

Отримано друге наближення для кута прецесії і залежності амплітуд та частот коливань від параметрів одночасних поступальних та кутових вібрацій основи

Ключові слова: прецесія, рекурентний, вібрації основи

Получено второе приближение для угла прецессии и зависимости амплитуд и частот колебаний от параметров одновременных поступательных и угловых вибраций основы

Ключевые слова: прецессия, рекурентный, вибрации основы

The second approximation for precession angle and dependences of amplitudes and frequencies from parameters of simultaneous translational and angular vibrations are given

Keywords: precession, recurrent, basis vibrations

# ДОСЛІДЖЕННЯ ПАРАМЕТРІВ РУХУ ДВОГІРОСКОПНОГО ГРАВІМЕТРА ПРИ ПОСТУПАЛЬНИХ ТА КУТОВИХ ВІБРАЦІЯХ ОСНОВИ

**О.М. Безвесільна**

Заслужений діяч науки і техніки України, доктор технічних наук, професор

Кафедра приладобудування  
Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут"

пр. Перемоги 37, м. Київ, Україна, 03056

Контактний тел.: (044) 236-09-26

E-mail: bezvesilna@mail.ru

**А.В. Коваль**

Аспірант

Кафедра автоматизації і комп'ютеризованих технологій  
Житомирський державний технологічний університет  
вул. Черняхівського 103, м. Житомир, Україна, 10005

Контактний тел.: 093-772-08-88

E-mail: koval.anton@gmail.com

## Вступ

Відомо, що на вихідний сигнал гравіметра авіаційної гравіметричної системи (АГС) впливає рух основи [1].

Метою даної роботи дослідити вплив параметрів вібрацій основи (поступальних та кутових) на вихідний сигнал двогіроскопного гравіметра (ДГ). Отримати аналітичний вираз.

## Основна частина

Скористаємось прецесійними рівняннями руху стабілізованого ДГ [1]:

$$\begin{aligned} H\dot{\beta} + c_1\dot{\alpha} + k_1\beta &= -H\omega_x - H\omega_y\alpha, \\ c_2\dot{\beta} - H\dot{\alpha} - k_2\alpha &= \\ &= -ml \cdot g - ml \cdot w_z + ml \cdot w_y\beta - H\omega_y\beta + H\omega_z, \end{aligned} \quad (1)$$

З урахуванням [1] система (1) набуде вигляду:

$$\begin{aligned} H\dot{\beta} + c_1\dot{\alpha} + k_1\beta &= \\ &= -H\theta_0 \hat{\omega} \cos(\hat{\omega}t + \hat{\delta}_2) - H\Psi_0 \hat{\omega} \cos(\hat{\omega}t + \hat{\delta}_1)\alpha, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_2\dot{\beta} - H\dot{\alpha} - k_2\alpha &= -ml \cdot g - ml \cdot (-\tilde{w}_a \sin \hat{\omega}t + \hat{w}_a \sin \hat{\omega}t) + \\ &+ ml \cdot (-\tilde{w}_b \sin(\hat{\omega}t + \tilde{\epsilon}_1) + \hat{w}_b \sin(\hat{\omega}t + \hat{\epsilon}_1))\beta - \\ &- H\Psi_0 \hat{\omega} \cos(\hat{\omega}t + \hat{\delta}_1)\beta + \\ &+ H\Phi_0 \hat{\omega} \cos \hat{\omega}t. \end{aligned} \quad (2)$$

Для розв'язання системи (2) оберемо метод послідовних наближень [2], користуючись рекурентними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} H\dot{\beta}_{k+1} + c_1\dot{\alpha}_{k+1} + k_1\beta_{k+1} &= \\ &= -H\theta_0 \hat{\omega} \cos(\hat{\omega}t + \hat{\delta}_2) - H\Psi_0 \hat{\omega} \cos(\hat{\omega}t + \hat{\delta}_1)\alpha_k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_2\dot{\beta}_{k+1} - H\dot{\alpha}_{k+1} - k_2\alpha_{k+1} &= \\ &= -ml \cdot g - ml \cdot (-\tilde{w}_a \sin \hat{\omega}t + \hat{w}_a \sin \hat{\omega}t) + \\ &+ ml \cdot (-\tilde{w}_b \sin(\hat{\omega}t + \tilde{\epsilon}_1) + \hat{w}_b \sin(\hat{\omega}t + \hat{\epsilon}_1))\beta_k - \\ &- H\Psi_0 \hat{\omega} \cos(\hat{\omega}t + \hat{\delta}_1)\beta_k + \\ &+ H\Phi_0 \hat{\omega} \cos \hat{\omega}t, \end{aligned}$$

де  $k=0,1,2,\dots$

Нульове наближення  $\alpha_0$  і  $\beta_0$  є розв'язком наступної системи диференціальних рівнянь:

$$H\dot{\beta}_0 + c_1\dot{\alpha}_0 + k_1\beta_0 = -H\theta_0\hat{\omega}\cos(\hat{\omega}t + \hat{\delta}_2),$$

$$c_2\dot{\beta}_0 - H\dot{\alpha}_0 - k_2\alpha_0 = -ml \cdot g - ml \times (-\tilde{w}_a \sin \tilde{\omega}t + \hat{w}_a \sin \hat{\omega}t) + H\varphi_0 \hat{\omega} \cos \hat{\omega}t$$

Наступне наближення для кута прецесії  $\alpha_1(t)$  буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) = & \tilde{A}_{\alpha_1} \sin(\tilde{\omega}t + \tilde{\Omega}_{w_1} + \tilde{\Phi}_{\alpha_1}) + \\ & + \tilde{A}_{\alpha_2} \sin(2\tilde{\omega}t + \tilde{\epsilon}_1 + \tilde{\Phi}_{\beta_0} + \tilde{\Omega}_{w_2} + \tilde{\Phi}_{\alpha_2}) + \\ & + \hat{A}_{\alpha_1} \sin(\hat{\omega}t + \tilde{\Omega}_{w_3} + \hat{\Phi}_{\alpha_1}) + \hat{A}_{\alpha_2} \sin(2\hat{\omega}t + \tilde{\Omega}_{w_4} + \hat{\Phi}_{\alpha_2}) + \\ & + \hat{A}_{\alpha_3} \sin((\tilde{\omega} - \hat{\omega})t + \tilde{\Omega}_{w_5} + \hat{\Phi}_{\alpha_3}) + \\ & + \hat{A}_{\alpha_4} \sin((\tilde{\omega} + \hat{\omega})t + \tilde{\Omega}_{w_6} + \hat{\Phi}_{\alpha_4}) + \langle \alpha_1 \rangle_{\text{уст}} \end{aligned}$$

де

$$\tilde{A}_{\alpha_1} = \frac{\tilde{A}_{w_1}}{H^2 \sqrt{(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)^2 + (2n\tilde{\omega})^2}},$$

$$\tilde{\Phi}_{\alpha_1} = \text{atan2}((\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2), -2n\tilde{\omega}),$$

$$\tilde{A}_{\alpha_2} = \frac{\tilde{A}_{w_2}}{H^2 \sqrt{(\omega_0^2 - 4\tilde{\omega}^2)^2 + (4n\tilde{\omega})^2}},$$

$$\tilde{\Phi}_{\alpha_2} = \text{atan2}((\omega_0^2 - 4\tilde{\omega}^2), -4n\tilde{\omega}),$$

$$\hat{A}_{\alpha_1} = \frac{\hat{A}_{w_3}}{H^2 \sqrt{(\omega_0^2 - \hat{\omega}^2)^2 + (2n\hat{\omega})^2}},$$

$$\hat{\Phi}_{\alpha_1} = \text{atan2}((\omega_0^2 - \hat{\omega}^2), -2n\hat{\omega}),$$

$$\hat{A}_{\alpha_2} = \frac{\hat{A}_{w_4}}{H^2 \sqrt{(\omega_0^2 - 4\hat{\omega}^2)^2 + (4n\hat{\omega})^2}},$$

$$\hat{\Phi}_{\alpha_2} = \text{atan2}((\omega_0^2 - 4\hat{\omega}^2), -4n\hat{\omega}),$$

$$\hat{A}_{\alpha_3} = \frac{\hat{A}_{w_5}}{H^2 \sqrt{(\omega_0^2 - (\tilde{\omega} - \hat{\omega})^2)^2 + (2n(\tilde{\omega} - \hat{\omega}))^2}},$$

$$\hat{\Phi}_{\alpha_3} = \text{atan2}((\omega_0^2 - (\tilde{\omega} - \hat{\omega})^2), -2n(\tilde{\omega} - \hat{\omega})),$$

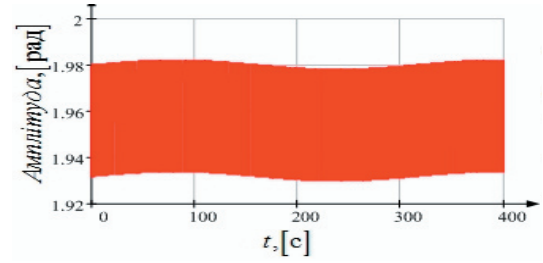
$$\hat{A}_{\alpha_4} = \frac{\hat{A}_{w_6}}{H^2 \sqrt{(\omega_0^2 - (\tilde{\omega} + \hat{\omega})^2)^2 + (2n(\tilde{\omega} + \hat{\omega}))^2}},$$

$$\hat{\Phi}_{\alpha_4} = \text{atan2}((\omega_0^2 - (\tilde{\omega} + \hat{\omega})^2), -2n(\tilde{\omega} + \hat{\omega})).$$

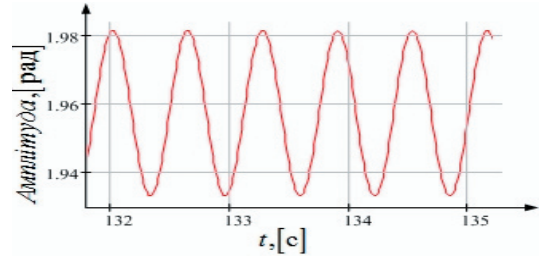
$$\begin{aligned} \langle \alpha_0 \rangle_{\text{уст}} = & \frac{ml \cdot g}{k_2} + \frac{H}{c_1} \left[ \tilde{A}_{\beta_0} \sin \tilde{\Phi}_{\beta_0} + \hat{A}_{\beta_0} \sin(\hat{\Sigma}_0 + \hat{\Phi}_{\beta_0}) \right] + \\ & + \frac{k_1 \tilde{A}_{\beta_0}}{c_1 \tilde{\omega}} \cos \tilde{\Phi}_{\beta_0} + \frac{k_1 \hat{A}_{\beta_0}}{c_1 \hat{\omega}} \cos(\hat{\Sigma}_0 + \hat{\Phi}_{\beta_0}) + \frac{H\theta_0}{c_1} \sin \hat{\delta}_2 \cdot \\ & + \frac{k_1 \tilde{A}_{\beta_0}}{c_1 \tilde{\omega}} \cos \tilde{\Phi}_{\beta_0} + \frac{k_1 \hat{A}_{\beta_0}}{c_1 \hat{\omega}} \cos(\hat{\Sigma}_0 + \hat{\Phi}_{\beta_0}) + \frac{H\theta_0}{c_1} \sin \hat{\delta}_2 \cdot \end{aligned}$$

Зауважимо, що знаки “~” та “^” відносяться відповідно до поступальних та кутових збурень.

Моделювання за отриманими формулами наведено на рис. 1 – 6.

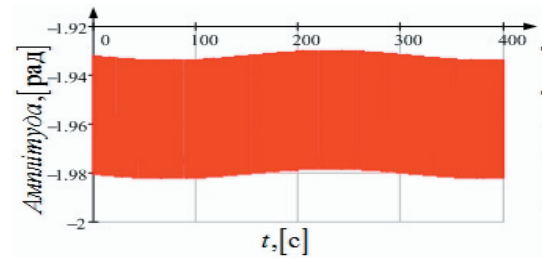


а)

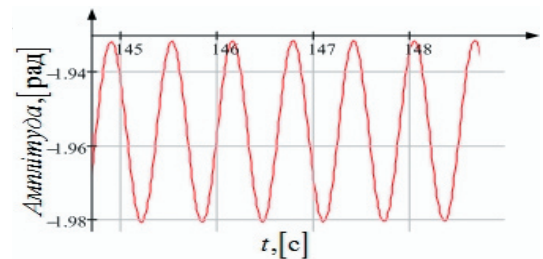


б)

Рис. 1. а) залежність кута прецесії в часі при додатних  $H$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ ; б) фрагмент залежності а)

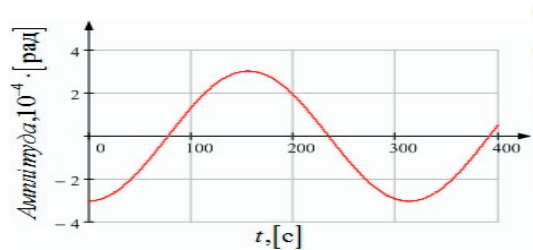


а)

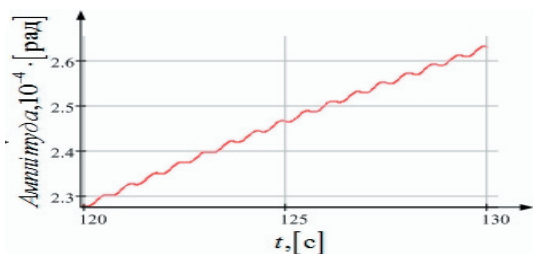


б)

Рис. 2. а) залежність кута прецесії в часі при від'ємних  $H$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ ; б) фрагмент залежності а)



а)



б)

Рис. 3. а) сигнал суми з двох акселерометрів; б) фрагмент залежності а)

На рис. 1 – 3 відображені як низькочастотні (рис. 1 а), рис. 2 а), рис. 3 а)), так і високочастотні коливання (рис. 1 б), рис. 2 б), рис. 3 б)) вихідного сигналу.

З рис. 2 б) можна зробити висновок, що збурення по кутах тангажу, крену та нicanня здійснюють найбільший вплив на сумарний сигнал.

На рис. 4 – 6 представлені порівняння результатів аналітичного розв'язку та результатів цифрового моделювання (відповідно для додатних та від'ємних параметрів обох гіроскопів і вихідного сумарного сигналу гравіметра).

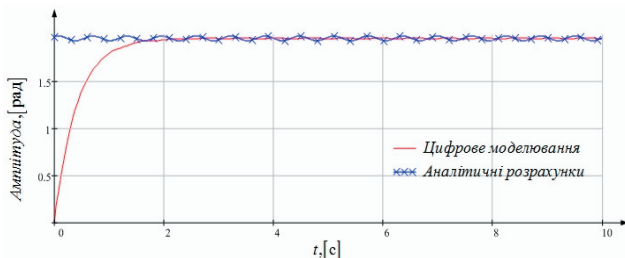


Рис. 4.  $k_1 > 0, k_2 > 0, H > 0$

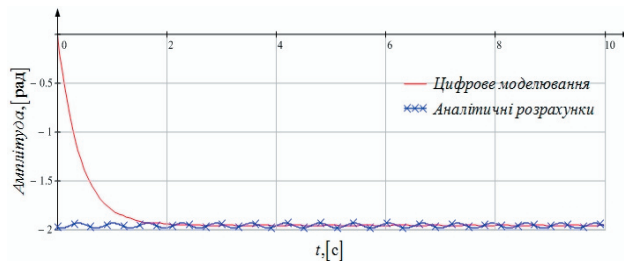


Рис. 5.  $k_1 < 0, k_2 < 0, H < 0$

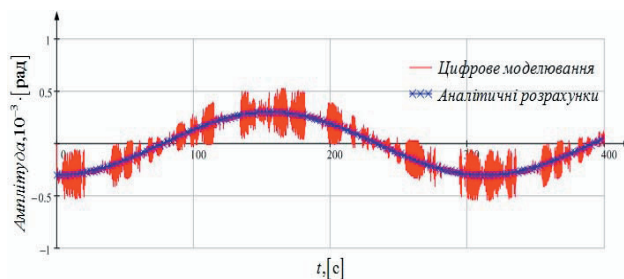


Рис. 6. Вихідний сигнал з ДГ

З рисунків видно, що цифрове моделювання фіксує наявність перехідного процесу з моменту включення до досягнення усталеного режиму роботи.

### Висновки

Отримане наближення показує, що вплив збурень проявляється у вигляді коливань з амплітудами  $\hat{A}_{\alpha_1}, \hat{A}_{\alpha_2}, \hat{A}_{\alpha_1} - \hat{A}_{\alpha_2}$  та відповідно з частотами поступальних й кутових коливань, та їх різниць і сум.

За допомогою наведених рекурентних співвідношень можна отримати наступні наближення.

Розрахунки відображають тенденцію зменшення амплітуд коливань із кратним збільшенням відповідних частот, їх сум та різниць.

Основний вплив на зміну кута прецесії вносять  $\langle \alpha_1 \rangle_{\text{вер}}, \hat{A}_{\alpha_1} \sin(\tilde{\omega}t + \tilde{\Omega}_{w_1} + \tilde{\Phi}_{\alpha_1}), \hat{A}_{\alpha_1} \sin(\tilde{\omega}t + \tilde{\Omega}_{w_3} + \tilde{\Phi}_{\alpha_1})$ , тобто коливання накладаються.

### Література

1. Безвесільна, О.М. Авіаційні гравіметричні системи та гравіметри: Монографія. [Текст] / О.М. Безвесільна. – Житомир: ЖДТУ, 2007. – 604 с.
2. Хартман, Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] / Ф. Хартман. – М.: Мир, 1970. – 720 с.