УДК 001.891:65.011.56

ЗАГАЛЬНА ОЦІНКА МІНІМІЗАЦІЇ ДЕРЕВОПОДІБНИХ ЛОГІЧНИХ СТРУКТУР

Ф.Г. Ващук
Доктор технічних наук, професор*
Контактний тел.: (0312) 5-15-24
E-mail: vashuk@zakdu.edu.ua
Ю.А. Василенко
Доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри
Кафедра інформаційних управляючих систем та технологій*
Контактний тел.: (0312) 2-37-54
E-mail: vasilenko@zakdu.edu.ua
І.Ф. Повхан
Кандидат технічних наук, доцент, завідувач лабораторією
Лабораторія "Інформаційних систем та програмного забезпечення"
Кафедра програмного забезпечення автоматизованих систем*
Контактний тел.: 068-555-44-59
E-mail: comi@zakdu.edu.ua
*Закарпатський державний університет
вул. Заньковецької, 87 "Б", м. Ужгород, 88015

Робота є другою в циклі трьох статей присвячених проблемі оцінки складності логічних дерев класифікації. Досліджується питання оцінки ефекту мінімізації логічних дерев фіксованої структури

Ключові слова: логічні дерева, класифікація, оптимізація

Вторая работа в цикле трех статей посвященных проблеме оценки сложности логических деревьев классификации. Исследуется вопрос оценки эффекта минимизации логических деревьев фиксированной структуры

Ключевые слова: логические деревья, классификация, оптимизация

The second work in a cycle of three articles devoted to a problem of an estimation of complexity of logic trees of classification. The question of an estimation of effect of minimization of logical trees of the fixed structure is investigated

Keywords: logical trees, classification, optimization

Вступ

В другій роботі дослідимо питання загальної оцінки ефекту мінімізації деревоподібних логічних структур фіксованої структури спираючись на дослідження з [1].

Зважаючи на зауваження 1 з попередньої роботи [1], розглянемо два приклади (приклад 1 та приклад 2), на яких розглянемо загальний алгоритм мінімізації до кінця та формулу для s – ого етапу мінімізації.

Загальна оцінка ефекту мінімізації

Приклад 1

$(m=2)$

$N = 2^m + m = 2^2 + 2 = 6$,

$K = 2^m = 4$ (номер критичного ярусу); $(0,1,2,3,4)$.

Так як для критичного ярусу $2^K = 2^{2^{N-K}}$, то

$k:\ 2^{2^m} = 2^{2^m} = 2^{2^2} = 16$ (вершин, міток);

$k+1:\ 2^{2^m+1} = 2^{2^m+1} = 2^5 = 32$ (вершин);

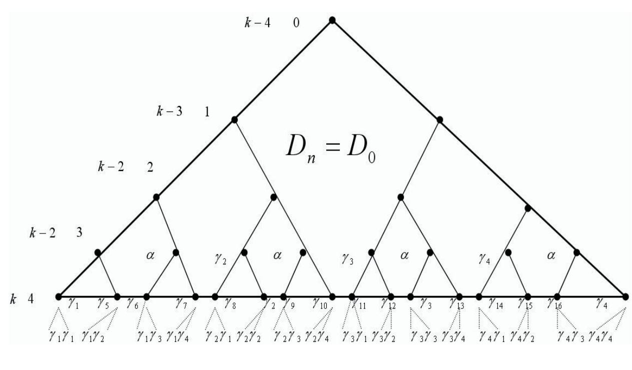
$2^{2^{m-1}} = 2^{2^{2-1}} = 2^2 = 4$ (міток: $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$).

$k = 2^{m-1} = 2^{2-1} = 2$.

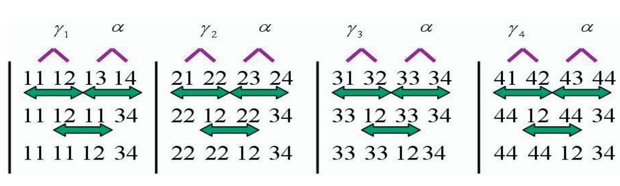
Впорядкування $\beta_{ij} (\beta_{ij} \neq \beta_{ji})$ на останньому ярусі має вигляд

$/\gamma_1\gamma_1\gamma_1\gamma_2\gamma_1\gamma_3\gamma_1\gamma_4 / \gamma_2\gamma_1\gamma_2\gamma_2\gamma_2\gamma_3\gamma_2\gamma_4 / \ldots / \gamma_4\gamma_1\gamma_4\gamma_2\gamma_4\gamma_3\gamma_4\gamma_4 /$.

Всі $\gamma_i (i = 1,2,...,16)$ на $[k]$ – критичному ярусі різні (рис. 1).



а)



б)

Рис. 1 (а,б). Загальний вигляд початкового дерева D_n з ефективною структурою (*) на 3-ому ярусі

Визначимо, на якому ярусі буде знаходитися ефективна структура (*) [1].

З рис. 1 можна побачити , що структура (*) буде знаходитися на $3-$ому ярусі, який визначається за формулою:

$$i = 2^{m-1} + 1 \tag{1}$$

але $2^{m-1} = k$, отже,

$$i = k + 1 \tag{2}$$

Розглянемо схему (рис. 2), в якій заради наочності початкове дерево (I) та дерево зі структурою (II) зосереджені в одному, та опишемо процес мінімізації для даного прикладу [1].

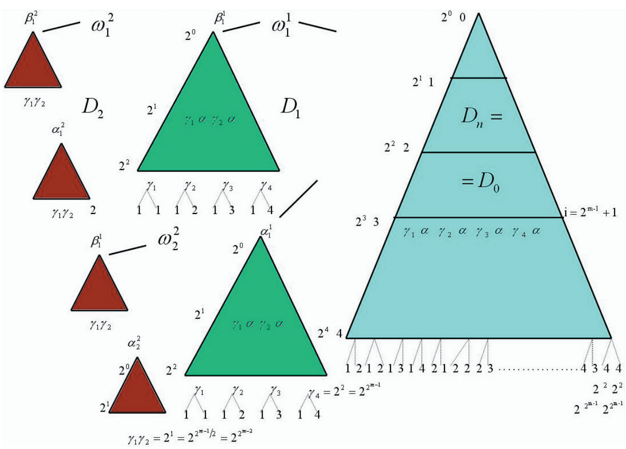


Рис. 2. Етапи мінімізації початкового дерева D_n

З рис. 2 можна побачити, що повна мінімізація вказаним вище способом проходить за два етапи. Звідси робимо висновок, що вона може продовжуватися до тих пір, доки на деякому кроці кількість міток на останньому ярусі підблоків стане рівною 2 (в нашому випадку $\gamma_1\gamma_2$). Початкове дерево $(D_0 = D_n)$, зі структурою (*) в третьому ярусі, номер якого визначається за формулою (1), розпадеться на два піддерева β_1^1 та α_1^1 , які мають на останньому ярусі по чотири мітки. Мітки $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$ в блоці β_1^1 зсунуться на один ярус (за рахунок появи w_1^1), знаходяться вже не на третьому, а на другому ярусі $(0,1,2)$. Для здійснення подальшої мінімізації дерев β_1^1 та α_1^1 необхідно забезпечити їм початковий вигляд: впорядкованість β_{ij} , - для цього опускаємося на один ярус в блоках β_1^1 та α_1^1. Як вже було сказано вище, така процедура є формальною та на підрахунок складності в подальшому не впливає. Побудувавши у підблоках ефективну структуру (*), можемо продовжити мінімізацію. Після другого етапу (для даного прикладу останнього) мінімізації максимальне дерево D_0 розпадеться на чотири підблоки. Підрахунок складності D_2 буде аналогічним D_1. Складність D_2 буде рівна складності блоку $\alpha(\beta_1^2 \neq \alpha_1^2 \neq \beta_2^2 \neq \alpha_2^2)$ помноженого на чотири та без потроєного добутку міток $\gamma_1\gamma_2$, які ми враховуємо лише в одному з блоків, так як ведемо підрахунок тільки різних міток з додаванням міток $w_1^2 w_2^2$. Тоді складність дерев D_0, D_1, D_2 визначається з формул:

$$D_0 = D_n = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 2^{4+1} - 1 = 2^5 - 1 = 31 \tag{3}$$

$$\begin{aligned} D_1 &= 2\cdot(S_{\alpha_1}) - 2^k + 1 = 2\cdot(2^0 + 2^1 + 2^2) - 2^2 + 1 = \\ &= 2\cdot(2^{2+1} - 1) - 2^2 + 1 = 2^2\cdot 3 - 1 = 11 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} D_2 &= 4\cdot(S_{\alpha_2}) - 2^{k/2}\cdot 3 + 2 = 4\cdot(2^0 + 2^1) - 2^1\cdot 3 + 2 = \\ &= 4\cdot(2^{1+1} - 1) - 2^1\cdot 3 + 2 = 2^1\cdot 5 - 2 = 8 \end{aligned} \tag{5}$$

Порівнюючи (3) та (4),(5), можна побачити, що після повної мінімізації (I етап, II етап) складність початкового дерева D_0 зменшилася на 32 мітки, тому можна зробити висновок, що взятий нами спосіб мінімізації насправді буде ефективним.

Розглянемо приклад 2 та виведемо формулу для $s-$ ого етапу мінімізації.

Приклад 2

$(m = 3)$

$N = 2^m + m = 2^3 + 3 = 11$;

$K = 2^m = 8$ (номер критичного ярусу);

K: $2^{2^m} = 2^8 = 256$ (вершин, міток);

$K+1$: $2^{2^m+1} = 2^9 = 512$ (вершин);

$2^{2^{m-1}} = 2^4 = 16$ (міток, функцій $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{16}$);

$k = 2^{m-1} = 4$.

Впорядкованість $\beta_{ij}(i, j = 1,2,...,2^4 = 16)$ на $k+1$ ярусі має вигляд:

$$\begin{aligned} &/11,12,13,14,..,1\cdot 16 / 21,22,23,24,...,2\times \\ &\times 16 / ..... / 16\cdot 1, 16\cdot 2, 16\cdot 3, 16\cdot 4, ..., 16\cdot 16 / \end{aligned}.$$

Номер структури (*) за формулою (1) буде дорівнювати 5 . Зі схеми (рис. 3) випливає, що повна мінімізація для даного прикладу $(m = 3)$ проводиться за три етапи, причому,

$$\text{для } D_1 \ : k_1 = k = 2^{m-1}; \tag{6}$$

$$\text{для } D_2 : k_2 = \frac{k}{2^1} = 2^{m-2}; \tag{7}$$

$$\text{для } D_3 : k_3 = \frac{k}{2^2} = 2^{m-3}; \tag{8}$$

очевидно, що

$$\text{для } D_S : k_S = \frac{k}{2^{S-1}} = \frac{2^{m-1}}{2^{S-1}} = 2^{m-s} \tag{9}$$

але з (2) відомо, що $i = k + 1$, тоді:

$$i_1 = i = k_1 + 1 = 2^{m-1} + 1; \tag{10}$$

$$i_2 = k_2 + 1 = 2^{m-2} + 1; \tag{11}$$

$$i_3 = k_3 + 1 = 2^{m-3} + 1; \tag{12}$$

$$i_3 = k_S + 1 = 2^{m-S} + 1. \tag{13}$$

Підставивши (10),(11),(12),(13) у формулу $S_\alpha = 2^i - 1$, знайдемо складність блоків α_i відповідно на $1,2,3,....,s$ етапах мінімізації:

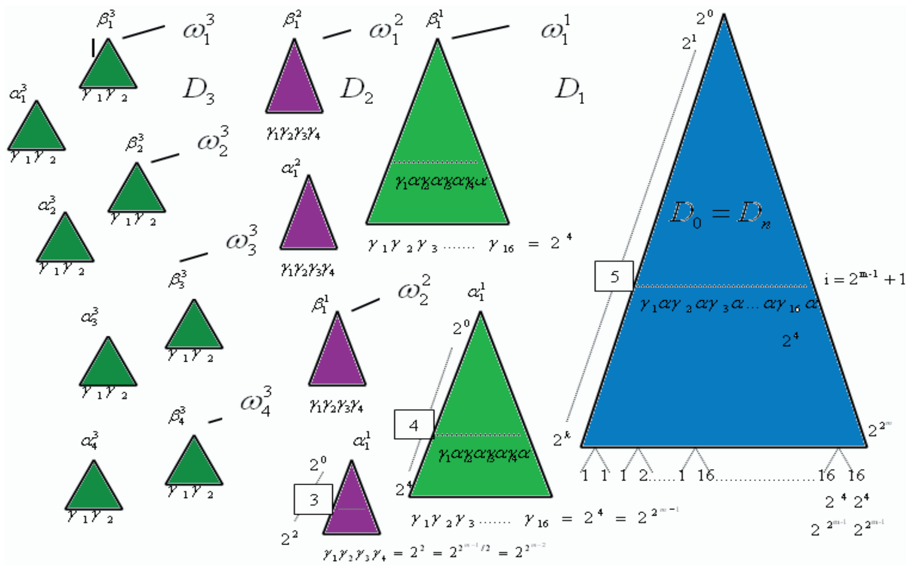


Рис. 3. Етапи мінімізації початкового дерева D_n

$$S_{\alpha_1} = 2^{i_1} - 1 = 2^{2^{m-1}+1} - 1; \tag{14}$$

$$S_{\alpha_2} = 2^{i_2} - 1 = 2^{2^{m-2}+1} - 1; \tag{15}$$

$$S_{\alpha_3} = 2^{i_3} - 1 = 2^{2^{m-3}+1} - 1; \tag{16}$$

$$S_{\alpha_S} = 2^{i_S} - 1 = 2^{2^{m-S}+1} - 1. \tag{17}$$

Врахувавши (6),(7),(8),(9) та (14),(15),(16),(17), підрахуємо складність дерев $D_1, D_2, D_3, \ldots, D_S$.

$$D_1 = 2\cdot(S_{\alpha_1}) - 2^{k_1} + 1 = 2\cdot(2^{2^{m-1}+1} - 1) - 2^{2^{m-1}} + 1; \tag{18}$$

$$D_2 = 4\cdot(S_{\alpha_2}) - 2^{k_2}\cdot 3 + 2 = 4\cdot(2^{2^{m-2}+1} - 1) - 2^{2^{m-2}}\cdot 3 + 2; \tag{19}$$

$$D_3 = 8\cdot(S_{\alpha_3}) - 2^{k_3}\cdot 7 + 4 = 8\cdot(2^{2^{m-3}+1} - 1) - 2^{2^{m-3}}\cdot 7 + 4; \tag{20}$$

$$\begin{aligned} D_S &= 2^S\cdot(S_{\alpha_S}) - 2^{k_S}\cdot(2^S - 1) + 2^{S+1} = \\ &= 2^S\cdot(2^{2^{m-S}+1} - 1) - 2^{2^{m-S}}\cdot(2^S - 1) + 2^{S-1}. \end{aligned} \tag{21}$$

або після перетворень формули (18),(19),(20) приймуть відповідний вигляд:

$$D_1 = 2^{2^{m-1}}\cdot 3 - 1; \tag{22}$$

$$D_2 = 2^{2^{m-2}}\cdot 5 - 2; \tag{23}$$

$$D_3 = 2^{2^{m-3}}\cdot 9 - 4; \tag{24}$$

отже можна припустити, що

$$D_2 = 2^{2^{m-2}}\cdot 5 - 2; \tag{25}$$

Отримуємо (25) безпосередньо з (21).

$$D_S = 2^S\cdot(2^{2^{m-S}+1} - 1) - 2^{2^{m-S}}\cdot(2^S - 1) + 2^{S-1} =$$

$$= 2^S\cdot 2^{2^{m-S}}\cdot 2 - 2^S -$$
$$- 2^{2^{m-S}}\cdot 2^S + 2^{2^{m-S}} + 2^{S-1} =$$
$$= 2^S\cdot 2^{2^{m-S}}\cdot(2-1) + 2^{2^{m-S}} -$$
$$- 2^{S-1}\cdot(2-1) =$$
$$= 2^S\cdot 2^{2^{m-S}} + 2^{2^{m-S}} - 2^{S-1} =$$
$$= 2^{2^{m-S}}\cdot(2^S + 1) - 2^{S-1}.$$

Отже, формули (21) та (25) (спрощений варіант) є загальними формулами для знаходження складності дерева на $s-$ому етапі мінімізації. З (прикладу 1) та (прикладу 2) відомо, що:

$$2-1: D_S = D_2 = 2^1\cdot 5 - 2,$$

$$2-2: D_S = D_3 = 2^1\cdot 9 - 4,$$

враховуючи (25), отримуємо наступну рівність:

$$2^{2^{m-S}} = 2^1 \tag{26}$$

з якого очевидно випливає (27)

$$\begin{aligned} &2^{m-S} = 1 = 2^0 \\ &m - S = 0 \\ &m = S \end{aligned} \tag{27}$$

але $m-$ ціле число, а отже і $s-$ ціле та нам відомо, що

$$N = 2^m + m \text{ та } N = n + m$$

отже $2^m + m = n + m$,

$$2^m = n \tag{28}$$

Логарифмуючи обидві частини (28) за основою 2, отримуємо наступне співвідношення:

$$\log_2 2^m = \log_2 n$$

$$m = \log_2 n = S \tag{29}$$

і остаточно:

$$S = \log_2 n \tag{30}$$

Тепер, враховуючи формули $D_n = 2^{2^m+1} - 1$ та (25),(29),(30), можна знайти ефект мінімізації. Він буде дорівнювати:

$$\frac{D_0}{D_S} = \frac{2^{2^m+1} - 1}{2^{2^{m-S}}\cdot(2^S+1) - 2^{S-1}} = \frac{2^{2^S+1} - 1}{2^1\cdot(2^S+1) - 2^{S-1}} =$$
$$= \frac{2^{2^S+1} - 1}{2^{S+1} + 2 - 2^{S-1}} = \frac{2^{2^S+1} - 1}{2^{S-1}\cdot(2^2-1) + 2} = \frac{2^{2^S+1} - 1}{2^{S-1}\cdot 3 + 2} =$$

$$=\frac{2^{2^{S}+1}-1}{2^{S-1}\cdot 3+2}=\frac{2^{2^{\log_2 n}+1}-1}{2^{\log_2 n-1}\cdot 3+2}=\frac{2^{n+1}-1}{\frac{n}{2}\cdot 3+2}=$$

$$=\frac{2^{n+1}-1}{\frac{3\cdot n+4}{2}}=\frac{2^{n+2}-2}{3\cdot n+4}=\frac{2^{n+2}}{3\cdot n+4}-\frac{2}{3\cdot n+4}\approx$$

нехай $\frac{2}{3\cdot n+4}=O(n)$, то

$$\approx\frac{2^{n+2}}{3\cdot n+4}+O_1(n)=$$

якщо $O_1(n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, то

$$=\frac{2^{n+2}}{3\cdot n\cdot(1+\frac{4}{3\cdot n})}+O_1(n)=\frac{2^{n+2}}{3\cdot n}\cdot\left(\frac{1}{1+\frac{4}{3\cdot n}}\right)+O_1(n)=$$

$$=\frac{2^{n+2}}{3\cdot n}\cdot\left(\frac{1+\frac{4}{3\cdot n}-\frac{4}{3\cdot n}}{1+\frac{4}{3\cdot n}}\right)+O_1(n)=$$

$$=\frac{2^{n+2}}{3\cdot n}\cdot\left(1-\frac{\frac{4}{3\cdot n}}{1+\frac{4}{3\cdot n}}\right)+O_1(n)=\frac{2^{n+2}}{3\cdot n}\cdot\left(1-\frac{4}{3\cdot n}\right)+O_1(n)=$$

нехай $\frac{4}{3\cdot n}=O_n(n)$, та $O_2(n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

$$=\frac{2^{n+2}}{3\cdot n}\cdot(1+O_2(n))+O_1(n)$$

Отже остаточно: $\frac{D_0}{D_S}=\frac{2^{n+2}}{3\cdot n}\cdot(1+O_2(n))+O_1(n)\approx\frac{2^{n+2}}{3\cdot n}$, при $O_1(n)\to 0$, $O_2(n)\to n$, $n\to 0$.

$$\frac{D_0}{D_S}\approx\frac{2^{n+2}}{3\cdot n} \qquad (31)$$

Висновки

Таким чином, ефект мінімізації $\frac{D_0}{D_S}$ для дерева $D_n\to D_0$ для описаного вище способу мінімізації буде виражатися формулою (31).

Література

1. Василенко, Ю.А. Проблема оцінки складності логічних дерев розпізнавання та загальний метод їх оптимізації / Ф.Г. Ващук, Ю.А. Василенко, І.Ф. Повхан // Науково технічний журнал “European Journal of Enterprise Technologies”. – 2011. – 6/4(54). – С. 24-28.
2. Vasilenko, Yu.A. Construction and optimization of recongnizing systems / Yu. A. Vasilenko, E.Yu. Vasilenko, A.I. Kuhayivsky, I.O. Papp // Науково технічний журнал “Інформаційні технології і системи”. – 1999. – №1(Т2). – С. 122-125.
3. Повхан, І.Ф. Мінімізація логічних деревоподібних структур в задачах розпізнавання образів / І.Ф. Повхан, Ю.А. Василенко, Е.Ю Василенко, М.Й. Ковач, О.Д. Нікарович // Науково технічний журнал “European Journal of Enterprise Technologies”. – 2004. – 3[9]. – С. 12-16.
4. Повхан, І.Ф. Концептуальна основа систем розпізнавання образів на основі метода розгалуженого вибору ознак / І.Ф. Повхан, Ю.А. Василенко, Е.Ю. Василенко // Науково технічний журнал “European Journal of Enterprise Technologies”. – 2004. – 7[1]. – С. 13-15.
5. Василенко, Ю.А. Метод розгалуженого вибору ознак в математичному конструюванні багаторівневих систем розпізнавання образів / Ю.А. Василенко, І.Ф. Повхан, Е.Ю. Василенко // Науково технічний журнал “Штучний Інтелект”. – 2003. – №7. – С. 246-249.
6. Витенько, И.В. Схемы, алгоритмы и многообразия. / И.В. Витенько – Ужгород: Уж. ун-т, 1970. – 97 с.
7. Вітенько, І.В. Математична логіка. / І.В. Вітенько – Ужгород: Уж. ун-т, 1971. – 210 с.