

УДК 526.34

S-ФУНКЦИИ В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ И УПРАВЛЕНИИ ОБРАЗОВАНИЯ ФОРМ

А. П. Слесаренко

Доктор физико-математических наук,
профессор, ведущий научный сотрудник, лауреат
Государственной премии Украины
Отдел моделирования и идентификации тепловых
процессов
Институт проблем машиностроения
А.М. Подгорного НАН Украины
ул. Дм. Пожарского, 2/10, г. Харьков, Украина,
61046
Контактный тел.: (057) 3-49-51, 096-386-30-22

Пропонується система S-функцій, що дозволяє вперше у світовій науковій практиці описувати фізично реальні межі і поверхні областей будь-якої заданої форми в асимптотичному наближенні заданим ступенем точності з безперервно-диференційованими функціями

Ключові слова: S-функції, асимптотичне наближення, математичне моделювання

Предлагается система S-функций, позволяющая впервые в мировой научной практике описывать реальные границы и поверхности областей любой заданной формы в асимптотическом приближении заданной степени точности с непрерывно-дифференцируемыми функциями

Ключевые слова: S-функции, асимптотическое приближение, математическое моделирование

Sufficiently complete system of S-functions is offered, it's allows for the first time in world science practice to describe the real physical boundaries and the surface area of any given shape in the asymptotic approximation to any desired accuracy grade with continuously differentiable functions of

Keywords: S-functions, asymptotic approximation, mathematical modeling

1. Постановка проблемы

Исследования, о которых идет речь в статье, относятся к области математического моделирования и управления образования сложных поверхностей и форм.

При решении краевых задач для уравнений с частными производными приближенными аналитическими методами появляется необходимость в построении уравнений $\omega_i = 0$ границ и участков границ областей сложной формы, в которых ищется решение.

В условиях физического реального мира нет математически острых углов (в двумерных физических моделях) и математически острых ребер (в трехмерных физических моделях).

В многочисленных работах по решению краевых задач методом R-функций выражение «математическое моделирование физических полей методом R-функций» неверно. Так как нельзя математическим инструментарием, не выходящим за рамки аналитической геометрии, находить решения дифференциальных уравнений.

R-функция для кругового кольца является функцией от одной координаты ρ . Физические процессы в области в виде кругового кольца зависят от двух координат – ρ и ϕ , и математически моделировать их R-функцией уравнением кольца от одной переменной неправильно.

В ВУЗах, в курсе высшей математики:

$$\int_0^1 x^{-3/2} dx = \frac{-2}{\sqrt{x}} \Big|_0^1 = -2 + \frac{2}{\sqrt{0}} \Rightarrow \infty.$$

Если отступим от нижнего предела интеграла на ϵ , то получим $\int_{\epsilon}^1 x^{-3/2} dx = \frac{-2}{\sqrt{x}} \Big|_{\epsilon}^1 = -2 + \frac{2}{\sqrt{\epsilon}} \neq \infty$. Вот такого рода «подмена» происходит при вычислении двойных интегралов в методах Ритца, Галеркина и наименьших квадратов при применении метода R-функций [1-4] к решению краевых задач. Метод R-функций делает структуры решения краевых задач нефизичными при описании физических процессов в окрестностях математически острых углов и ребер.

Рассмотрим вопрос о построении консервативных приближенных аналитических структур решения краевых задач. Структура решения должна адекватно исследуемому физическому процессу описывать особенности этого процесса как внутри области решения задачи, так и в окрестностях углов и ребер.

Проанализируем этот вопрос на примере решения краевой задачи (1) – (2)

$$\Delta T = -F, (x,y) \in \Omega \tag{1}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \mu} + hT \right) \Big|_{\Gamma} = hT_{cp} \tag{2}$$

где $T = T(x, y)$; $F = F(x, y)$; μ – направление внешней нормали к границе области Ω ; $h = \alpha \cdot \lambda^{-1}$; α - коэффициент теплообмена, λ – коэффициент теплопроводности, T_{cp} – температура окружающей среды, F – функция характеризующая распределение источников и стоков внутри области Ω .

Согласно [1-4] приближенная аналитическая структура решения данной краевой задачи, точно удовлетворяющая граничным условиям, имеет вид:

$$T_{np} = \omega \cdot h \cdot T_{cp} + \Phi - \omega \cdot D_1 \Phi + \omega \cdot h \cdot \Phi \quad (3)$$

где, согласно [1-4]

$$\omega(x, y)|_{\Gamma} = 0;$$

$$\omega(x, y) > 0; (x, y) \in \Omega;$$

$$\left(\frac{\partial \omega(x, y)}{\partial \mu} \right)_{\Gamma} = 1;$$

$$D_1 \Phi = \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y};$$

$$D_1 \Phi|_{\Gamma} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mu} \right)_{\Gamma};$$

$$\Phi = \sum_{ij} C_{ij} P_i(x) P_j(y);$$

C_{ij} - неопределенные коэффициенты;

$P_i(x), P_j(y)$ - полиномы Чебышева, или др.

Допустим, что Φ – точное решение задачи (1) – (2), тогда (4):

$$\Delta(T_{np} - \Phi_T) = h \cdot T_{cp} \cdot \Delta \omega - \Delta(\omega \cdot D_1 \Phi_T) + h \cdot (\Delta[\omega \cdot \Phi_T]) \quad (4)$$

Известно, что при

$$h \Rightarrow \infty \quad T_{нов} \Rightarrow T_{cp},$$

но тогда

$$\Delta(T_{np} - \Phi_T) \Rightarrow \infty.$$

Значит, структура (3), построенная в работах [1-4], неконсервативна.

Если построим структуру решения данной задачи в виде:

$$T_{np} = \omega \cdot h \cdot T_{cp} + \Phi - \omega \cdot (D_1 \Phi)|_{\Gamma} + \omega \cdot h \cdot (\Phi)|_{\Gamma}, \text{ то}$$

$$\Delta(T_{np} - \Phi_T) = \Delta \omega \cdot \left[h \cdot T_{cp} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mu} \right)_{\Gamma} \right] + h \cdot \Phi_T|_{\Gamma} = 0 \quad (5)$$

$$\text{Так как } \left(\frac{\partial \Phi_T}{\partial \mu} + h \Phi_T \right)_{\Gamma} = h T_{cp}.$$

Следовательно, вторая построенная в данной статье структура решения задачи (1)-(2) консервативна.

В работах [1-4] производные от функции $\omega(x, y)$ имеют в угловых точках «сингулярные» особенности, т.е. принимают бесконечные значения, что делает структуры решения, точно удовлетворяющие всем

граничным условиям, исключая граничные условия первого рода, тоже неконсервативными. В этих точках значение функций, определяемые структурами решений, представленными в [1-4] принимают значения, равные бесконечности.

S-функции позволяют убрать эти «нефизичности» в структурах решения и сделать физическим поведение структур решения краевых задач в окрестностях угловых точек и ребер.

2. Анализ исследований и публикаций

В работе [5] приводятся задачи, для которых точные решения «нефизичны» в окрестности угловых точек и острых кромок торцов магнитов. Чтобы избежать «нефизичности» математического моделирования физических процессов в этих и других случаях, необходимо разработать новую методологию построения уравнений границ областей и их регионов сложной формы таким образом, чтобы получать скругленные углы и грани в асимптотическом приближении по отношению к соответствующим математически острым углам и граням. Это означает, что разработанная новая методология должна позволять строить функции $\omega_i = 0$, чтобы они не только в асимптотическом приближении с любой наперед заданной степенью точности описывали поверхности областей, но и были непрерывными и имели управляемые непрерывные производные до $2k-1$ порядка.

Первые результаты в этом направлении представлены в работе [5]. Однако управление частными производными от функции ω_i кроме первой производной в общем случае еще не решено.

В настоящей работе предлагаются S-функции (6):

$$\bar{f} = -f;$$

$$f_1 \wedge f_2 = f_1 + f_2 - 2\sqrt{f_1^{2k} + f_2^{2k}} + \beta_1 \cdot \exp[-\beta_2 \cdot (f_1^{2k} + f_2^{2k})]; \quad (6)$$

$$f_1 \vee f_2 = f_1 + f_2 + 2\sqrt{f_1^{2k} + f_2^{2k}} + \beta_1 \cdot \exp[-\beta_2 \cdot (f_1^{2k} + f_2^{2k})].$$

сохраняющие частные производные «опорных функций» f_1 и f_2 до $2k-1$ порядка и позволяющие описывать физически реальные границы или поверхности областей любой заданной формы в асимптотическом приближении с любой наперед заданной степенью точности.

3. Цель работы

Построение полной системы S-функций, позволяющих с помощью методов алгебры-логики строить функции $\omega_i(x, y)$, сохраняющие дифференциальные свойства входящих в нее «опорных» функции до $2k-1$ порядка и обладающих такими свойствами, что уравнения $\omega_i(x, y) = 0$ описывают в асимптотическом приближении с заданной наперед точностью границы и поверхности областей любой заданной сложной формы.

Применение S-функций в структурах решения задач теплопроводности, точно удовлетворяющих нестационарным граничным условиям, позволяет строить

непрерывные базисные функции, имеющие непрерывные производные до $2k-1$ порядка.

4. Основные материалы исследования

Теорема 1. Если S-функция $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$, представляющая собой суперпозицию S-функций $\bar{x}, x \wedge_S u, x \vee_S u$ имеет единственное вхождение аргумента x_1 с инверсной степенью m , то, каково бы не было поле направлений l , во всех точках (M_j) , где непрерывно дифференцируемые функции $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ удовлетворяют условиям $\phi_1(M_j)=0; \phi_i(M_j) \neq 0; (i=2,3,\dots,n; j=1,2,\dots)$, а функция $f(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)=0$, имеют место равенства: $\frac{\partial}{\partial l} f(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n) \Big|_{M_j} = (-1)^m \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial l} \Big|_{M_j}$.

Теорема 2. Система (6) является достаточно полной системой S-функций.

Доказательство. Известно [6], что двумерное пространство xOy с метрикой

$$\rho[M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)] = \left[(x_1 - x_2)^{2k} + (y_1 - y_2)^{2k} \right]^{\frac{1}{2k}}; \quad (7)$$

$2 \cdot k > 1$

является метрическим.

Пусть $M(x, 0), N(0, y)$ и $O(0, 0)$ – точки этого пространства. Если $x > 0$ и $y > 0$, то $x \wedge_S y = \rho(M, O) + \rho(N, O) - \rho(M, N) > 0$.

Если $x > 0$ и $y < 0$, то $x \wedge_S y = \rho(M, O) - \rho(N, O) - \rho(M, N) < 0$. Аналогично устанавливаем, что $x \wedge_S y < 0$, если $x < 0, y > 0$ и $x < 0, y < 0$, а также, что $x \vee_S y < 0$, тогда и только тогда, когда $x < 0$ и $y < 0$. Таким образом, функции $x \wedge_S u$ и $x \vee_S u$ являются S-конъюнкцией и S-дизъюнкцией соответственно.

Так как система булевых функций $X \wedge Y, X \vee Y$ и \bar{X} , сопровождающих систему (6), является полной, то система (6) является достаточно полной.

Теорема 3. Если S-функция $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$, представляет собой суперпозицию S-функций $\bar{x}, x \wedge_S u, x \vee_S u$ и удовлетворяет всем остальным условиям теоремы 1, то, каковы бы не были направления l_1, l_2, \dots, l_β ($\beta < 2k$), имеют место равенства:

$$\frac{\partial^\beta f_1[\phi_1(M_1), \phi_2(M_2), \dots, \phi_n(M_n)]}{\partial l_1 \partial l_2 \dots \partial l_\beta} = (-1)^m \frac{\partial^\beta f_1[\phi_1(M_j)]}{\partial l_1 \partial l_2 \dots \partial l_\beta} \quad (8)$$

Доказательство. Применяя правило де Моргана

$$\overline{x \wedge_S y} = \bar{x} \vee_S \bar{y}; \quad \overline{x \vee_S y} = \bar{x} \wedge_S \bar{y}$$

и учитывая, что переменная x_1 по условию теоремы имеет единственное вхождение в S-функцию $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$, можем последнюю переписать в виде:

$$[\psi_1 * (-1)^m x_1] * \psi_2,$$

где m – инверсная степень аргумента x_1 , ψ_1 и ψ_2 – некоторые S-функции, не зависящие от x_1 , а $*$ – символ, обозначающий \wedge_S или \vee_S .

Так как суперпозиция функций $\bar{x}, x \wedge_S u, x \vee_S u$ может равняться нулю лишь тогда, когда по крайней мере один из аргументов равен нулю, то из условия $\phi_1(M_j)=0$; и $\phi_i(M_j) \neq 0, (i=2, \dots, n; j=1,2, \dots)$ следует, что $\psi_{ij} = \psi_i \cdot [\phi_2(M_j), \phi_3(M_j), \dots, \phi_n(M_j)] \neq 0; (i=1,2)$.

Поэтому

$$\psi_{ij} * [-1]^m \phi_1 = \psi_{ij} + [-1]^m \phi_1 \pm [\psi_{ij}^{2k} + \phi_1^{2k}]^{\frac{1}{2k}} = \psi_{ij} \pm \psi_{ij}^{2k} + [-1]^m \phi_1 + 0(\phi_1^{2k}) \quad (9)$$

Так как по условию теоремы

$$[\psi_{ij} * (-1)^m \phi_1] * \psi_2 = f(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n) \Big|_{M_j} = 0,$$

а $\psi_{ij} \neq 0$ и $\psi_{2j} \neq 0$,

то в точке M_j получим $\psi_{ij} * (-1)^m \phi_1 = \psi_{ij} * 0 = 0$.

Поэтому из (9) следует, что $\psi_{ij} \pm (\psi_{ij})^{2k} = 0$.

Таким образом $\psi_{ij} * (-1)^m \phi_1 = (-1)^m \phi_1 + 0(\phi_1^{2k})$.

Аналогично получаем:

$$[\psi_{ij} * (-1)^m \phi_1] * \psi_2 = [(-1)^m \phi_1 + 0(\phi_1^{2k})] * \psi_{2j} = (-1)^m \phi_1 + 0(\phi_1^{2k}) + \psi_{2j} \pm [(-1)^m \phi_1 + 0(\phi_1^{2k}) + \psi_{2j}^{2k}]^{1/2k} = (-1)^m \phi_1 + 0(\phi_1^{2k}).$$

Поэтому при $\beta < 2k$ выполняется равенство (8). Что и требовалось доказать.

Следствие: отметим также, что S-конъюнкция $x \wedge_S u$ подобно R-конъюнкциям $x \wedge_0 u$ обладает свойствами сохранения выпуклости. Если функции ϕ_1 и ϕ_2 во всех точках и для всего направления l удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial l^2} \leq 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial l^2} \leq 0, \quad \text{то} \quad \frac{\partial^2}{\partial l^2} (\phi_1 \wedge_S \phi_2) \leq 0.$$

5. Вычислительный эксперимент

5а. Обратная задача аналитической геометрии для областей сложной функции

Разработан ряд классов S-функций. Дизъюнкция получена по правилу де Моргана. См. табл. 1, где $2 - \sqrt[k]{2} \leq b \leq 1; k > 0, \beta_1 = 10^{-N}, \beta_2 = 10^N, N > 0$.

В классах S-функций I – III для того чтобы $\rho(\Gamma, \Gamma_0) \leq \epsilon$ необходимо k выбрать из уравнения:

$$-2 \ln(2 - \sqrt[k]{2}) = \epsilon,$$

при этом получаем $k = \ln 2 \cdot (\ln(2 - e^{-0.5\epsilon}))^{-1}$; отсюда следует, что при $\epsilon \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$. Если $\epsilon = 10^{-3}$, то $k \approx 1387$.

Рассмотрим подробно применение S-функций IV класса на следующих примерах.

1. Первый координатный угол. $f_1(x)=x$; $f_2(y)=y$. Конъюнкцию найдем по формуле (6). На рис. 1а показана S-конъюнкция для первого координатного угла при $N=2, k=2$. В табл. 2 приведены значения координат, а так же первой производной в некоторых точках угла, для различных N , при $k=2$. На рис. 1б показана зависимость радиуса скругления при фиксированном k , для различных N .

Таблица 1

Класс	Формула конъюнкции/дизъюнкции
I	$\omega_1 \underset{S}{\wedge} \omega_2 = -b + e^{\omega_1} + e^{\omega_2} - 2\sqrt{e^{2k\omega_1} + e^{2k\omega_2}}$;
	$\omega_1 \underset{S}{\vee} \omega_2 = b - e^{-\omega_1} - e^{-\omega_2} + 2\sqrt{e^{-2k\omega_1} + e^{-2k\omega_2}}$;
II	$\omega_1 \underset{S}{\wedge} \omega_2 = 1 - 2\sqrt{e^{2k\omega_1} + e^{2k\omega_2}}$;
	$\omega_1 \underset{S}{\vee} \omega_2 = -1 + 2\sqrt{e^{-2k\omega_1} + e^{-2k\omega_2}}$;
III	$\omega_1 \underset{S}{\wedge} \omega_2 = -1 + e^{\omega_1} + e^{\omega_2} - 2e^{\omega_2 + \omega_1} + 2\sqrt{e^{2k\omega_1} - e^{2k\omega_2}}$;
	$\omega_1 \underset{S}{\vee} \omega_2 = 1 - e^{-\omega_1} - e^{-\omega_2} + 2e^{-\omega_2 - \omega_1} - 2\sqrt{e^{-2k\omega_1} + e^{-2k\omega_2}}$;
IV	$\omega_1 \underset{S}{\wedge} \omega_2 = \omega_1 + \omega_2 - 2\sqrt{\omega_1^{2k} + \omega_2^{2k}} + \beta_1 \cdot \exp[-\beta_2 \cdot (\omega_1^{2k} + \omega_2^{2k})]$;
	$\omega_1 \underset{S}{\vee} \omega_2 = \omega_1 + \omega_2 + 2\sqrt{\omega_1^{2k} + \omega_2^{2k}} + \beta_1 \cdot \exp[-\beta_2 \cdot (\omega_1^{2k} + \omega_2^{2k})]$.

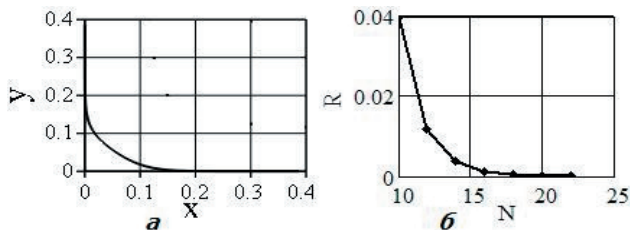


Рис. 1. а – S-конъюнкция на первом координатном угле, при $N=2, k=2$; б – зависимость радиуса скругления для разных N , при $k=2$ для первого координатного угла

Таблица 2

N	x	y	$\partial/\partial x$	N	x	y	$\partial/\partial x$
10	0	0,198796	1,000000	16	0	0,050000	1,000000
	0.02	0,043652	0,993456		7.5e-4	0,001257	0,991584
	0.04	0,023483	0,959000		1.25e-3	0,000757	0,961598
12	0	0,050000	1,000000	18	0	0,050000	1,000000
	6e-3	0,014152	0,993982		2e-4	0,000437	0,993456
	0.012	0,008058	0,969079		4e-4	0,000215	0,960171
14	0	0,050000	1,000000	20	0	0,004934	1,000000
	1e-3	0,005541	0,998408		7.5e-5	0,000106	0,995030
	4e-3	0,002348	0,959000		1.25e-4	0,000078	0,961186

2. Пересечение двух окружностей с радиусами $R_1=0,3$ и $R_2=0,2$ и центрами в точках $(0,3; 0,3)$ и $(0,5; 0,5)$:

$$f_1(x,y) = R_1^2 - (x - C_{1x})^2 + (y - C_{1y})^2,$$

$$f_2(x,y) = R_2^2 - (x - C_{2x})^2 + (y - C_{2y})^2$$

S-дизъюнкцию и S-конъюнкцию двух окружностей найдем по формуле (6), выбрав $N=32, k=4$ (рис. 2а и 2б соответственно).

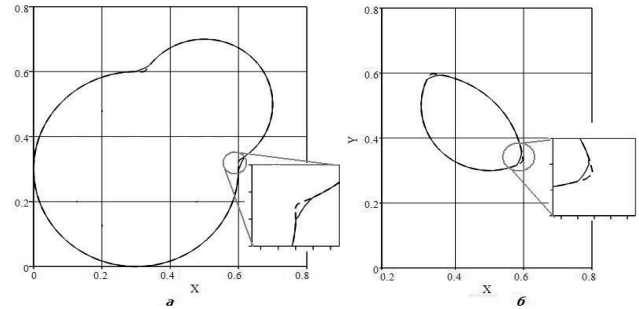


Рис. 2. S-операции на примере пересечения двух окружностей: а – S-дизъюнкция, б – S-конъюнкция

Производные S-конъюнкции приведены в таблице, на рис. 3а и 3б показаны точки, исследуемые в табл. 3.

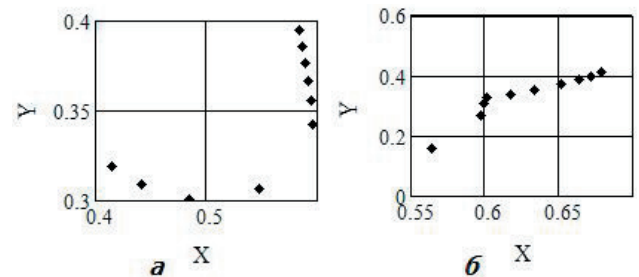


Рис. 3. Исследуемые точки: а-S-конъюнкции, б-S-дизъюнкции

Таблица 3

Конъюнкция					Дизъюнкция				
№	x	y	$\partial^2/\partial x^2$	$\partial^3/\partial x^3$	№	x	y	$\partial^2/\partial x^2$	$\partial^3/\partial x^3$
1	0,4161	0,3185	-2,0000	0,0000	1	0,5649	0,1591	-2,0000	0,0000
2	0,4428	0,3084	-2,0000	0,0000	2	0,5981	0,2663	-2,0000	0,0000
3	0,4856	0,3005	-2,0000	0,0000	3	0,5999	0,3071	-2,0000	0,0000
4	0,5486	0,3060	-2,0000	0,0000	4	0,6022	0,3281	-2,0000	0,0000
5	0,5970	0,3420	-2,0000	0,0000	5	0,6175	0,3382	-2,0000	0,0000
6	0,5948	0,3557	-2,0000	0,0000	6	0,6336	0,3512	-2,0000	0,0000
7	0,5926	0,3664	-2,0000	0,0000	7	0,6522	0,3702	-2,0000	0,0000
8	0,5901	0,3764	-2,0000	0,0000	8	0,6642	0,3858	-2,0000	0,0000
9	0,5875	0,3856	-2,0000	0,0000	9	0,6727	0,3992	-2,0000	0,0000
10	0,5847	0,3946	-2,0000	0,0000	10	0,6794	0,4116	-2,0000	0,0000

3. Фигура, образованная поставленными друг на друга параллелепипедами $(0,8;0,4;0,5)$ и $(0,4;0,2;0,3)$, показана на рис. 4, $N=20, k=5$:

$$f_1(x) = x(0.8 - x); f_2(x) = y(0.4 - y); f_3(z) = z(0.5 - z);$$

$$f_4(x) = x(0.4 - x); f_5(x) = y(0.2 - y); f_6(z) = (0.8 - z)(z - 0.5);$$

$$W(x,y,z) = \left[\left(f_1(x) \underset{S}{\wedge} f_2(y) \right) \underset{S}{\wedge} f_3(z) \right] \underset{S}{\vee} \left[\left(f_4(x) \underset{S}{\wedge} f_5(y) \right) \underset{S}{\wedge} f_6(z) \right].$$

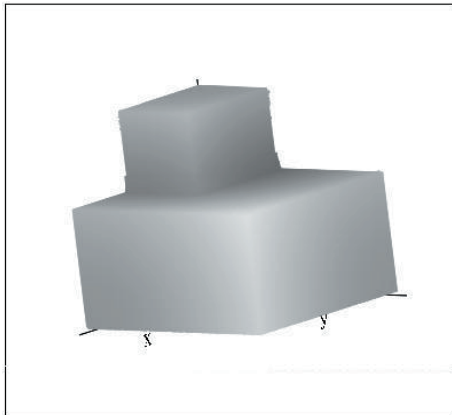


Рис. 4. Фигура, образованная с помощью S-операций из параллелепипедов

4. Фигура, образованная сферой, поставленной на цилиндр, показана на рис. 5а и 5б. На рис. 5а – радиус сферы больше радиуса цилиндра ($\rho=0.35, R_1=0.25, b=0.25$), на рис. 5б – радиус сферы меньше радиуса цилиндра ($\rho=0.25, R_1=0.1, b=0.5$). $f_1(\rho)=R_1^2-\rho^2$; $f_2(z)=z(b-z)$;

$$f_3(\rho, z) = R_2^2 - \rho^2 - (z - b)^2; W = (f_1 \wedge_S f_2) \vee_S f_3$$

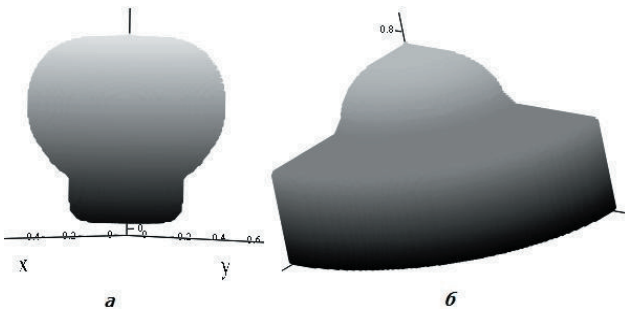


Рис. 5. Фигуры, образованные с помощью S- операций из сферы и цилиндра: а – $R_1 < \rho$; б – $R_1 > \rho$

5. Крест, образованный полосами $0,1 \times 0,5$ и $0,6 \times 0,2$ с центром в точке $(0,25; 0,2)$, построенный с помощью S-операций при $N=20, k=4$, показан на рис. 6. $f_{11} = (0.3 - x)(0.2 - x)$; $f_{12} = y(0.5 - y)$; $f_{21} = x(0.6 - x)$;

$$f_{22} = (0.3 - y)(y - 0.1); \omega = (f_{11} \wedge_S f_{12}) \vee_S (f_{21} \wedge_S f_{22})$$

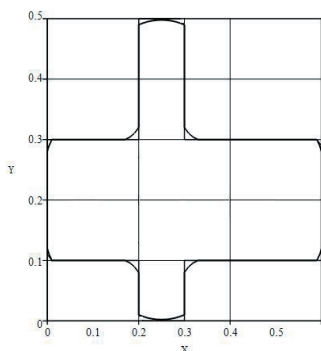


Рис. 6. Крест, образованный полосами $0,1 \times 0,5$ и $0,6 \times 0,2$

На рис. 7 показана функция ω для креста. Светлым – функция ω без управляющих функций, темным – функция ω , благодаря управляющим функциям, имеющая внутреннюю область в форме перевернутой «тарелочки».

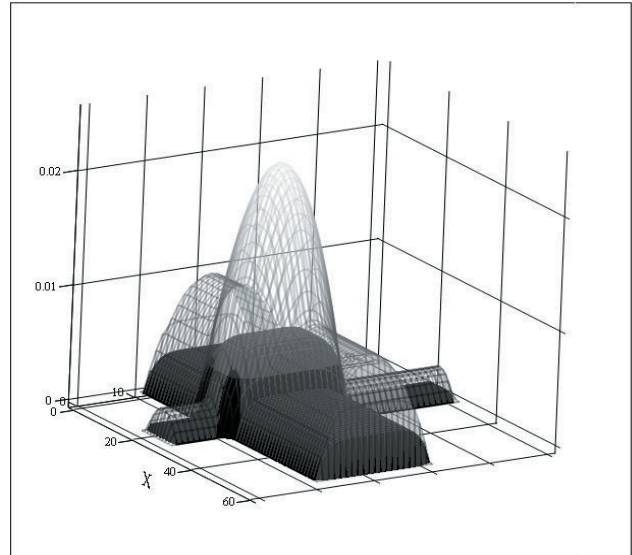


Рис. 7. Функция ω для креста, образованного помощью S-операций. Светлым показана функция ω , образованная S-операциями без управляющих функций, темным – с управляющими функциями

Управляющие функции находятся из условия:

$$\begin{cases} \tilde{f}(x) = f(x) \cdot \left(1 + \alpha_1 \cdot f(x) + \sum_n \alpha_n \cdot f^n(x) \right), n = 2 \dots k; \\ f''_{xx}(x) \cdot (1 + \alpha_1 \cdot f(x)) = 0; \\ \tilde{f}(x) = \tilde{f}(x + \Delta x) = \tilde{f}(x + 2\Delta x) = \dots = \tilde{f}(x + l \cdot \Delta x); \end{cases}$$

где $l \cdot \Delta x$ - расстояние от центра дна «тарелочки», определяется из вычислительного эксперимента. S-операция для креста с управляющими функциями имеет вид: $\omega = (\tilde{f}_{11} \wedge_S \tilde{f}_{12}) \vee_S (\tilde{f}_{21} \wedge_S \tilde{f}_{22})$.

5б. Математическое моделирование высокоскоростного теплового процесса с использованием S-функций

Рассмотрим высокоскоростной температурный процесс с нестационарными граничными условиями на примере задачи для бесконечной призмы прямоугольного поперечного сечения $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$:

$$T'_{Fo}(x, y, Fo) = \Delta T(x, y, Fo) + F(x, y, Fo)$$

$$\left(\pm T'_x(x, y, Fo) + Bi(Fo)T(x, y, Fo) \right) \Big|_{x=\pm 1} = Bi(Fo)T_{cp}(x, y, Fo)$$

$$\left(\pm T'_y(x, y, Fo) + Bi(Fo)T(x, y, Fo) \right) \Big|_{y=\pm 1} = Bi(Fo)T_{cp}(x, y, Fo)$$

$$T(x, y, 0) = \theta(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad 0 < Fo < \infty$$

Точное решение задачи выберем в виде:

$$T_T(x, y, Fo) = T_{cp}(Fo) + (\varphi(x, Fo) - f_1'(x)\varphi(x, Fo)f_1'(x) + f_1(x)Bi(Fo)\varphi(x, Fo)) \times (\psi(y, Fo) - f_2'(y)\psi(y, Fo)f_2'(y) + f_2(y)Bi(Fo)\psi(y, Fo)); (x, y) \in \Omega, 0 < Fo < \infty;$$

Построим аналитическую структуру решения:

$$T(x, y, Fo) = \Phi_0(x, y, Fo) + \sum_{k,l} C_{k,l} \chi_{k,l}(x, y, Fo),$$

где

$$\Phi_0(x, y, Fo) = T_{cp}(Fo);$$

$$\theta(x, y) = T_T(x, y, 0); F_T = T_T'_{Fo} - (T_T''_{xx} + T_T''_{yy})$$

$C_{k,l}$ - неизвестные коэффициенты; $\Phi_0(x, y, Fo)$ - функция, точно удовлетворяющая нестационарным неоднородным граничным условиям; $\chi_{k,l}(x, y, Fo)$ - базисные функции, точно удовлетворяющие нестационарным однородным граничным условиям; $P_k(x)$, $P_l(y)$ - нормированные полиномы Чебышева.

$$\chi_{k,l}(x, y, Fo) = P_k(x)P_l(y) - W_1(x, y) \left[(P_k(x)'_x P_l(y) DW_1(x, y) - Bi(Fo)P_k(x)P_l(y)) \Big|_{x=1} \right] - W_2(x, y) \left[(P_l(y)'_y P_k(x) DW_2(x, y) - Bi(Fo)P_k(x)P_l(y)) \Big|_{y=1} \right];$$

Используем опорные функции с добавочными членами, $f_1(x) = (1 - x^2)$, $f_2(y) = (1 - y^2)$, S-функции IV класса. Для решения используем разностные схемы повышенного порядка точности: трехслойную разностную схему по временной переменной и пятислойную разностную схему по пространственной переменной типа «большой ящик» [7]. Температуру среды зададим в виде $T_{cp}(Fo) = 10000(1 - \exp(-0.5Fo))$, критерий Био - $Bi(Fo) = \exp(-230Fo)$, а параметры точного решения выберем периодическими:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= (\cos(x \cdot \pi \cdot 3 / 2) + 2), \\ \psi(y) &= (\cos(y \cdot \pi \cdot 3 / 2) + 2), \\ (x, y) &\in \Omega, 0 < Fo < 0.02 \end{aligned}$$

В табл. 4 приведены вычисленные приближенно и точные температуры призмы и максимальная относительная погрешность вычисления. Вычисления проводились на координатной сетке 400 узлов, с шагом по времени $\Delta F = 0.001$, используя 55 к.ф. Данные вычислительного эксперимента приведены для двух случаев: при использовании неконсервативной структуры решения, в которой функции ω в уравнениях $\omega|_{\Gamma} = 0$ определялись с помощью R-функций, помощью консервативной структуры решения, в которых функции ω , $\omega|_{\Gamma} = 0$ определялись с помощью S-функций IV рода с $N = 20$, $k = 2$.

На рис. 8 представлено распределение температуры по сечению прямоугольной призмы момент времени $0.01Fo$.

Таблица 4

Fo	Значение	(0;0)	(0,5;0,5)	(0,95;0,95)	εmax, %
0.001	Пр. R	28,887492	6,630097	9,379367	0,945145
	Пр. S	28,889586	6,632975	9,356339	0,02784
	Точное	28,890317	6,632868	9,354975	-
0.1	Пр. R	372,468236	80,154119	58,549239	3,690278
	Пр. S	372,479831	80,169448	57,932896	0,019836
	Точное	372,482560	80,168620	57,927971	-
0.2	Пр. R	23271,982179	2490,269269	211,515577	24,952929
	Пр. S	23272,328980	2490,855986	210,681319	0,180956
	Точное	23272,400000	2490,867000	210,726327	-

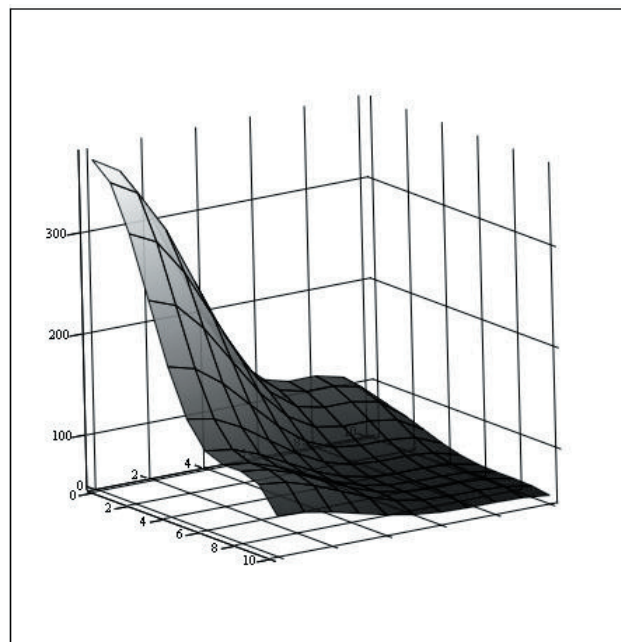


Рис. 8. Температура по сечению прямоугольной призмы в момент времени $0.01Fo$

6. Выводы

Предложенная в статье полная система S-функций позволяет впервые получать не только решения обратной задачи дифференциальной геометрии в асимптотическом приближении с любой наперед заданной степенью точности, но и впервые в мировой научной практике управлять образованием формы поверхности функции ω внутри области любой сложной формы, уравнение $\omega = 0$ для которой описывает границу этой области.

Это имеет первостепенное значение для построения базисных функций и соответствующих структур решения краевых задач с целью максимального повышения степени адекватности описания реального физического процесса приближенной аналитической структурой решения соответствующей краевой задачи, включая и особенности исследуемого физического процесса в окрестностях угловых точек и ребер рассматриваемой области. Впервые представляется возможным построение функции ω , имеющих

внутри области форму перевернутой «тарелочки» с плоским «дном» во внутреннем регионе области, граница которого с границей области образуют геометрический «поясок», ширина которого соответствует максимальному расстоянию по нормали к границе внутри области, на котором по показаниям данных вычислительного эксперимента еще можно решить

обратную граничную задачу для исследуемого физического процесса.

Эти новые качественные особенности весовых функций ω в приближенных аналитических структурах решения краевых задач согласуются с качественными особенностями подхода к решению краевых задач в методах граничных элементов [8].

Выражаю глубокую благодарность моему аспиранту Кобринович Ю.О. за большую проделанную научно-техническую работу по созданию специализированного программного комплекса и проведению большой серии вычислительных экспериментов.

Литература

1. Рвачев, В.Л. Методы алгебры-логики в математической физике [Текст] / В.Л. Рвачев. – К. : Наук. думка, 1974. – 259 с.
2. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения физике [Текст] / В.Л. Рвачев. - К. : Наук. думка, 1982. – 552с.
3. Теория R-функций и актуальные проблемы прикладной математики [Текст] / Ю.Г. Стоян, В.С. Проценко, Г.П. Манько и др. - К. : Наук. думка, 1986. – 264 с.
4. Курпа Л.В. Метод R-функций для решения линейных задач изгиба и колебаний полых оболочек [Текст] / Л.В. Курпа. – Х.:НТУ «ХПИ», 2009. – 406 с.
5. Слесаренко А. П. S-функции в обратных задачах аналитической геометрии и моделировании тепловых процессов [Текст] / А. П. Слесаренко // Вост.-Европейский Журнал Передовых Технологий. - 2011. - № 3/4(51). - С. 41–46.
6. Канторович, Л.В., Функциональный анализ в нормированных пространствах [Текст] / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. - М. : Физматлит, 1959. - 684 с.
7. Ильин, В. П. Численные методы решения задач электрооптики [Текст] / В. П. Ильин – Наука, сибирское отделение, 1974. – 202 с.
8. Бребия К. Методы граничных элементов [Текст] / К. Бребия, Ж. Теллес, Л. Вроубел. - М. : Мир, 1987. – 524 с.

З допомогою перетворення Фур'є транспортний оператор представлений моделлю Фрідрікса. Використовуючи відому формулу стрибка резольвенти для оператора моделі Фрідрікса, отримано рівність Парсеваля методом контурного інтегрування

Ключові слова: транспортний оператор, аналітичне продовження, модель Фрідрікса

Преобразованием Фурье транспортный оператор представлен моделью Фридрикса. Используя известную формулу скачка резольвенты для оператора модели Фридрикса, получено равенство Парсеваля методом контурного интегрирования

Ключевые слова: транспортный оператор, аналитическое продолжение, модель Фридрикса

Transport operator gives Friedrich's model with the help of Fourier transformation. Using known formulae of jump of the resolvent for the operators of Friedrich's model we obtain Parseval equality with the help of method of contour integrating

Keywords: transport operator, analytic extension, Friedrich's model

УДК 517.983

SPECTRAL DECOMPOSITION FOR SOME TRANSPORT OPERATOR

H. V. Ivasyk

Asistent of department of high mathematics
National University "Lviv Polytechnic"
12, S.Bandery str, Lviv, Ukraine, 79013
Phone number: (032) 263-21-04,
067-282-27-17
E-mail: Ivasyk-G@yandex.ru

Introduction

A problem about transferring of neutrons leads to the operator

$$Lf = -i\mu \frac{\partial f}{\partial x} + c(x) \int_{-1}^1 f(x, \mu') d\mu'$$

in the space $L^2(D)$, where $D = \mathbb{R} \times [-1, 1]$. There is much literature concerning this operator and the similar ones for