Показано, що коректна інтерпретація стандартизованих багатофакторних моделей вимагає розрахунку поправки до рівняння регресії і залежить від статистичних характеристик вихідних даних. Виявлено форми поправки і проведена оцінка їх точності

Ключові слова: модель, стандартизація, лінеаризація

Показано, что корректная интерпретация стандартизованных многофакторных моделей требует расчета поправки к уравнению регрессии и зависит от статистических характеристик исходных данных. Выявлены формы поправки и произведена оценка их точности

Ключевые слова: модель, стандартизация, линеаризация

It is shown that the correct interpretation of standardized multi-factor models requires the calculation of corrections to the regression equations and depends on the statistical characteristics of input data The forms of the corrections are got and accuracy of them is evaluated

Key words: model, standardization, linearization

УДК 539.3:519.876.5

ОСОБЕННОСТИ АНАЛИЗА СТРУКТУРЫ И ИНТЕРПРЕТАЦИИ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ

А.М. Мильцын
Кандидат технических наук, профессор
Начальник отдела
ТД Днепропетровского завода сварочных материалов
ул. Мониторная, 2а, г. Днепропетровск, 49130
Контактный тел.: (056) 780-22-08
E-mail: miltsin@bk.ru

Д.Г. Зеленцов
Доктор технических наук, старший научный сотрудник, профессор, заведующий кафедрой*
Контактный тел.: (0562) 47-24-64
E-mail: dmyt_zel@mail.ru

В.И. Олевский
Кандидат технических наук, доцент*
Контактный тел.: (056) 780-22-07
E-mail: volevnew@gmail.com
*Кафедра компьютерных технологий и высшей математики
Украинский государственный химико-технологический университет
пр. Гагарина, 8, г. Днепропетровск, 49000

1. Введение

При решении современных задач автоматизации и управления промышленными процессами перспективным является использование нелинейных математических моделей, полученных на основе многофакторного структурно-экстраполяционного анализа (МСЭА) [1]. В МСЭА, как и в многофакторном анализе в целом, наиболее часто используются нелинейные полиномиальные модели вида

$$y=\beta_0+\sum_{i=1}^{N}\beta_i x_i+\sum_{i,j=1}^{N}\beta_{ij}x_i x_j \ . \tag{1}$$

Таким образом задача описания реальных данных или построение математической модели сводится к оценке коэффициентов $\{\beta\}$ с помощью выборочных оценок $\{b\}$, полученных, например, методом наименьших квадратов. При этом математическая модель $\hat{y}$ также имеет вид полинома второй степени

$$\hat{y}=b_0+\sum_{i=1}^{N}b_i x_i+\sum_{i,j=1}^{N}b_{ij}x_i x_j \ . \tag{2}$$

Как правило, математические модели содержат переменные, имеющие различную физическую природу и существенно отличающиеся области изменения. Такая неоднородность затрудняет процесс построения модели и снижает точность определения её коэффициентов, но легко устраняется путем центрирования и приведения переменных к безразмерной форме, т.е. нормированием или стандартизацией, приводящих их к единому масштабу. Один из возможных вариантов, удобных для обработки линейными алгоритмами, реализуется, например, в [2]. При этом стандартизация линеаризованных переменных нарушает соответствие их произведению исходных данных вследствие того, что для этой операции не выполняется сочетательное свойство для умножения, т.е. $(x_i x_j)^0 \neq x_i^0 x_j^0$ при $i \neq j$, где $(.)^0$ - операция стандартизации.

Между тем ряд авторов, например [2,3], указывают на то, что полученная методом наименьших квадратов регрессионная зависимость для линеаризованных переменных не всегда дает наилучший результат. Такие выводы являются следствием неправильной интерпретации стандартизованного уравнения и приводят к неадекватному описанию экспериментальных данных.

Настоящая работа ставит своей целью показать необходимость введения поправки стандартизованной модели и разработку методики её корректной интерпретации.

2. Методика анализа структуры нелинейной полиномиальной модели

Рассмотрим последовательно алгоритм обработки данных [1]. Прежде всего, вводятся линеаризованные переменные z_i

$$z_1 = x_1, \ldots, z_N = x_N, \quad z_{N+1} = x_1 x_2, \ldots, z_l = x_N^2, N < l \leq C_{N+2}^2 - 1.$$

Затем находят средние значения $\overline{z}_i, \overline{y},$, параметры рассеивания S_i, S_y, и интервалы изменения Y_i, Y_y, новых переменных и функции отклика в M опытах:

$$\overline{z}_i = \frac{1}{M}\sum_{u=1}^{M} z_{iu}, S_i = \sqrt{\frac{1}{M-1}\sum_{u=1}^{M}(z_{iu} - \overline{z}_i)^2},$$

$$Y_i = \max_{u,v=1,M}\left(z_{iu} - z_{iv}\right),$$

$$\overline{y} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} y_i, S_y = \sqrt{\frac{1}{M-1}\sum_{i=1}^{M}(y_i - \overline{y})^2}, \quad Y_y = \max_{u,v=1,M}\left(y_u - y_v\right).$$

Собственно стандартизация или нормирование переменных производится по формулам

$$z_{iu}^0 = \frac{1}{J_i}\left(z_{iu} - \overline{z}_i\right), y_u^0 = \frac{1}{J_y}\left(y_u - b_0 - \sum_{i=1}^{N} b_i \overline{x}_i - \sum_{j,i=1}^{N} b_{ij}\overline{\left(x_i x_j\right)}\right),$$

где z_{iu}^0, y_u^0 стандартизованные (нормированные) значения переменных и функции отклика, J_i, J_y - параметры рассеивания (интервалы варьирования) соответственно.

При этом величина коэффициентов b_i^0 уравнения (2) изменяется следующим образом:

$$b_0^0 = 0, b_i^0 = b_i^* J_i / J_y,$$

$$b_0^* = b_0, \ldots, b_N^* = b_N, b_{N+1}^* = b_{12}, \ldots, b_l^* = b_{NN}. \tag{3}$$

Учитывая полную аналогию между стандартизацией и нормированием, в дальнейшем будем проводить исследование только для стандартизации. Запишем уравнение (2) в стандартизованном виде:

$$y^0 = \sum_{i=1}^{l} b_i^0 z_i^0. \tag{4}$$

Поскольку $z_m = x_i x_j$ при $m > N$ и $S_{ij} = S_m = \sqrt{\overline{x}_i^2 S_j^2 + \overline{x}_j^2 S_i^2 + 2x_i x_j \operatorname{cov}(x_i x_j)}$, то можно получить следующую эквивалентную (3) запись:

$$\frac{y - \overline{y}}{S_y} = \sum_{i=1}^{N} b_i \frac{S_i}{S_y}\left(\frac{x_i - \overline{x}_i}{S_i}\right) + \sum_{i,j=1}^{N} b_{ij}\frac{S_{ij}}{S_y}\left(\frac{x_i x_j - \overline{x_i x_j}}{S_{ij}}\right). \tag{5}$$

Непосредственное исследование уравнений (4) и (5) затруднено тем, что при $m > N$ переменные $z_m^0 = \left(x_i x_j - \overline{x_i x_j}\right) / \sqrt{\overline{x}_i^2 S_j^2 + \overline{x}_j^2 S_i^2 + 2x_i x_j \operatorname{cov}(x_i x_j)}$ являются многочленами второй степени от $z_i^0 = \left(x_i - \overline{x}_i\right) S_i^{-1}$. Представим z_m^0 в виде $z_m^0 = z_i^0 z_j^0 + \varepsilon_{ij}(z_i^0, z_j^0)$. Величину ε_{ij}, являющуюся полиномом второй степени, назовем поправкой к стандартизации нелинейных членов. Рассмотрим два подхода к вопросу интерпретации стандартизованного уравнения (4): наиболее простой и наиболее точный.

В первом случае, как наиболее простом, $\left|\varepsilon_{ij}\right| \quad \left|z_i^0 z_j^0\right|$ для всех $\left\{z_i^0, z_j^0\right\} \subset (T)$, где (T)- область определения y_0. Положим $z_m^0 \approx z_i^0 z_j^0$, вернемся к исходным переменным и оценим суммарную поправку η в виде полинома второй степени по всем стандартизованным переменным, возникающую при замене z_m^0 на $z_i^0 z_j^0$ по формуле $\eta = \sum_{i,j=1}^{N} b_m^0 \varepsilon_{ij}(z_i^0, z_i^0)$. Введем обозначения $S_i S_j = C_{ij}$, из (5) получим

$$\varepsilon_{ij} = \left(\frac{x_i - \overline{x}_i}{S_i}\right)\left(\frac{x_j - \overline{x}_j}{S_j}\right)\frac{C_{ij} - S_{ij}}{C_{ij} S_{ij}} + \overline{x}_i \frac{S_j}{S_{ij}}\left(\frac{x_j - \overline{x}_j}{S_j}\right) + \tag{6}$$

$$+ \overline{x}_j \frac{S_i}{S_{ij}}\left(\frac{x_i - \overline{x}_i}{S_i}\right) + \frac{\operatorname{cov}\left(x_i x_j\right)}{S_{ij}}, i, j = \overline{1, N},$$

$$\eta = \sum_{i,j=1}^{N} b_{ij}\frac{S_{ij}}{S_y}\left[\frac{C_{ij} - S_{ij}}{S_{ij}} z_i^0 z_j^0 + \overline{x}_i \frac{S_j}{S_{ij}} z_j^0 + \overline{x}_j \frac{S_i}{S_{ij}} z_i^0 + \frac{\operatorname{cov}\left(x_i x_j\right)}{S_{ij}}\right]. \tag{7}$$

Отсюда видно, что поправка подстановки $z_m^0 = z_i^0 z_j^0$ существенным образом зависит от характера переменных и области их изменения, т.е.

$$\eta = \eta\left[\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_N}, S_1, \ldots, S_N, \operatorname{cov}\left(x_1 x_2\right), \ldots, \operatorname{cov}\left(x_N x_N\right)\right]. \tag{8}$$

В связи с этим для каждой конкретной модели коэффициенты η будут иметь различные значения. Причем для случая $\left|\varepsilon_{ij}\right| \quad \left|z_i^0 z_j^0\right|$ и абсолютное значение $|\eta|$ также достаточно мало при любых допустимых значениях стандартизованных переменных, и уравнения (4)-(5) можно считать эквивалентными уравнению

$$y^0 = \sum_{i=1}^{N} b_i^0 z_i^0 + \sum_{k=N+1}^{l} b_k^0 z_i^0 z_j^0, \quad k \leftrightarrow (i, j). \tag{9}$$

Во втором случае, как наиболее точном, при исследовании (4)-(5) в предположении эквивалентности (9) необходимо учитывать поправку η, если $\left|\varepsilon_{ij}\right| \sim \left|z_i^0 z_j^0\right|$ для любых $\left\{z_i^0, z_j^0\right\} \subset (T)$.

Отметим, что при $l<2N$ количество параметров в (8) можно уменьшить, если перейти к параметрам $\overline{x}_i / S_i = \overline{\overline{x}}_i, S_{ij}, \rho_{ij}, i, j = \overline{1, N}, :$

$$\eta = \sum_{i,j=1}^{N} b_{ij} S_{ij} S_y^{-1}\left[\left(\overline{\overline{x}}_i^2 + \overline{\overline{x}}_j^2 + 2\rho_{ij}\overline{\overline{x}}_i \overline{\overline{x}}_j\right)^{-\frac{1}{2}} - 1\right] z_i^0 z_j^0 +$$

$$+z_i^0\left(1+\left(\bar{\bar{x}}_i/\bar{\bar{x}}_j\right)^2+2\rho_{ij}\left(\bar{\bar{x}}_i/\bar{\bar{x}}_j\right)\right)^{-\frac{1}{2}}+z_j^0\times$$

$$\times\left(1+\left(\bar{\bar{x}}_j/\bar{\bar{x}}_i\right)^2+2\rho_{ij}\left(\bar{\bar{x}}_j/\bar{\bar{x}}_i\right)\right)^{-\frac{1}{2}}+\rho_{ij}\left(\overline{\overline{x_i}}^2+\overline{\overline{x_j}}^2+2\rho_{ij}\overline{\overline{x_i}}\,\overline{\overline{x_j}}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

где ρ_{ij} - коэффициент корреляции i-го и j-го факторов.

При выводе предыдущих формул было показано, что y_0 может быть представлено в виде полинома второй степени (с учетом мультииндекса $m\leftrightarrow(i,j)$):

$$y^0=\sum_{i=1}^{N}\left[b_i^0+\sum_{j=1}^{N}b_m^0\frac{S_i\overline{x_i}}{S_{ij}}\right]z_i^0+\sum_{i,j=1}^{N}b_m^0\frac{C_{ij}}{S_{ij}}z_i^0z_j^0+\sum_{i,j=1}^{N}b_m^0\frac{C_{ij}}{S_{ij}}\rho_{ij}.$$

Рассмотрим случай, когда η - линейная функция.

Тогда $a_{ij}=b_{ij}C_{ij}/S_y$ и

$$\eta=\sum_{i,j=1}^{N}\left(\frac{b_{ij}\overline{x_i}S_i}{S_y}\left(\frac{x_j-\overline{x_j}}{S_j}\right)+\frac{b_{ij}\overline{x_j}S_j}{S_y}\left(\frac{x_i-\overline{x_i}}{S_i}\right)+\frac{b_{ij}C_{ij}\rho_{ij}}{S_y}\right).$$

или для стандартизованных переменных

$$\eta=\sum_{i,j=1}^{N}b_m^0\left[\frac{\overline{x_i}S_j}{S_{ij}}z_j^0+\frac{\overline{x_j}S_i}{S_{ij}}z_i^0+\frac{C_{ij}\rho_{ij}}{S_{ij}}\right].$$

Видно, что абсолютная величина суммарной поправки тем меньше, чем меньше абсолютные значения средних величин исходных факторов.

Поэтому такая интерпретация хорошо применима в случае, если значения параметров изменяются в окрестности нуля. В этом случае изменению подлежат только коэффициенты при нелинейных членах.

3. Применение методики расчета

Приведенная методика была применена к исследованию математической модели влияния семи вторичных факторов на параметр устойчивости продольно сжатой цилиндрической оболочки [4]. Модель получена при обработке результатов многофакторного эксперимента с тонкостенными оболочками диаметром 0,143 м, толщиной стенки $2{,}5\text{x}10^{-4}$ м и длиной 0,2 м, изготовленными из стали марки Х18Н9-н. Статистические характеристики факторов приведены в таблице.

Эксперимент проводился в соответствии с ядром плана 27-2, являющегося четверть – репликой полного факторного эксперимента 27. Для определения коэффициентов при нелинейных членах план эксперимента был дополнен до плана второго порядка при общем числе опытов М = 47. Таким образом, был получен квазиортогональный центральный композиционный план при варьировании семи факторов на пяти уровнях. В дальнейшем ансамбль факторов был дополнен данными наблюдений за восьмым фактором, параметры которого также представлены в таблице.

Таблица 1

Описание переменных	Условные обозначения	Единица измерения	Среднее значение	Параметр рассеивания
Глубина инициирующей лунки	w	м	$9{,}1\text{x}10^{-4}$	$3{,}830\text{x}10^{-4}$
Продольная длина инициирующей лунки	l_L	м	$3{,}3\text{x}10^{-2}$	$9{,}309\text{x}10^{-3}$
Поперечная ширина инициирующей лунки	l_φ	м	$2{,}6\text{x}10^{-2}$	$6{,}903\text{x}10^{-3}$
Конусность	α	градусы	94	4,5
Овальность	$\frac{a}{b}$	-	0,9	0,039
Амплитуда неплоскостности торца	A_T	м	$1{,}5\text{x}10^{-4}$	$4{,}800\text{x}10^{-5}$
Число волн неплоскостности торца	n_T	-	12	5
Разнотолщинность	$\delta_{max}-\delta_{min}$	м	$3{,}2\text{x}10^{-6}$	$1{,}500\text{x}10^{-6}$

Полученная стандартизованная модель имеет вид

$$\Delta T^0=-1{,}11(A_T^2)^0-0{,}52((\delta_{max}-\delta_{min})^2)^0-1{,}52(n_T^2)^0-$$

$$-1{,}58((\delta_{max}-\delta_{min})\alpha)^0+4{,}01\left(\frac{a}{b}\alpha\right)^0-4{,}06(\alpha l_L)^0-$$

$$-1{,}48((\delta_{max}-\delta_{min})A_T)^0+3{,}04(\frac{a}{b}A_T)^0-0{,}74(l_LA_T)^0-$$

$$-1{,}24(A_Tn_T)^0+1{,}08(wl_\varphi)^0-0{,}44(n_Tl_\varphi)^0-$$

$$-6{,}56(\frac{a}{b}(\delta_{max}-\delta_{min}))^0-$$

$$-24{,}44(w\frac{a}{b})^0+0{,}68(n_T(\delta_{max}-\delta_{min}))^0+0{,}6(n_Tl_L)^0+$$

$$+9{,}64(\delta_{max}-\delta_{min})^0+2{,}06\left(\frac{a}{b}\right)^0+23{,}4w^0+1{,}98l_L^0+1{,}32n_T^0.$$

Новое стандартизованное уравнение с учетом (14) и наиболее точной поправки η имеет вид

$$\Delta T^0=-0{,}187(A_T^0)^2-0{,}239(n_T^0)^2-0{,}408(\delta_{max}-\delta_{min})^0\alpha^0+$$

$$+0{,}174\left(\frac{a}{b}\right)^0\alpha^0-0{,}974\alpha^0l_L^0-0{,}375(\delta_{max}-\delta_{min})^0A_T^0+$$

$$+0{,}135\left(\frac{a}{b}\right)^0A_T^0-0{,}159l_L^0A_T^0-0{,}28A_T^0n_T^0+0{,}242w^0l_\varphi^0-$$

$$-0{,}086n_T^0l_\varphi^0-0{,}25\left(\frac{a}{b}\right)^0(\delta_{max}-\delta_{min})^0+0{,}149n_T^0(\delta_{max}-\delta_{min})^0-$$

$$-1{,}066w^0\left(\frac{a}{b}\right)^0+0{,}124n_T^0l_T^0+0{,}194(\delta_{max}-\delta_{min})^0-$$

$$-0{,}186\left(\frac{a}{b}\right)^0+0{,}015w^0-0{,}162l_L^0-0{,}572n_T^0-0{,}378.$$

Отказ от использования поправки приводит к неправильной интерпретации степени влияния факторов и структуры модели. Использование линейной поправки в данном случае приводит к неадекватности стандартизованной модели экспериментальным данным.

4. Выводы

Приведена методика, позволяющая получить поправку к линеаризованному уравнению регрессии, которая дает возможность произвести корректный анализ и интерпретацию стандартизованной модели. Проанализированы возможные формы поправки и оценена их точность и условия применения. Произведен расчет конкретной технической задачи и показана эффективность предлагаемой методики.

Анализ описанных свойств полиномиальных моделей второго порядка в стандартизованном виде показывает, что их интерпретация должна сопровождаться пересчетом коэффициентов по приведенной методике с учетом статистических характеристик экспериментальных данных.

Литература

1. Пилов П.И., Мильцын А.М., Олевский В.И. Многофакторный структурно-экстраполяционный анализ в задачах управления эффективностью обогатительных процессов// Збагачення корисних копалин: Наук.-техн. зб. – 2009. – Вип. 36(77)-37(78). – С. 204 – 217.
2. Филаретов Г.Ф. К вопросу построения нелинейной регрессионной модели по данным пассивного эксперимента / Проблемы планирования эксперимента. – М.: Наука, 1969. –С. 5-10.
3. Айвазян С.А. Статистические исследования зависимостей. М.: Металлургия, 1968, 200 с.
4. Мильцын А.М. Нелинейное взаимодействие технологических несовершенств и их влияние на устойчивость тонкостенных оболочек (многофакторный подход), Ч. II / Механика твердого тела. – 1993. – Вып. 1. – С. 178 - 184.

УДК 656.073.3:656.86

МОДЕЛЬ СИСТЕМИ ДОСТАВКИ МОЛОЧНОЇ ПРОДУКЦІЇ У МІЖМІСЬКОМУ СПОЛУЧЕННІ

В.М. Нефьодов
Кандидат технічних наук, доцент
Кафедра транспортних технологій
Харківський національний автомобільно-дорожній університет
вул. Петровського, 25, м. Харків, Україна, 61002
Контактний тел.: (057) 707-37-20
E-mail: ds@khadi.kharkov.ua

Розглядається питання побудови математичної моделі системи доставки молочної продукції в міжміському повідомленні. Як цільова функція використовується собівартість доставки однієї тонни вантажів

Ключові слова: собівартість доставки, міжміськи перевезення

Рассматривается вопрос построения математической модели системы доставки молочной продукции в междугороднем сообщении. Как целевая функция используется себестоимость доставки одной тонны грузов

Ключевые слова: себестоимость доставки, междугородние перевозки

Article is devoted to mathematical model building of milk delivery system in intertown transportations. The paper argues that the prime cost of one ton of lot cargo is an optimum criterion

Key words: prime cost, intertown transportations

1. Вступ

Одним з найважливіших аспектів соціально-економічної політики держави є створення умов для своєчасного задоволення потреб населення в якісних продовольчих продуктах. Забезпечення людей продуктами харчування в необхідному об'ємі і з належною якістю є комплексною і досить складною завдачею, що включає різні аспекти діяльності органів влади, бізнесу і громадян. Одними з основних напрямів вказаної