\begin{pmatrix} X(2)\\ X(3)\\ ...\\ ...\\ X(\mu-1)\\ X(\mu)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & ... & 0 & 0\\ 0 & 0 & ... & 0 & 0\\ ... & ... & ... & ... & ....\\ ... & ... & ... & ... & ....\\ 0 & 0 & ... & 1 & 0\\ f_1^{(\mu-1)}(\mu) & f_2^{(\mu-1)}(\mu) & ... & f_{\mu-2}^{(\mu-1)}(\mu) & f_{\mu-1}^{(\mu-1)}(\mu)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} X(1)\\ X(2)\\ ...\\ ...\\ X(\mu-2)\\ X(\mu-1)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\...\\...\\0\\1\end{pmatrix} V_{\mu} \qquad (21)$$

может быть приведено к виду:

т.е. результат прогноза $x(\mu)$ с помощью (21) по $z(\nu),\ \nu=\overline{1,\mu\text{-}1}$

тождественен оценке (12) для $k=\mu-1,\ i=\mu,$,

а результат фильтрации оценке (14).

Алгоритм (15),(16) наряду с очевидными достоинствами (отсутствие ограничений на исследуемый случайный процесс $X(t)$, простота вычислений) обладает существенным недостатком - в экстраполяционную форму (1),(2), оптимальную для $x(\mu),\ \mu=\overline{1,k}$, подставляются оценки $\overline{x}=(\mu),\ \mu=\overline{1,k}$, вероятностные характеристики которых отличаются от $x(\mu),\ \mu=\overline{1,k}$. Наличие данного рассогласования, очевидно, ограничивает качество экстраполяции.

Указанный недостаток может быть устранен за счет перехода от канонического разложения (4), положенного в основу всех приведенных выше алгоритмов, к каноническому разложению смешанной случайной последовательности $\{X'\}=\{Z(1),Z(2),...,Z(k),X(k+1),...,X(I)\}$, сочетающей в себе как результаты измерений до i=k, так и данные о процессе $X(t)$ для $i=\overline{k+1,I}$ [4]:

$$x'(i)=\sum_{\nu=1}^{i}U_{\nu}\beta_{\nu}(i),\ \ i=\overline{1,I}\ . \qquad (22)$$

Элементы канонического разложения (21) определяются соотношениями:

$$U_i=Z(i)\sum_{\nu=1}^{i}U_{\nu}\beta_{\nu}(i),i=\overline{1,k} \qquad (23)$$

$$U_i=X(i)-\sum_{\nu=1}^{i-1}U_{\nu}\beta_{\nu}(i),\ i=\overline{k+1,I}\ ; \qquad (24)$$

$$D_U(i)=D_z(i)-\sum_{\nu=1}^{i-1}D_U(\nu)\beta^2{}_{\nu}(i),\ i=\overline{1,k}\ ; \qquad (25)$$

$$D_U(i)=D_x(i)-\sum_{\nu=1}^{i-1}D_U(\nu)\beta^2{}_{\nu}(i),\ i=\overline{k+1,I}\ ; \qquad (26)$$

$$\beta_{\nu}(i)=\frac{1}{D_U(\nu)}[R_x(\nu,i)-\sum_{j=1}^{\nu-1}D_U(j)\beta_j(\nu)\beta_j(i)]\ ,\ \nu=\overline{1,I},\ i=\overline{\nu,I}\ ,\ \mu\le i\ . \qquad (27)$$

Алгоритм оптимальной в среднеквадратическом смысле линейной экстраполяции на базе канонического разложения (21) имеет вид:

$$m_{x/z}^{(\mu)}(i)=\begin{cases}0,\ \ \mu=0,\ \ i=\overline{1,I}\ ;\\ m_{x/z}^{(\mu-1)}(i)+(z(\mu)-m_{x/z}^{(\mu-1)}(\mu))\beta_{\mu}(i),\ \mu=\overline{1,k}\ ,\ \ i=\overline{k+1,I}\ \ ;\end{cases} \qquad (28)$$

или может быть записан в явной эквивалентной форме Винера [4]:

$$m_{x/z}^{(k)}(i)=\sum_{\mu=1}^{k}z(\mu)b_{\mu}^{(k)}(i),\ \ i=\overline{k+1,I}\ , \qquad (29)$$

где

$$b_{\mu}^{(k)}(i)=\begin{cases}b_{\mu}^{(k-1)}(i)-b_{\mu}^{(k-1)}(k)\beta_{\mu}(i),\ \ \mu<k\ ;\\ \beta_k(i),\ \mu=k\ .\end{cases} \qquad (30)$$

Выражение (28),(29) определяет условное математическое ожидание последовательности $\{x'\}$ при условии $Z(\mu)=z(\mu),\ \ \mu=\overline{1,k}$. Средний квадрат погрешности экстраполяции алгоритмом (27),(28) равен дисперсии

$$E_{x/z}^{(k)}(i)=D_{x'}^{(k)}(i)=\sum_{\nu=k+1}^{i}D_u(\nu)\beta_{\nu}(i),\ \ i=\overline{k+1,I} \qquad (31)$$

апостериорной случайной последовательности

$$x'^{(k)}(i)=m_{x/z}^{(k)}(i)+\sum_{\nu=k+1}^{i}U_{\nu}\beta_{\nu}(i),\ \ i=\overline{1,I}\ . \qquad (32)$$

Алгоритм (15),(16), в основу которого положена идея калмановской фильтрации и алгоритм (28),(29), который представляет собой фильтр-экстраполятор Винера для нестационарных случайных процессов (4), используют для своей работы одинаковый объем априорной информации. В связи с этим с целью определения влияния рассогласования в алгоритме (15),(16) естественным является проведение сравнительного анализа качества экстраполяции данными алгоритмами.

Предположим, что (15),(16) дает оптимальный в среднеквадратическом смысле результат экстраполяции, тогда в силу теоремы про единство оптимального решения:

$$m_{x/z}^{(k)}(i)=m_{\hat{x}}^{(k)}(i),\ \ i=\overline{k+1,I}. \qquad (33)$$

Из (33) следует соотношение:

$$\beta_{\nu}(i)=\beta_{\nu}(\nu)\varphi_{\nu}(i),\ \ \nu=\overline{1,k}, \qquad (34)$$

которое с учетом выражений (7),(27) для количества измерений k приводится к виду

$$\sum_{\nu=1}^{k-1}(D_V(\nu)-D_u(\nu)\beta_\nu^2(\nu))(D_x(k)\varphi_\nu(k)\varphi_\nu(i)-R_x(k,i)\varphi_\nu^2(k))=0\,. \quad (35)$$

Для двух известных значений ($k=2$) уравнение (35), а следовательно и (33) истинно, если (для $k=1$ - марковский случай - (33) выполняется без каких-либо условий) выполняется хотя бы одно из условий:

$$D_V(1)=D_u(1)\beta_1^2(1)\,, \quad (36)$$

или

$$D_x(2)R_x(1,i)=R_x(1,2)R_x(2,i) \quad (37)$$

Выражение (36) эквивалентно уравнению

$$D_z(1)=D_x(1),$$

т.е. ложно, остается (37).

В случае, когда для прогноза используются два произвольных измерения, из области возможных значений $\overline{1,k}$ соотношение (37) приобретает вид:

$$D_x(\nu)R_x(\mu,i)=R_x(\mu,\nu)R_x(\nu,i),\;\; \nu,\mu=\overline{1,k}\,,\;\; \mu<\nu\,. \quad (38)$$

Учитывая, во-первых, рекуррентный характер алгоритмов экстраполяции ($m^{(2)}(i)$ используется для вычисления $m^{(3)}(i),m^{(4)}(i),\ldots$), во-вторых, в каноническом разложении может быть произвольный порядок следования точек дискретизации (для вычисления $m^{(2)}(i)$ могут быть использованы два значения, которые соответствуют произвольным сечениям из $\overline{1,k}$) соотношение (37) должно выполнятся и для количества известных значений >2.

Однако, случайный процесс обладающий данным свойством является марковским, так как

$$M[X(i)/x(1),\ldots,x(\nu)]=x(\nu)\frac{R_x(\nu,i)}{D_x(\nu)}\,,$$

если справедливо уравнение

$$M[(X(i)-X(\nu)\frac{R_x(\nu,i)}{D_x(\nu)})X(\mu)]=0,\;\; \mu=\overline{1,\nu}\,,$$

которое эквивалентно (38).

Т.е. алгоритм (15), (16) является оптимальным только для марковских случайных процессов и его явная форма записи в данном случае значительно упрощается:

$$m_{x/\hat{x}}^{(k)}(i)=\sum_{\mu=1}^{k}z(\mu)B_\mu(k)\frac{R_x(\mu,i)}{D_x(\mu)},\;\; i=\overline{k,I}\,; \quad (43)$$

где

$$B_\mu(k)=\begin{cases}B_\mu(k-1)-B_\mu(k-1)B_k\,,\;\mu<k\,;\\ B_\mu\,,\;\mu=k\,.\end{cases} \quad (44)$$

Таким образом, в статье осуществлен анализ качества линейной экстраполяции скалярных случайных процессов на базе аппарата канонических разложений при различном объеме известной априорной и апостериорной информации о исследуемом процессе. В частности получен вывод о том, что переход от скалярного случайного процесса со значительным последействием к векторному марковскому процессу дает квазиоптимальный результат решения задачи фильтрации-экстраполяции методом Калмана.

Литература

1. Кудрицкий В.Д. Прогнозирующий контроль радиоэлектронных устройств.- К.: Техника, 1982.-168 с.
2. Кудрицкий В.Д., Атаманюк И.П., Иващенко Е.Н. Оптимальная линейная экстраполяция реализации случайного процесса с фильтрацией погрешностей коррелированных измерений. //Кибернетика и системный анализ.- 1995.- N1.- с. 99- 107.
3. Дж. Медич. Статистически оптимальные линейные оценки и управление.- М.: Энергия, 1973.-440 с.
4. Кудрицкий В.Д., Атаманюк И.П. Алгоритм определения оптимальных параметров фильтра - экстраполятора Винера для нестационарных случайных процессов, наблюдаемых с погрешностями. //Кибернетика и системный анализ. - 1996.- N3.- с. 183-186.