

УДК 624.29

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОСЕДАНИЯ ФЭК ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЦЕНТРОБЕЖНЫХ СИЛ

Рассмотрены вопросы моделирования процесса седиментации частиц крови под действием неоднородных центробежных сил. Определены основные параметры оседания, а также показан характер движения границы плазма/эритроциты с учетом свойств крови животных

Ю.Е. Мегель

Доктор технических наук, профессор*

Контактный тел.: 717-42-63

E-mail Khstua@Lin.com

И.В. Возиян

Аспирант*

*Кафедра кибернетики

Харьковский национальный технический университет сельского

хозяйства им. П.Василенко

ул. Артема 44, г. Харьков, 61002

А.И. Рыбалка

Кандидат технических наук, доцент

Кафедра физики

Харьковский национальный университет радиоэлектроники

пр. Ленина, 14, Харьков 61166

Контактный тел.: 702-13-45

E-mail: fizika@kture.kharkov.ua

Актуальность темы

Оседание эритроцитов крови представляет собой сложный физико-химический процесс, зависящий от большого количества факторов: морфологической структуры самих эритроцитов, состава плазмы, в которой они взвешены, способности к агрегации, количества эритроцитов в исследуемом образце крови, а также геометрических размеров эритроцитарных образований.

Все эти факторы в совокупности определяют конечное значение параметра скорости оседания эритроцитов (СОЭ), характерное для того или иного животного, или птицы.

Исследование седиментации форменных элементов крови во времени довольно трудоемкий процесс, поэтому для ускорения седиментации эритроцитов и сокращения времени исследования может быть использовано поле неоднородных центробежных сил, при этом возникает необходимость осуществления предварительного расчета параметров предложенной методики и моделирование оседания под действием центробежных сил.

Анализ литературы

Не смотря на широкое применение в клинической диагностике показателя СОЭ, до сих пор не существует единой теории механизма оседания красной крови. Поэтому, разработан целый ряд моделей, позволяющих описать процесс седиментации эритроцитов.

Наиболее простая модель основана на законе Стокса для оседания частиц в вязкой среде, согласно которому, частица с плотностью превышающей плотность среды, оседает под действием силы тяжести с постоянной скоростью. При этом скорость оседания пропорциональна квадрату радиуса частицы, разнице ее плотности и плотности среды, и обратно пропорциональна вязкости среды [1-2]. Следовательно, отличия в значениях СОЭ крови можно объяснить различиями вязкости плазмы, размеров оседающих частиц и их агрегатов, а также их плотностей. Постепенное замедление скорости оседания эритроцитов, наблюдаемое при длительном проведении опыта, объясняют увеличением вязкости, и плотности суспензии в нижней части капилляра [2]. Однако реальный ход оседания границы между красной кровью и чистой плазмой не

согласуется с моделями этого типа. Оседание всегда происходит неравномерно, скачками, периоды ускорения оседания сменяются замедлением. Какой-либо однообразной последовательности в чередовании ускорения и замедления нет.

Такое поведение системы не может быть объяснено в рамках моделей оседания эритроцитов, основанных на законе Стокса.

Существует двухфазная модель седиментации эритроцитов под действием гравитационных сил [3-5]. Модель основана на моделировании динамики процессов агрегации и уплотнения, т. к. общепризнано, что ускорение оседания в начальный момент определяется процессом агрегации, а последующее замедление вызвано уплотнением эритроцитов. При построении модели кровь рассматривают как двухфазную среду (эритроциты и плазма) и исходят из общих уравнений движения сплошной среды. Модель позволяет получить график оседания границы раздела слоя плазмы и слоя эритроцитов, определить скорость этого оседания, а также вычислить момент времени, начиная с которого сказывается влияние дна трубки и скорость оседания начинает замедляться.

На базе двухфазной модели разработаны различные модифицированные модели для оседания в неоднородном вдоль оси трубки поле сил, а также под действием магнитного поля [6-8].

При рассмотрении крови как двухфазной суспензии состоящей из частиц способных образовывать агрегаты и ньютоновской несжимаемой жидкости – плазмы крови, упускается тот факт, что образование агрегатов из эритроцитов в крови может сопровождаться захватом части несущей плазмы в состав агрегата. Поэтому, в качестве модернизации двухфазной модели разработана трехфазная модель седиментации эритроцитов в поле гравитационных сил [9].

Цель работы

Разработать математическую трехфазную модель оседания эритроцитов крови под действием неоднородных центробежных сил с учетом характерных особенностей крови вида животных и птицы.

Постановка задачи исследования

Поскольку при оседании эритроцитов агрегация имеет первостепенное значение, причем образование агрегатов сопровождается захватом части плазмы в состав агрегатов, то в основу построения модели положено рассмотрение процессов агрегации, уплотнения и запираания части плазмы в состав агрегатов. При этом кровь рассматривается как среда, состоящая из несущей несжимаемой жидкости (фаза 1) и взвешенных в ней агрегатов, состоящих из твердых несжимаемых частиц (фаза 2) и запертой жидкости (фаза 3). Кровь как суспензия характеризуется числовой концентрацией эритроцитов N , объемной концентрацией N и истинной концентрацией S .

Уравнения сохранения массы, импульсов и энергии фаз, а также уравнение для полного числа агрегатов имеют вид:

$$\frac{\partial \rho^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \rho^\alpha u^\alpha}{\partial x} = \Theta^\alpha, \tag{1}$$

$$\rho^\alpha \frac{du^\alpha}{dt} = -\frac{\partial p^\alpha}{\partial x} + \rho^\alpha F_c + R^\alpha, \tag{2}$$

$$\rho^\alpha \frac{dE^\alpha}{dt} = -\frac{\partial Q^\alpha}{\partial x} + u^\alpha (\rho^\alpha F_c + R^\alpha) + W^\alpha, \tag{3}$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial Nu^\alpha}{\partial x} = G, \tag{4}$$

где ρ^α – плотности фаз;
 Θ^α – скорости массообмена между фазами ($\Theta^2 = 0$, Θ^3 – скорость запираания жидкости в агрегатах);
 u^α – скорости фаз;
 p^α – тензоры напряжений;
 R^α – объемные силы межфазового взаимодействия;
 Q^α – поток энергии в фазе α ;
 W^α – межфазовые потоки энергии;
 N – числовая концентрация агрегатов;
 G – скорость образования агрегатов.

Осаждение эритроцитов крови является длительным процессом, который не заканчивается даже по истечении суток. Поэтому процесс оседания эритроцитов был ускорен за счет использования поля центробежных сил. Следовательно, время седиментации эритроцитов сокращено от нескольких часов до нескольких минут. Будем считать, что плотность жидкости (крови) $\rho_{ж}$, находящейся в капилляре с внутренним радиусом r_0 и высотой заполнения капилляра кровью L оседает в осевом направлении со скоростью v , вращается вокруг продольной оси $x-x$ с угловой скоростью ω , равной угловой скорости вращения диска центрифуги. В этом случае на жидкость действуют силы центробежного поля, создавая в ней центробежный напор $P_{ц.н}$, величина которого определяется по формуле:

$$P_{ц.н} = \frac{\rho_f \omega^2 (r^2 - r_0^2)}{2}, \tag{5}$$

где r – текущее расстояние частицы от оси вращения диска.

Из формулы (5) видно, что по мере увеличения r величина $P_{ц.н}$ увеличивается, из-за чего на каждую частицу конечных размеров в центробежном поле действует выталкивающая сила F_v , направленная к оси вращения по радиусу. Величина выталкивающей силы для случая, когда частица имеет форму цилиндра, определяется следующим образом:

$$F_{в.ц} = S_1 p_{ц.н1} - S_2 p_{ц.н2}, \tag{6}$$

где S_1, S_2 – площади поверхностей частиц, на которые действуют осредненные давления $p_{ц.н1}$ и $p_{ц.н2}$ соответственно.

Кроме выталкивающей силы F_v , на частицу имеющую массу $m_{ц}$ действует центробежная сила, величину $F_{ц}$ можно определить по формуле:

$$F_{ц} = \frac{1}{4} \pi d_c^2 h \rho_e \omega^2 r.$$

$F_c(x)$ – результирующая сила, действующая на частицу с объемом V_e в центробежном поле:

$$F_c(x) = V_e(\rho_e - \rho_f)\omega^2 r; \tag{7}$$

ρ_e, ρ_f – плотность эритроцитов и плазмы крови соответственно;

Решая данную систему, процесс считают одномерным, выбрав ось x совпадающей с осью капилляра. Для оседания в конечной трубке высотой L , принимают за начало отсчета верхний конец столбца крови. В начальный момент времени, начальные и граничные условия имеют вид:

$$H(0,x)=H_0, c(0,x)=c_0, v(0,x)=v_0 \text{ при } 0 \leq x < L,$$

где H_0, c_0, v_0 – начальные объемные концентрации агрегатов, частиц и средний объем твердой фазы в агрегатах соответственно.

Считается, что в начальный момент времени (несколько секунд после установки капилляров в центрифугу) оседание отсутствует, следовательно, начальные скорости движения фаз принимаются равными $u^1=0, u^2=0, u^3=0$.

Система уравнений (1-4) решается методом характеристик, что позволяет получить уравнения характеристик на начальной стадии процесса оседания, а также отображают динамику движения каждой из фаз во времени под действием поля центробежных сил и имеют следующий вид:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{1,3} = \frac{(1-H)^{2+r_1} \left(\frac{C}{H}\right)^{\frac{1}{3}} v^{\frac{2}{3}} (\rho_e - \rho_f) F_c(x)}{\alpha \mu}, \tag{8}$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_2 = -\left(\frac{r_2+2}{1-H} - 1\right) \frac{(1-H)^{2+r_1} \left(\frac{C}{H}\right)^{\frac{1}{3}} v^{\frac{2}{3}} (\rho_e - \rho_f) F_c(x)}{\alpha \mu}. \tag{9}$$

Условия на характеристиках:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{Gv^2}{C},$$

$$\left[-\frac{1+(3r_1+5)H}{3(1-H)} \right] \left(\frac{dH}{dt} - \Theta \right) + \frac{H}{3C} \frac{dC}{dt} = 0, \tag{10}$$

$$\frac{dH}{dt} - \frac{H}{C} \frac{dC}{dt} = \Theta,$$

где H – средняя объемная концентрация агрегатов;

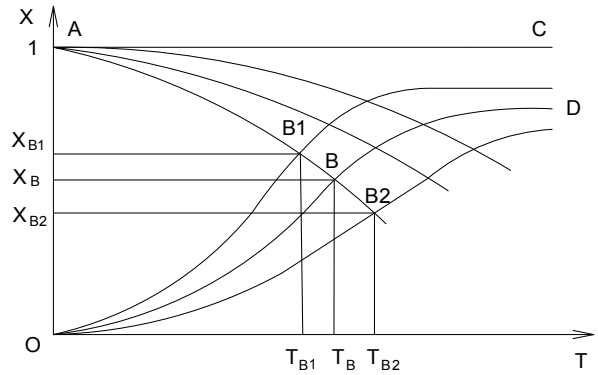
C – средняя объемная концентрация частиц;

v – средний объем твердой фазы в агрегатах;

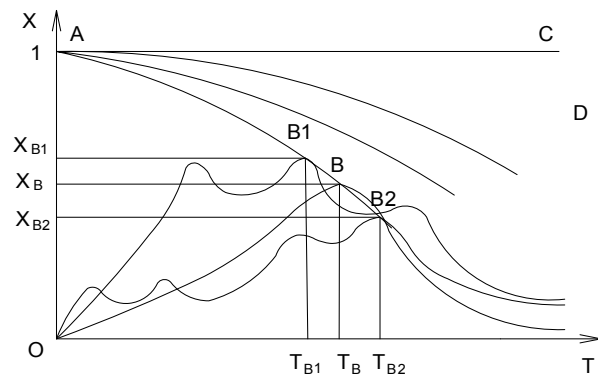
α, r_1, r_2 – постоянные положительные коэффициенты;

μ – вязкость несущей жидкости;

На основе полученных выражений осуществляется расчет основных параметров оседания, а также динамику движения каждой из фаз во времени под действием поля центробежных сил. На рисунке 1 представлены характеристики семейства (5-6), которые берут начало в точках $O(0;0)$ и $A(0;1)$, соответствующих вершине и дну капилляра.



а)



б)

Рисунок 1. Характеристики системы: а – динамика СОЭ; б – изменение скорости движения границы плазма/эритроциты

Характеристики OBD представляют собой графики движения границы раздела слоя плазмы и слоя эритроцитов, которые меняются в зависимости от начальных условий и состава исследуемого образца крови. На рисунке 1 приведены кривые OB1D и OB2D для различных скоростей центрифугирования ($\omega_1 > \omega < \omega_2$). Под действием центробежной силы $F_{ц}$ частицы преодолевают сопротивление жидкости F_c и движутся в радиальном направлении (в направлении силовой линии поля), приобретая скорость v осаждения. Вместе с тем частица перемещается с жидкостью в капилляре, в направлении ко дну капилляра, со скоростью \cdot . Скорость оседания, используя уравнения характеристик, можно определить с учетом начальных условий:

$$v = \frac{(1-H_0)^2 (\rho_e - \rho_f) F_c(x)}{\mu} (1+kH_0 t)^{\frac{2}{3}}. \tag{11}$$

Момент достижения максимума оседания, т. е. момент времени, начиная с которого сказывается наличие дна у капилляра и скорость начинает уменьшаться определяется согласно:

$$T_B = \frac{1}{kH_0} \left(\left(\frac{\mu}{2kH_0(1-H_0)(\rho_e - \rho_f)F_c(x)} + 1 \right)^{\frac{3}{5}} - 1 \right). \tag{12}$$

То. в качестве диагностического показателя помимо стандартного значения СОЭ, может быть использован момент достижения максимальной скорости осе-

дания. Поскольку, экспериментальные исследования подтвердили, что при наличии патологических изменений в организме животного происходит изменение и в значении ТВ.

Выводы

В статье предложена трехфазная математическая модель позволяющая дополнительно учесть процесс загираания части плазмы крови в состав агрегатов при их образовании. Моделирование седиментации частиц крови осуществляется под действием поля неоднородных центробежных сил. Модель состоит из системы квазилинейных дифференциальных уравнений, решение которых методом характеристик позволяет получить характер динамики движения границы раздела слоя оседающих эритроцитов и слоя плазмы. Введение операции дополнительного дифференцирования позволяет получить кривую изменения скорости движения границы раздела фаз, которая имеет немонотонный характер и представляет собой многочисленные колебания скорости. На основе уравнений характеристик получены выражения для скорости седиментации эритроцитов, а также определен момент достижения максимума оседания.

Литература

1. Воейков В.Л. Физико-химические и физиологические аспекты реакции оседания эритроцитов. // Успехи физиологических наук. – 1998. – т. 29. №4. –с. 55-73.

2. Возиян И.В., Дацок О.М. Анализ моделей седиментации эритроцитов. // Вестник НТУ ХПИ. – 2005. – Вып. 23. – с. 162-169.
3. Лосев Е.С. К гидродинамической теории оседания эритроцитов. // Механика композитных материалов. – 1980. – №1. – с. 136-141.
4. Регирер С.А. К вопросу о континуальных моделях суспензий. – Прикл.математика и механика. – 1978. – т.42, №4. – с.379-388.
5. Кизилова Н.Н., Черевко В.А. Моделирование агрегации и оседания частиц суспензий в трубках в поле гравитационных и центробежных сил. //Материалы XV Международ. конф. по механике и современным прикладным программным системам. – М.: Вузовская книга. - 2007. – С.264-265.
6. Дацок О.М., Жолонский Е.Н., Кизилова Н.Н. Двухфазная модель оседания эритроцитов в неоднородном поле сил.// Вестник ХГПУ. – 2002. - №135. – с. 36-45.
7. Кизилова Н.Н. Влияние некоторых физических полей на механические процессы в биологических тканях: Автореф. Дисс.канд. физ.-мат.наук: 01.02.05/Харьк. Гос.ун-т. – Харьков, 1993. – 18с.
8. Котельников А.А., Аристов А.А., Трифонова А.А. Моделирование процесса оседания эритроцитов в капельной пробе // Современные техника и технологии: Труды XII Международной научно-практической конференции студентов и молодых ученых. – 27-31 марта 2006. – Томск: Изд. ТПУ. – 2006 – Т. 1. – с. 324-326.
9. Лосев Е.С. Моделирование оседания агрегирующих частиц //Изв. АН СССР. МЖГ. – 1983. – №3. – с.71-78.