

У роботі представлені чисельні дослідження напружено-деформованого стану будівлі при дії сейсмічного навантаження з урахуванням нелінійного деформування ґрунтів. Розкрито принципи побудови розробленої моделі ґрунту, що враховує особливості деформування при динамічному навантаженні. Моделювання проведено в тривимірній постановці на базі автоматизованої системи наукових досліджень «VESNA-DYN» за модифікованим явним методом

Ключові слова: сейсміка, явний метод, нелінійне моделювання, модель ґрунту, АСНД «VESNA DYN»

В работе представлены численные исследования напряженно-деформированного состояния здания при действии сейсмической нагрузки с учетом нелинейного деформирования ґрунтов. Раскрыты принципы построения составленной модели ґрунта, учитывающей особенности деформирования при динамическом нагружении. Моделирование проведено в трехмерной постановке на базе автоматизированной системы научных исследований «VESNA-DYN» по модифицированному явному методу

Ключевые слова: сейсмика, явный метод, нелинейное моделирование, модель ґрунта, АСНИ «VESNA DYN»

УДК 624.159:004.94

DOI: 10.15587/1729-4061.2014.33652

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КОНСТРУКЦИЙ ЗИМНЕНСКОГО МОНАСТЫРЯ С ГРУНТОВЫМ ОСНОВАНИЕМ ПРИ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

В. А. Сахаров

Кандидат технических наук, доцент
Кафедра оснований и фундаментов
Киевский национальный университет
строительства и архитектуры
пр. Воздухофлотский, 31, г. Киев, Украина, 03680
E-mail: vladland@gmail.com

1. Введение

Проектирование и анализ работы зданий в сейсмически опасных районах требует специальной оценки влияния возможных землетрясений на их эксплуатационные характеристики и несущую способность. Согласно данным Института геофизики НАН Украины [1] около 12 % территории Украины относятся к сейсмически опасным территориям. Прогнозируемая интенсивность сейсмического воздействия на этих участках составляет около 6...8 и выше баллов по шкале MSK-64.

Принимая во внимание, что невозможно заранее предусмотреть параметры землетрясения (такие как спектр, интенсивность, направление и длительность воздействия), при исследованиях необходимо проводить и без того сложный анализ поведения зданий на ґрунтовом основании при различных параметрах динамической нагрузки. Решение этих задач, как правило, осуществляется с помощью численного моделирования взаимодействия элементов системы «основание – фундамент – здание» с привлечением современных компьютерных ресурсов.

ґрунтовый массив обладает большой массой, инерцией, ярко выраженными нелинейными механическими и диссипативными свойствами. Кроме этого, для оценки реального распределения НДС в конструкциях и возможного их частичного разрушения без потери несущей способности во многих случаях необходимо

учитывать влияние нелинейных свойств конструктивных материалов.

2. Анализ литературных данных и постановка проблемы

При моделировании ґрунтового массива, кроме проблемы выбора моделей поведения и определения исходных данных есть проблема, связанная с необходимостью многократного решения систем уравнений высокого порядка, что требует больших компьютерных ресурсов. В результате расчеты на сейсмические воздействия проводятся по аналитическим эмпирическим зависимостям [2], спектральному методу или на основе модального анализа с разложением перемещений в неполный спектр по собственным формам. При этом поведение ґрунтов игнорируется [3], ограничивается использованием упрощенных моделей на базе моделей Винклера, жесткости основания и т. п. [4], которые не позволяют учесть реальные свойства ґрунтового основания.

При анализе заглубленных сооружений вязкие и жесткостные параметры ґрунтов во многом определяют напряженное состояние и смещение конструкций [5]. Для зданий влияние затуханий колебаний в ґрунтах приводит к некоторому уменьшению сейсмического влияния [6]. Также в работе отмечается, что в отдельных случаях накопленные в процессе эксплуа-

тации зданий повреждения могут приводить к увеличению реакции здания на сейсмические нагрузки.

С использованием модели объемного вязкоупруго-грунтового массива (и конструкций) можно исследовать особенности динамического поведения здания и влияние некоторых видов демпферов [7]. Пренебрежение массой грунта приводит к потере инерционных свойств грунтового массива и вносит значительные погрешности в характер поведения системы не в запас прочности [8]. Такой подход не позволяет определить осадку или положение сооружения после окончания сейсмической нагрузки, а также ряд других факторов, которые имеют существенное влияние на формирование НДС [9]. В работе [10] указывается, что учет упруго-пластической работы грунта позволяет приблизить результаты к динамическим натурным испытаниям. Для уменьшения порядка систем уравнений и учета нелинейных свойств также прибегают к решению задач с использованием подконструкций [11].

3. Цель и задачи исследования

Современные архитектурные решения по зданиям и сооружениям, которые возводятся в сейсмически опасных районах, требуют проведения детального анализа напряженно-деформированного состояния конструкций и основания на всех этапах строительства. Это значительно превышает возможности упрощенных методов нормативной базы. Проведение такого анализа возможно только с применением передовых методов численного моделирования, адекватных моделей поведения сред и корректных данных по параметрам основания и нагрузок.

Целью данной работы является исследование НДС несущих конструкций здания в составе системы «основание – здание – сооружение» при действии сейсмических нагрузок с учетом нелинейного деформирования грунтов.

Для достижения цели необходимо решить следующие задачи:

- разработать модель грунта, учитывающей особенности нелинейного поведения основания при динамических, в т.ч. сейсмических нагрузках;
- разработать и применить методы, позволяющие эффективно проводить решение систем нелинейных уравнений высокого порядка на базе МКЭ;
- выполнить численное моделирование и анализ НДС при взаимодействии здания с нелинейным основанием при действии сейсмической нагрузки.

4. Структура разработанной модели грунта

Для описания поведения грунтового основания при сейсмических нагрузках использована новая модель поведения, которая базируется на известных разработках. Опираясь на работы [12–14] и др. рассмотрим основные факторы, позволяющие детально описать процессы деформирования грунтовой среды в условиях сложного напряженного состояния при динамических нагрузках. Общей чертой для грунтов является то, что они по разному сопротивляются сжатию и растяжению. В начале нагрузки, когда структурная прочность грунта не

нарушена, грунт деформируется как линейно-упругое вязкое изотропное тело со «структурным» модулем упругости. Характерными особенностями динамического поведения материала на этом этапе является увеличение упругого сопротивления материала при увеличении скорости деформации и существование границы скорости, при превышении которой материал ведет себя как упругий с конечным значением динамического модуля упругости [15]. В случае растяжения, сжатия или сдвига, когда достигается предельный уровень касательных напряжений, деформирование грунта сопровождается нарушением структурной прочности. Далее необратимые деформации могут возникать как при сдвиге, так и сжатии. При превышении уровня напряжений сжатия связи между твердыми частицами скелета разрушаются, происходят хаотические микро сдвиги и «переупаковка» частиц, которые сопровождаются появлением как упругих, так и значительных пластических объемных деформаций, уплотнением и уменьшением коэффициента пористости материала. Процесс объемной пластической сжимаемости при этом всегда ограничен предельной плотностью материала.

При превышении предельного состояния от действия касательных напряжений реализуются пластические деформации сдвига, которые непосредственно не приводят к изменению объема. Однако при определенных условиях могут сопровождаться «переупаковкой» слоев грунта и появлением остаточных деформаций с увеличением (дилатансии) или уменьшением (контрактансии) объема. Пластические деформации сдвига в отличие от объемных деформаций не имеют физических ограничений по величине. Таким образом, при нарушении структурной прочности грунт переходит в новую фазу работы как вязко-упруго-пластический материал.

Для моделирования динамического поведения грунта в соответствии с описанными свойствами была разработана и реализована новая модель грунта [16], учитывающая его реальную работу при динамических нагрузках. Графически она может быть представлена в виде обобщенной структурно-реологической модели (рис. 1), в основу которой положена вязкоупругая модель Кельвина [13].

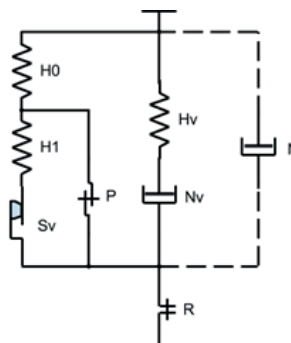


Рис. 1. Структурно-реологическая модель вязко-упруго-пластического деформирования грунта при динамических нагрузках

При деформировании грунта под влиянием динамических колебаний значительную роль играют внутренние и внешние процессы, связанные с рассе-

иванием энергии. Для основания, как и для большинства строительных конструкций, главную роль играют силы внутреннего сопротивления, обусловленные реологическими особенностями работы материалов, для учета которых предназначена вторая ветвь модели (рис. 1). Элементы «Н0», «Нv» и «Nv», «Н1» характеризуют вязкоупругую работу грунта. Хрупкий элемент «Р» позволяет учесть наличие структурной прочности, нарушение которой наделяет грунт упругопластическими свойствами по цепочке «Н0»-«Н1»-«Sv». Третья ветвь с вязким элементом «N», характеризует излучение энергии только на внешних поверхностях грунта за счет взаимодействия с окружающей средой. Элемент «R» моделирует разрыв грунта.

Для описания упруго пластических свойств грунта использованы теоретические соотношения [14]. Процессы, характерные для изменения объема, определяются компрессионными испытаниями. Предельное состояние грунта описывается комбинированной граничной поверхностью, основанной на критериях Кулона-Мора, Мизеса-Шлейхера-Боткина и Мизеса приведена в [16].

Определение величины пластических деформаций при переходе грунта через предельное состояние проводится согласно неассоциированному закону пластического течения Николаевского [17]. При этом коэффициент дилатансии Λ является функцией плотности грунта ρ и может принимать как положительные (дилатансия), так и отрицательные (контрактансия) значения. Зависимость $\Lambda = \Lambda(\rho)$ следует определять для каждого грунта на базе экспериментальных исследований. В случае отсутствия таких данных можно воспользоваться соотношениями, которые отражают качественную картину процесса дилатансии в зависимости от текущей ρ и критической ρ^* плотности грунта (1):

$$\begin{aligned} \Lambda &= -\sqrt{1-\rho/\rho^*} & \text{при } \rho < \rho^*, \\ \Lambda &= \sqrt{1-\rho^*/\rho} & \text{при } \rho \geq \rho^*. \end{aligned} \quad (1)$$

Внутренние процессы потери энергии, определяющие затухание при данных исследованиях описывались в соответствии с моделью Рэлея [18]. Значения динамических параметров определяются экспериментально. При отсутствии такой возможности параметры могут быть приближенно определены по декременту колебаний.

К внешним причинам рассеивания энергии относится взаимодействие системы с элементами окружающей среды – окружающий грунт, воздух, специальные демпфирующие устройства, системы сейсмоизоляции и т. д., предназначенные для гашения колебаний. В данной работе использован один из распространенных вариантов учета излучения энергии во внешнее пространство – метод предельного демпфирования, предложенный Лизмером, который строится на использовании вязкого демпфирования на пограничных элементах.

Разработанная модель позволяет описать картину взаимного функционирования процессов деформирования песчаных и глинистых грунтов под действием комбинации динамических и статических нагрузок. Модель предусматривает использование зависимо-

стей, полученных на базе экспериментальных исследований по известным методикам. Однако в случае частичного или полного отсутствия таких данных модель может быть реализована с использованием нормативных или других известных параметров и закономерностей.

5. Методика решения задач высокого порядка

Для современных задач моделирование динамических процессов взаимодействия зданий и сооружений с грунтовым основанием с учетом нелинейных процессов деформирования требует многократного решения систем уравнений высокого порядка. В этих условиях необходимо использование эффективных алгоритмов и современных компьютерных систем. Характер деформирования грунтового основания является нелинейным и применение неявных методов (например, метод Ньюмарка), приводит к значительным временным затратам. В этих условиях целесообразно использование явных методов, таких как метод центральных разностей. Данный метод при его численной реализации удобный для использования механизмов распараллеливания, что позволяет максимально использовать предоставленные компьютерные ресурсы. Так проведение вычислений на 6-ти параллельных потоках позволило получить более чем 4-х кратное уменьшение времени расчета при неизменном шаге и точности [19].

Значительным недостатком явного метода есть неоправданно малый шаг интегрирования, который обусловлен требованием устойчивости численного процесса. Особенно этот недостаток проявляется при исследовании неоднородных сред. При расчетах реакции сооружений на сейсмическое влияние рациональный шаг интегрирования должен выбираться, исходя из необходимости правильного отображения процесса колебаний основания. Но из условия устойчивости шаг назначается пропорционально минимальному периоду колебаний всей системы. В результате чего шаг по времени, соответствует высшим частотам колебаний наиболее жестких частей здания, а не основания, что существенно увеличивает время расчета.

В данной работе предложена методика компенсации указанного недостатка за счет использования не одного, а нескольких шагов интегрирования по времени в зависимости от свойств уравнений МКЭ [19]. Это позволяет увеличить средний шаг по времени и таким образом значительно повысить эффективность явного метода при интегрировании уравнений МКЭ.

Сущность методики заключается в том, что по определенному критерию система уравнений МКЭ делится на n групп и для каждой группы назначается свой шаг Δt_i , ($i=0,1,2,3,\dots,n$), который должен удовлетворять условию устойчивости численного процесса для своей группы уравнений и условию кратности $\Delta t_i = m^i \Delta t_0$, где m – целое число (в данной работе $m=2$). Количество групп выбираются на базе экспериментов из условия устойчивости всего процесса интегрирования.

Разработанная модификация явного метода центральных разностей реализована и апробирована в рамках автоматизированной системы научных исследу-

дований (АСНИ) «VESNA-DYN» [19, 20]. Для решенных в данной работе задач динамики использовалось до 6 дискретных шагов.

6. Исследование напряженно-деформированного состояния конструкций Храма при сейсмических нагрузках

Распределение НДС в фундаментах при взаимодействии конструкций здания с основанием при сейсмических нагрузках преимущественно определяется свойствами грунтового основания, жесткостью и массой конструкций. Использование массивных конструкций стен и жестких фундаментов, особенно в сложных инженерно-геологических условиях, позволяют получить более равномерную осадку конструкций. При этом для динамических свойств системы в целом повышение жесткости здания приводит к повышению собственных частот колебаний, что влияет на характер колебаний и взаимодействие конструкций с основанием при сейсмических нагрузках.

Исследования особенностей поведения конструкций данного класса было проведено на примере Успенского собора Свято-Успенского Святогорского Зимненского женского монастыря на Волыни. В последнее время в монастыре проводились работы по усилению фундаментов. Учитывая, что по сегодняшним требованиям территория отнесена к сейсмически опасной было исследовано влияние сейсмического воздействия на конструкции собора.

Храм представляет собой массивную конструкцию с контурными стенами и колоннами. Потолок образован кирпичными сводами. С внешней стороны на полную высоту стен устроены контрфорсы, воспринимающие распорные усилия сводов. В верхней части расположены пять куполов с металлическим каркасом на кирпичных барабанах (цилиндрическая часть). Конструкции подбарабанников представляют собой железобетонные балки в форме восьмигранника, что обеспечивает равномерную передачу нагрузки от барабана на стены и колонны. Здание монастыря построено на фундаментах мелкого заложения из кирпича, которые переходят в конструкции стен и колонн. Размеры в плане составляют около 30x20 м, а высота около 30 м.

Грунтовые условия представлены слоями лессовых супесков, суглинков, которые подстилаются меловыми отложениями. С поверхности расположены насыпные грунты мощностью до 3,0 м. Сейсмичность территории отнесена к 6 баллам (MSK-64) [21].

Расчеты проводились в трехмерной постановке средствами АСНИ «VESNA-DYN» по модифицированному методу центральных разностей (параллельные вычисления и переменный шаг интегрирования по пространству). Составленная конечно-элементная модель представлена на (рис. 2) насчитывала 804114 уравнений. Общий вес конструкций составил около 7800 т.

Размеры в плане и по высоте расчетной части грунтового массива составили 95x85 и 32 м. Грунтовый массив задавался в соответствии с приведенными характеристиками грунтов как нелинейная вязко упругопластическая среда. Материалы каменных (кирпичных) конструкций стен, колонн и сводов рассматривались как объемные сплошные конструкции.

В процессе динамического нагружения потери энергии, связанные с затуханием колебаний, обусловленные вязким трением, накоплением повреждений и т.д. учитываются в рамках модели Кельвина, на основе декремента колебаний ($E_k=2550$ МПа; $\rho=0,15$; $\nu=1,8\text{т/м}^3$; $\delta=0,3$).

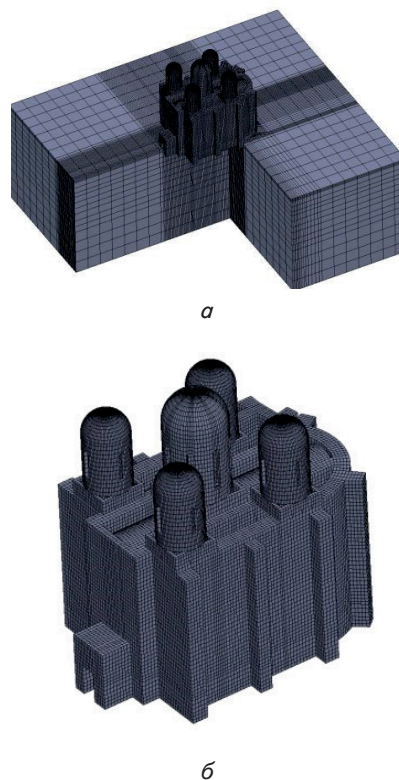


Рис. 2. Конечно-элементная модель Храма, как системы «основание – фундамент – здание»: а – общая модель; б – модель Храма.

В качестве сейсмической нагрузки были использованы трехкомпонентные (уравновешенные) акселерограммы из стандартного набора акселерограмм [21] (vb8). Моделирование проводилось в течение 20 с, из них 15 с действовала нагрузка. Продольное направление нагрузки ориентировано поперек здания.

Минимальный шаг интегрирования составил 0.025 мс, а по использованной методике 0.039 мс. При семи параллельных потоках на базе ПК (Core i7, 3.5 ГГц, RAM 32 Гб) решение задачи было достигнуто за 18 ч.

В результате моделирования были получены следующие результаты. В процессе действия нагрузки вследствие высокой жесткости и массивности конструкций наблюдалась симметрия колебаний противоположных частей здания за счет деформаций грунта. Существенных деформаций в конструкциях не наблюдалось. Как видно из графика (рис. 3) на протяжении действия сейсмической нагрузки в поперечном направлении, где жесткость сооружения меньше, амплитуда колебаний быстро нарастала. На 3-й, а после на 9 и 11 секундах на верхних точках стен отклонение от начального состояния достигало от 16 до 20 см, что соответствовало около 10 см относительно фундамента. Фазы колебаний нижней и верхней части здания совпадают. Такое поведение соответствует колебаниям вокруг «оси», расположенной ниже подошвы фундаментов. Максимальное отклонение здания на 11 секун-

де привело к превышению прочности грунтов в зоне фундаментов северной стены. С противоположной стороны зоны пластичности грунта носили локальный характер. Это послужило к формированию (на 13 с) неравномерных осадок и формированию крена собора. После окончания активного действия динамической нагрузки (после 15 с) наблюдались свободные быстро затухающие колебания.

В продольном направлении здания амплитуда была в два раза меньше и носила равномерный симметричный характер. Амплитуда вертикальных колебаний в основном не превышала 2 см с отдельными экстремумами до 3,6 см. Остаточная максимальная осадка фундаментов северной стены составила 0,8 см. Центральная часть здания не получила дополнительной осадки.

Анализ напряженного состояния здания при сейсмической нагрузке с интенсивностью 6 баллов показал, что в кирпичной кладке прогнозируются зоны образования микротрещин, однако кладка преимущественно находится в рабочем диапазоне ожидаемой прочности (рис. 4). В фундаментах основания контурных участков контрфорсов Храма зафиксированы локальные участки концентрации напряжений, где прогнозируется частичное превышение прочности. Фундаменты входной части (притвора) с внешней и внутренней стороны имеют участки, где напряжения сжатия по всему сечению достигало 1,5 МПа и выше, что позволяет ожидать образования зон раздавленной кладки и нарушения целостности сечения. Однако это не приводит к изменению общей несущей способности фундамента.

связанных с раздавливанием материала кладки. Такой характер распределения усилий объясняется устройством центральных колонн на отдельных фундаментах, что в процессе колебаний может приводить к перемещениям, несовпадающим с близлежащими несущими конструкциями.

Зоны растяжений (свыше 0.16 МПа), способствующих трещинообразованию были зафиксированы на участках сводов и конструкций стен притвора.

Следует отметить, что анализ НДС Храма в целом от действия сейсмической нагрузки с интенсивностью 6 баллов показал, что прогнозируемые повреждения носят локальный характер и не приводят к потере прочности конструкций в целом.

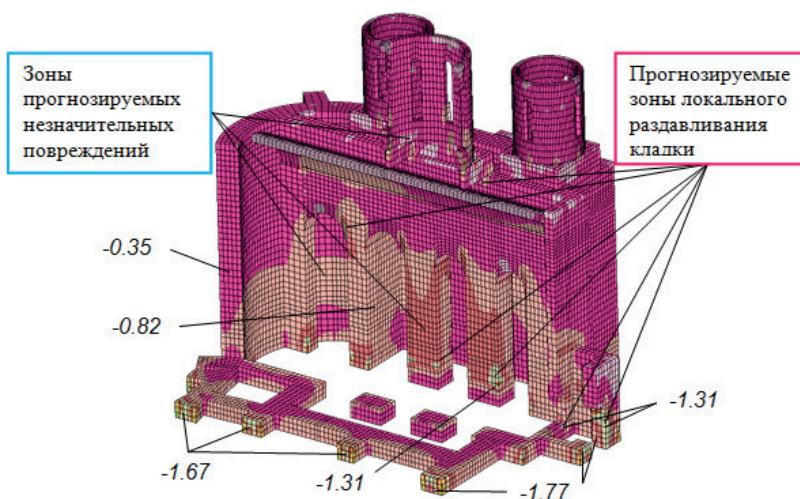


Рис. 4. Изополю огибающих напряжений сжатия (МПа) и прогнозируемых зон трещинообразования.

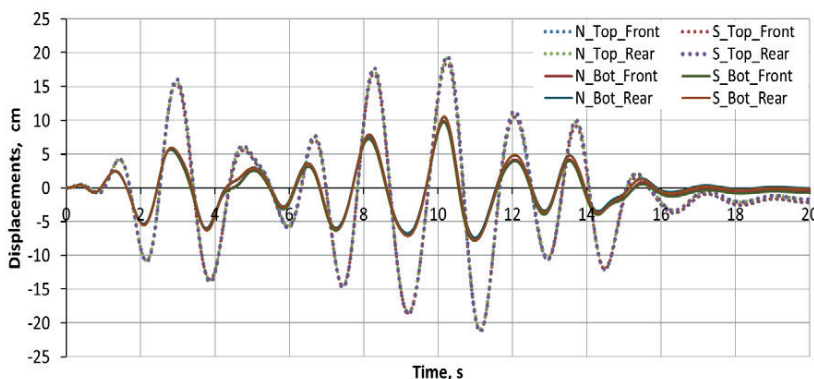


Рис. 3. Горизонтальные колебания Храма в поперечном направлении

В нижней половине конструкций стен и колонн уровень напряжений достигал 0,45–1,2 МПа, что может приводить к образованию микротрещин. Основание колонн и некоторых участков контурных стен, зоны опирания подбарабанников на колонны, а также в местах основания большинства арок, соединяющих нефы, уровень напряжений достигал 1,3–1,5 МПа, где можно ожидать повреждений,

наибольшие повреждения возникают в местах опирания подбарабанника на колонны, в нижней части колонн, некоторых участках стен, а также в конструкциях притвора.

Выявлено, что НДС фундаментных конструкций преимущественно находится в пределах рабочего диапазона деформаций, за исключением локальных зон опирания контрфорсов и участков со стороны входа.

7. Выводы

По результатам проведенных исследований на примере Успенского собора Зимненского монастыря, получено, что реальное напряженно-деформированное состояние конструкций и основания при действии сейсмических нагрузок, может быть спрогнозировано только с учетом нелинейной работы грунтового массива.

Обнаружено, что в результате действия динамических нагрузок в конструкциях Храма возникают значительные зоны микро- и макротрещин, которые могут приводить к локальным нарушениям прочности конструкций.

По результатам проведенных исследований наибольшие повреждения возникают в местах опирания подбарабанника на колонны, в нижней части колонн, некоторых участках стен, а также в конструкциях притвора.

Выявлено, что НДС фундаментных конструкций преимущественно находится в пределах рабочего диапазона деформаций, за исключением локальных зон опирания контрфорсов и участков со стороны входа.

Проведенные исследования показали, что полученное распределение НДС и прогнозируемые повреждения Храма, обнаруженные в конструкциях вследствие

действия статических и сейсмических нагрузок (до 6 баллов), не приводят к аварийной ситуации и принципиального изменения в работе несущих конструкций.

Литература

1. Кендзера, А. В. Прогнозирование опасных сейсмических событий как обобщенный метод сейсмического районирования [Электронный ресурс] / А. В. Кендзера, П. И. Пигулевский, С. В. Щербина. – Geophysical scientific publications. – Режим доступа: <http://www.seismo.kiev.ua/>
2. Глазунов, Ю. В. Исследование динамического воздействия на сооружения городской застройки, расположенные вблизи трасс метро [Текст] / Ю. В. Глазунов // Коммунальное хозяйство городов. – 2004. – Вып.55. – С. 271–276.
3. Барабаш, М.С. Особливості конструктивних рішень, які можуть застосовуватися до споруд каркасного типу для будівництва в сейсмічних районах [Текст] / М. С. Барабаш, Т. Л. Дармороз // Вісник НАУ. – 2008. – № 3. – С. 160–162.
4. Петренко, В. Д. Сравнительный анализ методов расчета свайных фундаментов при статических и динамических нагрузках [Текст] / В. Д. Петренко, А. Л. Тюткин, М. Б. Стоичева // Наука та прогрес транспорту Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту. – 2014. – Вып. 50. – С. 194–197.
5. Dwivedi, J. P. Dynamic response of partially sealed circular tunnel in viscoelastic soil condition [Text] / J. P. Dwivedi, V. P. Singh, R. K. Lal // Bulletin of applied mechanics. – 2011. – Vol. 7, Issue 26. – P. 37–45.
6. Банах, В. А. Динамічні впливи при реконструкції будівель і споруд та їх моделювання для складних інженерно-геологічних умов експлуатації [Текст] / В. А. Банах // Коммунальное хозяйство городов. : Науч.-техн. сб. Техніка. – 2012. – Вып.105. – С. 157–162
7. Гетун, Г. В. Дослідження впливу сейсмоізоляції на напружено-деформований стан висотної будівлі під дією сейсмічних навантажень [Текст] / Г. В. Гетун, В. О. Сахаров, В. А. Мельник // Світ геотехніки: Науково-технічний журнал. – 2013. – Вып.2 (38). – С. 18–23.
8. Мазен, Р. К вопросу о влиянии слоистости основания на усилия в элементах перекрытий для многоэтажных монолитных железобетонных зданий при сейсмических воздействиях [Текст] / Р. Мазен // Коммунальное хозяйство городов.: Науч.-техн. сб. Техніка. – 2009. – Вып. 86. – С. 78–98.
9. Boyko, I. P. Behavior of the multi-story building under seismic loads with the account of the viscoplasticity of the soil base [Text] / I. P. Boyko, O. S. Sakharov, V. O. Sakharov // Proceedings International Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering. – 2013 – Vol. 2. – P. 1443–1446.
10. Бандуріна, О. В. Методика визначення осідань фундаментів від динамічного впливу [Текст] / О. В. Бандуріна // Наука та прогрес транспорту. Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту. – 2010. – Вып. 32. – С. 18–20.
11. Mengke, L. Influence of soil–structure interaction on seismic collapse resistance of super-tall buildings [Text] / L. Mengke, L. Xiao, L. Xinzheng, Y. Lieping // Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering. – 2014. – Vol. 6, Issue 5. – P. 477–485. doi: 10.1016/j.jrmge.2014.04.006.
12. Гольдштейн, М. Н. Механические свойства грунтов [Текст] / М. Н. Гольдштейн. – М.: Стройиздат, 1971. – 368 с.
13. Ржаницын, А. Р. Теория ползучести [Текст] / А. Р. Ржаницын. – М.: Стройиздат, 1968. – 418 с
14. Терцаги, К. Теории механики грунтов [Текст] / К. Терцаги. – М.: Госстройиздат, 1961. – 507 с.
15. Красников, Н. Д. Динамические свойства грунтов и методы их определения [Текст] / Н. Д. Красников. – Л.: Стройиздат, 1970. – 240 с.
16. Сахаров, В. О. Модель нелінійного деформування ґрунтової основи при сейсмічних навантаженнях [Текст] / В. О. Сахаров // Основи та фундаменти. Міжвід. наук.-техн. зб. – 2013. – Вып. 33. – С. 34–46.
17. Николаевский, В. Н. Определяющие уравнения пластического деформирования сыпучей среды [Текст] / В. Н. Николаевский // Прикл. мат. и мех. – 1971. – Т. 35, № 6. – С. 1070–1082.
18. Смирнов, А. Ф. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений [Текст] / А. Ф. Смирнов, А. В. Александров, Б. Я. Лащеников, Н. Н. Шапошников. – М.: Стройиздат, 1984. – 416 с.
19. Сахаров, В. О. Модифікація явного методу для ефективного розв'язання нелінійних задач геотехніки [Текст] / В. О. Сахаров // Основи та фундаменти. Міжвід. наук.-техн. зб. КНУБА. – 2014. – Вып.35. – С. 116–126.
20. Sakharov, V. An investigation of system “soil base-foundation-structure” response to seismic forces with provision for nonlinear properties of materials [Text] / V. Sakharov. – Proceedings of the X Conference „Konstrukcje zespolone”, Poland – Zielona Góra, 2014. – P. 407–426.
21. ДБН В.1.1-12:2006. Строительство в сейсмических регионах Украины [Текст] / К.: Минстрой Украины, 2006. – 52 с.