

УДК 519.651

МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ УЗЛОВ КУСОЧНО- ЛИНЕЙНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ВЫПУКЛЫХ НА ОТРЕЗКЕ ОДНОМЕРНЫХ ФУНКЦИЙ

А. К. Смирнов

Ведущий специалист, государственный инженер-инспектор Ростехнадзора

Департамент агропромышленного комплекса и потребительского рынка Ярославской области
ул. Саукова, 7 – 19, г. Ярославль, Россия, 150051
Контактный тел.: (4852) 400-824, 8-905-637-58-09

E-mail: ansm117@rambler.ru

Оптимізаційний метод заснований на рішенні задачі: на заданому відрізку вписати в опуклу функцію кусочно-лінійну функцію екстремальної площі. Отримані рівняння, що задовольняють умовам існування екстремуму

Ключові слова: оптимізація, опуклість, кусочно-лінійна функція

Оптимизационный метод основан на решении задачи: на заданном отрезке вписать в выпуклую функцию кусочно-линейную функцию экстремальной площади. Получены уравнения, удовлетворяющие условиям существования экстремума

Ключевые слова: оптимизация, выпуклость, кусочно-линейная функция

Optimization a method is based on the decision of task: on the set segment to enter the piece-linear function of extreme area in convex function. The equations satisfying the terms of existence of extremum are obtained

Keywords: optimization, convex, piece-linear function

Работа относится к области прикладной математики, а именно к разделу «Аппроксимация функций» численных методов анализа, решающая задачу замены сложных функций на более простые, близкие к исходным.

Актуальность метода заключается в его:

- новизне, т.к. получены новые зависимости нахождения кусочно-линейной аппроксимирующей функции на выпуклом отрезке;

- простоте аппроксимирующей модели и простоте получения результатов аппроксимации;

- однозначности, потому что при заданном числе участков аппроксимации не требуется никакого перебора возможных сочетаний линейных участков.

Проблема кусочно-линейной аппроксимации выпуклых на отрезке одномерных функций возникает во многих областях техники, в том числе при решении различных задач гидропривода. Уравнения движения гидропривода в целом и его элементов в большинстве случаев являются нелинейными. Это обусловлено нелинейными расходными характеристиками рабочей жидкости на местных сопротивлениях (квадратичная зависимость) [1], а также, нелинейностью сил трения, т.к. коэффициент трения в общем случае зависит от относительной скорости движения тела и удельного давления (гиперболическая зависимость) [2].

С увеличением производительности машин уровень давления в гидроприводах повышается, что вызывает необходимость учета сжимаемости рабочей жидкости. При этом уравнения динамики детерминированных гидроприводов описываются

нелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка [3], а следящих гидроприводов выше второго порядка [4]. Аналитическое решение этих уравнений возможно лишь для ограниченного их числа, и если решение существует, то из-за большой сложности оказывается неприемлемым для применения в инженерной практике. Поэтому при исследовании гидросистем используются приближенные методы.

Нелинейные функции, являющиеся причиной нелинейности дифференциальных уравнений, можно аппроксимировать, например, с помощью проведенных в граничных точках интервалов внешних касательных к кривой, вычисленных по первым двум членам ряда Тейлора, что повышает точность воспроизведения функции по сравнению с представлением её двумя членами степенного ряда [5]. Однако найти наилучшее расположение узлов кусочно-линейных функций (КЛФ) на заданном отрезке аппроксимации этими методами не представляется возможным.

В настоящей работе приводится метод аппроксимации выпуклых на отрезке одномерных функций при расположении точек КЛФ, обеспечивающую экстремальную её площадь.

Сущность метода заключается в следующем. Пусть график непрерывной нелинейной одномерной функции $y = F(x)$ на каком-либо отрезке выпуклый вверх или вниз. Аппроксимируем функцию $F(x)$ непрерывной, по определению выпуклой КЛФ $P(x)$, имеющей число прямых n . Очевидно, что число прямых должно быть больше двух $n \geq 2$. Обозначим абсциссы точек прямых КЛФ в порядке возрастания от начальной точ-

ки x_0 рассматриваемого отрезка до его конечной точки x_n . Затем построим кусочно-линейную зависимость из точки (x_0, y_0) в точку (x_n, y_n) , при условии, что внутренние точки (x_i, y_i) ($i=1, \dots, n-1$) также принадлежат кривой $F(x)$ (рис. 1, $n=3$).

Тогда для граничных точек прямых КЛФ выполняется равенство

$$P(x_i) = F(x_i) \quad (i=0, \dots, n). \quad (1)$$

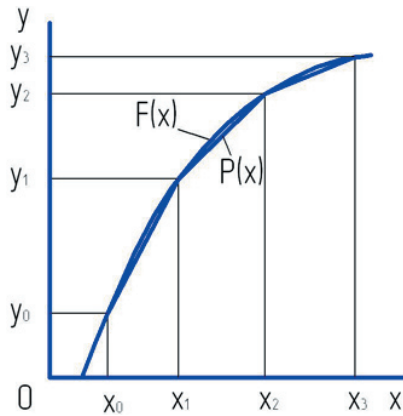


Рис. 1

Площадь, ограниченную кривой $F(x)$, осью абсцисс и ординатами отрезка аппроксимации x_0 и x_n , обозначим S_F (площадь кривой). На заданном отрезке S_F величина постоянная.

Площадь, ограниченную КЛФ $P(x)$, осью абсцисс и теми же ординатами, обозначим $S_P(x)$ (площадь КЛФ).

При фиксированном числе прямых КЛФ $P(x)$ положение ее внутренних точек и площадь могут быть различными.

В качестве примера при $n=2$ показаны положения x_1, x_1'', x_1''' точки x_1 функции $P(x)$ для выпуклой вверх (рис. 2а), и для выпуклой вниз (рис. 2б) функции $F(x)$. В обоих случаях КЛФ $P(x)$ является вписанной в кривую $F(x)$.

Очевидно, что на заданном отрезке при фиксированном числе прямых, чем меньше площадь КЛФ отличается от площади кривой, тем КЛФ $P(x)$ лучше приближает аппроксимируемую функцию $F(x)$.

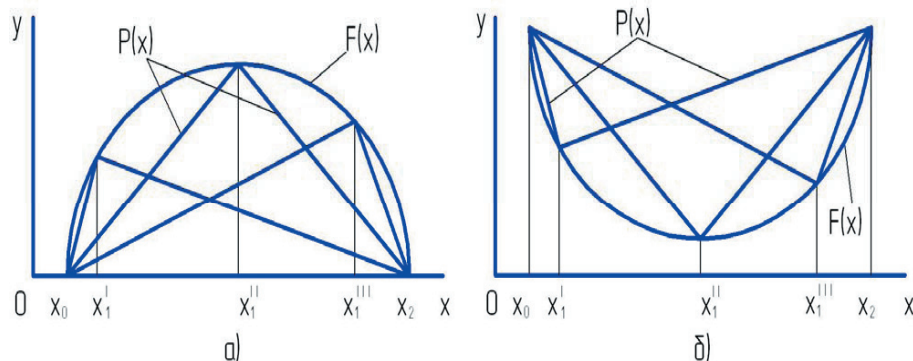


Рис. 2

С учетом сказанного оптимизационная задача формулируется следующим образом: на заданном отрезке $[x_0, x_n]$ вписать КЛФ $P(x)$ в выпуклую вверх (вниз) функцию $F(x)$ так, чтобы площадь функции $P(x)$, была максимальной (минимальной).

Формализация данной задачи приобретает вид

$$\begin{aligned} S_P(x) &\rightarrow \sup(\inf), \quad x \in R^{n-1}, \\ x_i &> 0 \quad (i=1, \dots, n-1), \quad n \geq 2, \\ P(x_i) &= F(x_i) \quad (i=0, \dots, n). \end{aligned}$$

Уравнение каждой прямой КЛФ выразим по двум точкам $(x_{i-1}, y_{i-1}), (x_i, y_i)$ ($i=1, \dots, n$). Тогда общее уравнение КЛФ с учетом (1) запишется так

$$P(x) = [F(x_i) - F(x_{i-1})](x - x_{i-1}) / (x_i - x_{i-1}) + F(x_{i-1}), \quad (i=1, \dots, n)$$

а её площадь равна

$$\begin{aligned} S_P(x) &= \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \{ [F(x_i) - F(x_{i-1})](x - x_{i-1}) / (x_i - x_{i-1}) + F(x_{i-1}) \} dx. \end{aligned} \quad (i=1, \dots, n)$$

После интегрирования и сокращения подобных членов суммы получим

$$S_P(x) = 0,5 \left\{ -F(x_0)x_0 + \sum_{i=1}^n [F(x_{i-1})x_i - F(x_i)x_{i-1}] + F(x_n)x_n \right\} \quad (2)$$

По теореме Ферма для экстремумов функций многих переменных, изложенной, например, в [6], продифференцируем выражение (2) по неизвестным абсциссам x_1, \dots, x_{n-1} .

В результате имеем

$$\begin{aligned} \partial S_P(x) / \partial x_i &= \\ &= 0,5 \{ F(x_{i-1}) - [\partial F(x_i) / \partial x_i]_{x_{i-1}} + [\partial F(x_i) / \partial x_i]_{x_{i+1}} - F(x_{i+1}) \} \end{aligned} \quad (3) \quad (i=1, \dots, n-1).$$

Для нахождения решения экстремальной задачи: стационарной точки $\hat{x} = (x_1, \dots, x_n)$, приравняем выражения (3) к нулю.

Приходим к системе с одинаковым количеством уравнений и неизвестных

$$\begin{aligned} \partial F(x_i) / \partial x_i &= \\ &= [F(x_{i+1}) - F(x_{i-1})] / (x_{i+1} - x_{i-1}) \end{aligned} \quad (4) \quad (i=1, \dots, n-1).$$

Все уравнения системы (4) имеют одинаковую структуру: левая часть содержит частную производную от исходной функции по неизвестной абсциссе, правая часть является отношением разности значений исходной

функции в соседних точках к расстоянию между ними. Достаточно получить систему уравнений (4) когда $n=2$, а затем при очередном увеличении значения n индексы абсцисс просто увеличить на единицу.

Решив систему уравнений (4) аналитически или численными методами, находим стационарную точку, удовлетворяющую необходимому условию первого порядка.

В конечномерной задаче, которая здесь рассматривается, нахождение её решения по теореме Ферма влечет положительную определенность матрицы Гессе и строгую положительную определенность второго дифференциала, т.е. является достаточным условием минимума в стационарной точке [6].

Таким образом, определенные по системе уравнений (4) координаты точек являются экстремальными, а КЛФ является оптимальной в том смысле, что она занимает площадь наибольшую для функций выпуклых вверх или наименьшую для функций выпуклых вниз.

Для оценки полученного приближения находим, путем интегрирования, площадь функции $F(x)$

$$S_F = \int_{x_0}^{x_n} F(x) dx \quad (5)$$

Если имеются аналитические зависимости для абсцисс оптимальной КЛФ, то ее площадь $S_{порт}$, также имеет аналитическое выражение, а если система уравнений (4) аналитического выражения не имеет и решена численными методами, то площадь $S_{порт}$ определяется численным интегрированием по найденным координатам, например, с помощью формулы Симпсона [7].

Относительная погрешность приближения КЛФ равна

$$\delta = |S_F - S_{порт}| / S_F \quad (6)$$

Для достижения требуемой точности приближения количество прямых КЛФ увеличивается на единицу и алгоритм расчета абсцисс оптимальной КЛФ, границами которого являются система уравнений (4) и формула (6), повторяется.

В качестве примера в таблице приведены результаты исследований, с помощью изложенного метода, следующих функций при $n=2, \dots, 5$: параболы второго, третьего порядка и обратных к ним степенных функций, а также одной четвертой части эллипса, функции квадратный корень из линейного двучлена, тригонометрических функций, функции натурального логарифма.

Из выбранных для исследования функций аналитические выражения абсцисс точек оптимальной КЛФ и её площади имеют: $y=x^2$ и $y=x^{1/2}$ при $x_0 \geq 0$; $y=x^3$ при $x_0 = 0$; $y=x^{1/3}$ при $x_0 = 0$ и $n=2$; $y=b[1-(x/x_n)^2]^{1/2}$ при совпадении координатных и собственных осей; $y=[d(1-x/x_n)]^{1/2}$ при $x_0=0$; при $n=2$ и $x_0=0$ для функций: $y=\sin(x)$, $x_n=180^\circ$; $y=\operatorname{tg}(x)$, $x_n=85^\circ$, а так же при $n=2$ и $x_0=10$, $x_n=10000$ функции $y=\ln(x)$. Неуказанные

значения абсцисс КЛФ определены численными методами.

Обозначения и замечание к таблице:

x_0 и x_n - абсцисса начальной и конечной точки отрезка аппроксимации; n - число прямых КЛФ; a, b - соответственно половина большой и малой оси в каноническом уравнении эллипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ при совпадении координатных и собственных осей; c, d - параметры кривой квадратный корень из линейного двучлена $y=(-cx+d)^{1/2}$; $x_1 \dots x_5$ - абсциссы оптимальной КЛФ; S_F - площадь аппроксимируемой кривой; $S_{порт}$ - оптимальная площадь КЛФ; $|\delta|, \%$ - относительная погрешность аппроксимации.

* В расчете относительной погрешности учитывается только первое слагаемое $S_{порт}$; второе слагаемое погрешность уменьшает.

В таблице также приведены абсциссы точек оптимальной КЛФ одной четвертой части эллипса. Такие же координаты КЛФ имеет одна четвертая часть окружности. Эти координаты делят окружность на равные секторы.

Таким образом, наилучшим приближением к окружности (части окружности) является равносторонний многоугольник, что совпадает с интуитивным ощущением.

Изменение относительной погрешности аппроксимации $|\delta|, \%$ при изменении от $n=2$ до $n=5$ для функций составляет: $y=x^2 - 12,5 \div 2$; $y=x^{1/2} - 6,25 \div 1$; $y=x^3 - 23 \div 3,6$; $y=x^{1/3} - 7,73 \div 1,2$; $y=b[1-(x/x_n)^2]^{1/2} - 9,98 \div 1,53$; $y=[d(1-x/x_n)]^{1/2} - 6,25 \div 1$; $y=\sin(x) - 21,5 \div 3,1$; $y=\operatorname{tg}(x) - 44,6 \div 6,4$; $y=\ln(x) - 5,72 \div 0,822$.

Метод может найти применение для численного решения дифференциальных уравнений задач динамики механизмов с гидроприводом, пневмоприводом, электроприводом и другими приводами.

В заключении приведём примеры практического применения метода.

При решении задач динамики для механизмов с пневмоприводом массовый расход истечения газа из ёмкости через отверстие определяется зависимостью $G(p/p_0)$, где G - массовый расход газа, p - давление внешней среды, p_0 - постоянное давление газа в ёмкости.

Эта зависимость в подкритической области при $0,528 < p/p_0 \leq 1$ представляет собой правую ветвь параболы, направленную вниз [3], которую можно легко аппроксимировать предложенным методом.

Общеизвестно, например из [3], что в гидроприводах оптимальным законом торможения, обеспечивающим равномерное торможение, постоянный уровень давления в процессе торможения, минимальное время торможения, является закон торможения с отрицательным постоянным ускорением.

Для получения оптимального закона торможения в тормозном устройстве необходимо иметь площадь проходного сечения, выражаемую функцией корень квадратный из линейного двучлена. Реализовать такой профиль чрезвычайно сложно и трудоёмко. Форма элементов дроссельных устройств (рабочих окон, профилированных игл) после аппроксимации этой функции с помощью данных таблицы значительно упрощается, что снижает затраты на проектирование и производство гидравлических тормозных устройств.

Таблица 1

Определение абсцисс оптимальной КЛФ и погрешности аппроксимации разных функций при различном числе прямых

Отрезок		Аппроксимируемые функции				
$[x_0, x_n]$		$y = x^2$	$y = x^{1/2}$	$y = x^3$	$y = x^{1/3}$	
S_F		$x_0 \geq 0$		$x_0 = 0$		
n = 2	x_1	$1/3(x_n^3 - x_0^3)$	$2/3(x_n^{3/2} - x_0^{3/2})$	$1/4x_n^4$	$3/4x_n^{4/3}$	
	$S_{\text{Попт}}$	$1/2(x_0 + x_2)$	$[1/2(x_2^{1/2} + x_0^{1/2})]^2$	$0,577 x_2$	$0,192 x_2$	
	$ \delta , \%$	$3/8(x_2^3 - x_0^3) - 1/8x_0x_2(x_2 - x_0)$	$5/8(x_2^{3/2} - x_0^{3/2}) + 1/8(x_0x_2)^{1/2}(x_2^{1/2} - x_0^{1/2})$	$0,308 x_2^4$	$0,692 x_2^{4/3}$	
n = 3	$ \delta , \%$	$\leq 12,5^*$	$\leq 6,25^*$	23	7,73	
	x_1	$1/3(x_3 + 2x_0)$	$[1/3(x_3^{1/2} + 2x_0^{1/2})]^2$	$0,422 x_3$	$0,0749 x_3$	
	x_2	$1/3(2x_3 + x_0)$	$[1/3(2x_3^{1/2} + x_0^{1/2})]^2$	$0,730 x_3$	$0,389 x_3$	
	$S_{\text{Попт}}$	$19/54(x_3^3 - x_0^3) - 1/18x_0x_3(x_3 - x_0)$	$35/54(x_3^{3/2} - x_0^{3/2}) + 1/18(x_0x_3)^{1/2}(x_3^{1/2} - x_0^{1/2})$	$0,275 x_3^4$	$0,725 x_3^{4/3}$	
n = 4	$ \delta , \%$	$\leq 5,56^*$	$\leq 2,78^*$	9,96	3,33	
	x_1	$1/4(x_4 + 3x_0)$	$[1/4(x_4^{1/2} + 3x_0^{1/2})]^2$	$0,338 x_4$	$0,0384 x_4$	
	x_2	$1/4(2x_4 + 2x_0)$	$[1/4(2x_4^{1/2} + 2x_0^{1/2})]^2$	$0,585 x_4$	$0,200 x_4$	
	x_3	$1/4(3x_4 + x_0)$	$[1/4(3x_4^{1/2} + x_0^{1/2})]^2$	$0,802 x_4$	$0,514 x_4$	
	$S_{\text{Попт}}$	$11/32(x_4^3 - x_0^3) - 1/32x_0x_4(x_4 - x_0)$	$21/32(x_4^{3/2} - x_0^{3/2}) + 1/32(x_0x_4)^{1/2}(x_4^{1/2} - x_0^{1/2})$	$0,264 x_4^4$	$0,736 x_4^{4/3}$	
n = 5	$ \delta , \%$	$\leq 3,125^*$	$\leq 1,56^*$	5,52	1,87	
	x_1	$1/5(x_5 + 4x_0)$	$[1/5(x_5^{1/2} + 4x_0^{1/2})]^2$	$0,294 x_5$	$0,023 x_5$	
	x_2	$1/5(2x_5 + 3x_0)$	$[1/5(2x_5^{1/2} + 3x_0^{1/2})]^2$	$0,508 x_5$	$0,119 x_5$	
	x_3	$1/5(3x_5 + 2x_0)$	$[1/5(3x_5^{1/2} + 2x_0^{1/2})]^2$	$0,696 x_5$	$0,307 x_5$	
	x_4	$1/5(4x_5 + x_0)$	$[1/5(4x_5^{1/2} + x_0^{1/2})]^2$	$0,869 x_5$	$0,598 x_5$	
	$S_{\text{Попт}}$	$17/50(x_5^3 - x_0^3) - 1/50x_0x_5(x_5 - x_0)$	$33/50(x_5^{3/2} - x_0^{3/2}) + 1/50(x_0x_5)^{1/2}(x_5^{1/2} - x_0^{1/2})$	$0,259 x_5^4$	$0,741 x_5^{4/3}$	
n = 5	$ \delta , \%$	$\leq 2^*$	$\leq 1^*$	3,6	1,2	
	Отрезок	Аппроксимируемые функции				
	$[x_0, x_n]$	$y = b[1 - (x/x_n)^2]^{1/2}$	$y = [d(1 - x/x_n)]^{1/2}$	$y = \sin(x)$	$y = \text{tg}(x)$	$y = \ln(x)$
		$[0, a]$	$[0, d/c]$	$[0, 180^\circ]$	$[0, 85^\circ]$	$[10, 10000]$
	S_F	$\pi(y_0x_n)/4$	$2(y_0x_n)/3$	2	2,44	82090
	n = 2	x_1	$0,707 x_2$	$0,750 x_2$	90°	$68,9^\circ$
$S_{\text{Попт}}$		$0,707 y_0x_2$	$0,625 y_0x_2$	1,571	3,528	77392
$ \delta , \%$		9,98	6,25	21,5	44,6	5,72

Продолжение таблицы 1

n = 3	x_1	$0,5 x_3$	$5/9 x_3$	$63,8^\circ$	$56,1^\circ$	565
	x_2	$0,866 x_3$	$8/9 x_3$	$116,2^\circ$	77°	3283
	$S_{\text{порт}}$	$0,750 y_0 x_3$	$35/54 y_0 x_3$	1,820	2,890	80137
	$ \delta , \%$	4,51	2,78	9,01	18,5	2,38
n = 4	x_1	$0,382 x_4$	$7/16 x_4$	$50,5^\circ$	$47,3^\circ$	311
	x_2	$0,707 x_4$	$12/16 x_4$	90°	$69,1^\circ$	1583
	x_3	$0,924 x_4$	$15/16 x_4$	$129,5^\circ$	$79,8^\circ$	4567
	$S_{\text{порт}}$	$0,765 y_0 x_4$	$21/32 y_0 x_4$	1,902	2,686	81021
	$ \delta , \%$	2,6	1,56	4,93	10,1	1,3
n = 5	x_1	$0,309 x_5$	$9/25 x_5$	$42,2^\circ$	41°	202,9
	x_2	$0,588 x_5$	$16/25 x_5$	$74,6^\circ$	$62,3^\circ$	929
	x_3	$0,809 x_5$	$21/25 x_5$	$105,4^\circ$	$74,4^\circ$	2558
	x_4	$0,951 x_5$	$24/25 x_5$	$137,8^\circ$	$81,2^\circ$	5459
	$S_{\text{порт}}$	$0,773 y_0 x_5$	$33/50 y_0 x_5$	1,94	2,595	81416
	$ \delta , \%$	1,53	1	3,1	6,4	0,822

Литература

1. Гидравлика, гидромашины и гидроприводы [Текст] : учеб. для машиностроительных вузов / Т. М. Башта, С. С. Руднев, Б. Б. Некрасов, и др. – 2-е изд., перераб. – М.: Машиностроение, 1982. – 423 с.
2. Артоболевский, И. И. Теория механизмов и машин. [Текст] : учеб. для вузов / И. И. Артоболевский. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1975. – 640 с.
3. Левитский, Н. И. Теория механизмов и машин [Текст] : учеб, пособие для университетов и вузов / Н. И. Левитский. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 592 с.
4. Лещенко, В. А. Гидравлические следящие приводы станков с числовым программным управлением [Текст] / В. А. Лещенко. – М.: Машиностроение, 1975. – 288 с.
5. Справочник по теории автоматического управления [Текст] / А. Г. Александров, В. М. Артемьев, В. Н. Афанасьев и др. ; под ред. А. А. Красовского. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 712 с.
6. Алексеев, В. М. Оптимальное управление [Текст] : учеб, пособие для вузов / В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. – 432 с.
7. Бронштейн, И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов [Текст] / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – 13-е изд., исправ. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 544 с.