

7. Лопухина Е.М. Асинхронные машины с полым ротором. Теория, основы расчета и испытания / Лопухина Е.М., Сомихина Г.С. – М. : «Энергия», 1967. – 488 с.
8. Yeroshin S. Improving the stability rotation ring rotor without mechanical supports / S. Yeroshin , S. Miroshnik // TEKA Commission motorization and power industry in agriculture. – Polish Academy Of Sciences branch in Lublin, 2011. – Vol. 11 A. – p. 282 – 289.
9. Проектирование электрических машин: Учеб. пособие для вузов / [Копылов И.П., Горяинов Ф.А., Клоков Б.К. и др.]; Под ред. И.П. Копылова. – М. : Энергия. 1980. – 496с.
10. Ерошин С.С. Определение оптимальной толщины кольцевого ротора дискового асинхронного двигателя / С.С. Ерошин, С.А. Мирошник // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2009. – №5/1(41). – С. 30 – 35.
11. Мирошник С.А., Ерошин С.С. Применение торцевого асинхронного двигателя в установке алмазной резки кругами АКВР // Тр. МНТК „Физические и компьютерные технологии”. – Харьков: ХНПК ФЭД, 2008. – С. 169 –171.
12. Мирошник С.А., Ерошин С.С., Брешев В.Е. Применение торцевого асинхронного двигателя для непосредственного привода рабочего колеса центробежного насоса // Тр. МНТК „Физические и компьютерные технологии”. – Харьков: ХНПК ФЭД, 2008. – С. 401 –403.

*Розглядається метаногенез в біореакторах з іммобілізованою на нерухомих носіях мікрофлорою. Аналізується процес утворення бульбашок газу на біоплівці і умови їх зростання. Наведені рівняння, що дозволяють встановити залежність радіуса відриву газової бульбашки з поверхні біоплівки від об'ємної швидкості виділення біогазу*

*Ключові слова: біогаз, іммобілізована мікрофлора, біореактор, математична модель*

*Рассматривается процесс метаногенеза в биореакторах с иммобилизованной на неподвижных носителях микрофлорой. Анализируется процесс образования пузырьков газа на биопленке и условия их роста. Приведены уравнения, позволяющие установить зависимость радиуса отрыва газового пузырька от поверхности биопленки от объемной скорости выделения биогаза*

*Ключевые слова: биогаз, иммобилизованные микрофлора, биореактор, математическая модель*

*We consider the methanogenesis in bioreactor with microflora, fixed on immobile support. The process of formation of biogas bubbles in biofilm and conditions of their growth is analysed. The equations for the determination of the radius dependence of the separation of a gas bubble from the surface of the biofilm from the bulk of the rate of biogas emission are shown*

*Keywords: biogaz, immobilised microflora, bioreactor, mathematical model*

УДК 628.355

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗРОСТАННЯ БУЛЬБАШОК БІОГАЗУ В БІОРЕАКТОРАХ С ЗАКРІПЛЕНОЮ БІОПЛІВКОЮ

**Л.І. Ружинська**

Кандидат технічних наук, доцент  
Кафедра біотехніки та інженерії  
Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут»  
м. Київ, Україна  
Контактний тел.: (050) 961-75-15

**А.О. Фоменкова**

Студент  
Кафедра біотехніки та інженерії  
Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут»  
м. Київ, Україна  
Контактний тел.: (050) 603-47-45  
E-mail: hyrondelle@list.ru

### Вступ

Дослідження відносяться до галузі біотехнологічного виробництва нетрадиційних енергоносіїв, зокрема біогазу. В умовах погіршення

екологічної ситуації і подорожчання енергоносіїв значна увага приділяється енергозберігаючим технологіям утилізації органічних відходів.

Біоконверсія органічних відходів є одним з найбільш прогресивних, економічно ефективних і

екологічно прийнятних рішень запобігання забруднення навколишнього середовища. При цьому є можливість раціонально використовувати органічні речовини і звільняти акумульовану в них енергію. Тим більше, Україна володіє тими природними і сільськогосподарськими ресурсами, які дозволили б при попередженні забруднення навколишнього середовища одержувати високоякісні добрива та газоподібний енергоносіє - біогаз. Однак, на сьогоднішній день використання переробки органічних речовин методами анаеробного зброджування з метою отримання біогазу в Україні вельми обмежене. Це пояснюється тим, що практично відсутні теоретичні та експериментальні дослідження процесів біоконверсії органічних речовин в анаеробних біореакторах при очищенні органічних відходів.

**Постановка проблеми**

Сучасні дослідження процесів біосинтезу метану та їх практична реалізація показують, що в анаеробних біореакторах із закріпленою метаногенною мікрофлорою інтенсивність газоутворення значно вища, ніж в біореакторах з вільно плаваючою мікрофлорою. Імобілізація метаногенної мікрофлори на носіях дозволяє збільшити їх концентрацію і сприяє інтенсифікації анаеробного зброджування. Імобілізація у вигляді біоплівки на нерухомих носіях має ряд переваг в порівнянні з іншими способами утримання мікрофлори в біореакторах [1-4]. Разом з тим, для забезпечення стабільного і безперебійного транспорту субстрату до поверхні біоплівки і відведення біогазу, що утворився, в біореакторах необхідно створити сприятливу гідродинамічну обстановку, що забезпечуватиме високі коефіцієнти масопереносу в приграничному шарі рідини біля поверхні біоплівки.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій**

Аналіз літературних джерел[1-4], а також наші попередні дослідження процесу метаногенеза показують, що утворення біогазу відбувається безперервно. Компоненти біогазу (метан, двоокис вуглецю, водень та інші) мають досить обмежену розчинність в субстраті, тому біля поверхні півки утворюється шар перенасиченої рідини і на центрах газоутворення відбувається зростання газових бульбашок, які мають форму, близьку до усіченої сфери. При досягненні газовими бульбашками певного радіуса (далі радіуса відриву), вони відриваються і спливають. Спливання відбувається біля поверхні біоплівки, закріпленої на вертикальному нерухомому носії. У момент відриву бульбашки субстрат спрямовується до поверхні півки, приграничний шар субстрату турбулізується і переміщується. При утворенні достатньо великої кількості газових бульбашок на поверхні біоплівки їх зростання помітно гальмується. Це можна пояснити зменшенням площі контакту субстрата з біоплівкою і погіршенням масопереносу компонентів поживного середовища до біоплівки. З метою кількісної оцінки впливу окремих параметрів процесу синтезу біогазу на величину радіуса відриву газової бульбашки від

поверхні біоплівки необхідно розглянути модель зростання і відриву газової бульбашки при метаногенезі.

**Основний матеріал досліджень**

Використовуючи аналогію процесів тепло-і масо-віддачі [5], розглянемо модель зростання і відриву газової бульбашки при метаногенезі з урахуванням припущень, прийнятих при вивченні механізму росту і відриву парової бульбашки при кипінні [6].

На початкових стадіях ріст газової бульбашки відбувається повільно, прискорюючись з розширенням бульбашки. Однак надалі її ріст уповільнюється, що може бути зумовлено зниженням швидкості поглинання субстрату мікроорганізмами і як наслідок *зниження швидкості* - виділення біогазу на даній ділянці за рахунок зменшення поверхні контакту біоплівки з субстратом. Також зменшення швидкості росту бульбашки частково зумовлено переходом частини об'єму бульбашки в рідину, де концентрація біогазу низька.

Уповільнення росту бульбашки перед відривом викликає появу у рідині сили інерції  $F_i$ , яка сприяє відриву бульбашки від стінки. Сила інерції  $F_i$  має дві складові: звичайну силу інерції, яку позначимо  $F_{i1}$ , та силу інерції Мещерського, яка враховує вплив змінної маси, позначимо її  $F_{i2}$ . Позначимо масу бульбашки  $m$ , а коефіцієнт приєднаної маси  $c_u$ . Звичайна сила інерції визначається за рівнянням[3]:

$$F_{i1} = c_u \cdot m \frac{dW}{dt} = c_u \cdot m \cdot \left( \frac{d^2R}{dt^2} \right)_n = c_u \cdot m \cdot \bar{a}_n \quad (1)$$

Сила інерції Мещерського визначається за рівнянням [3]:

$$F_{i2} = c_u \cdot W_n \cdot \frac{dm}{dt} \cdot \left( \frac{dR}{dt} \right)_n = c_u \cdot \frac{dm}{dt} \cdot \left( \frac{dR}{dt} \right)_n^2 = c_u \cdot \frac{dm}{dR} \cdot \bar{W}_n^2 \quad (2)$$

Нормальні до стінки складові швидкості та прискорення росту бульбашки  $W_n$ ,  $a_n$  - відповідно.

На рисунку 1 схематично зображена бульбашка, що зростає на поверхні біоплівки.

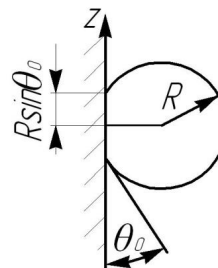


Рис. 1. Бульбашка, що зростає на поверхні біоплівки

При цьому нормальні середні по поверхні бульбашки складові швидкості та прискорення росту визначаються в залежності від функції  $f_1(\theta_0)$ [6]:

$$\bar{a}_n = \bar{a}_b \cdot f_1(\theta_0), \bar{W}_n = \bar{W}_b \cdot f_1(\theta_0),$$

де  $f_1(\theta_0) = \frac{0,5 \cdot \cos^2 \theta_0 + \cos \theta_0 + 0,5}{1 + \cos \theta_0}$  - крайовий кут;

$\bar{W}_b, \bar{a}_b$  - визначають радіальні швидкість та при-

скорення бульбашки відповідно;

$\bar{W}_n, \bar{a}_n$  - середні по поверхні бульбашки значення

швидкості та прискорення, напрямлені нормально до стінки, відповідно.

Радіальну швидкість  $\bar{W}_b = \frac{dR}{dt}$  визначаємо з об'ємної

швидкості виділення біогазу.

Об'ємну швидкість виділення біогазу з одиниці об'єму завантаження можна описати за допомогою рівняння Конто[4]:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{B_0 S}{\tau_e} \cdot \left( 1 - \frac{k}{\mu \tau_e - 1 + k} \right) \quad (3)$$

де  $\frac{dV}{dt}$  - об'ємна швидкість виділення біогазу,

$m^3/(m^3 \cdot \text{доба})$ ;

$B_0$  - максимальний вихід біогазу з одиниці органічної речовини заданого складу,  $m^3/kg$ ;

$S$  - вихідна концентрація органічної речовини у субстраті,  $kg/m^3$ ;

$\tau_e$  - час експозиції, доба;

$k$  - константа напівнасичення;

$\mu$  - максимальна питома швидкість росту мікроорганізмів в заданому процесі.

Позначимо праву частину рівняння (3) як  $q$ , тоді:

$$\frac{B_0 S}{\tau} \cdot \left( 1 - \frac{k}{\mu \tau - 1 + k} \right) = q \quad (4)$$

Об'ємна швидкість утворення біогазу з одиниці поверхні площинного носія:

$$qm = q \cdot \delta,$$

де  $\delta$  - відстань між пластинами носія.

Потік маси газу з поверхні носія  $S$ , через яку газпоступає у бульбашку:

$$\frac{dm}{dt} = \int_S q_m dS, \quad (5)$$

Враховуючи залежність  $dS = 2\pi z dz$  потік маси газу знаходимо за рівнянням:

$$\frac{dm}{dt} = \int_S q_m 2\pi z dz \quad (6)$$

З рівняння матеріального балансу бульбашки:

$$\frac{dm}{dt} = \rho'' \frac{dV_6}{dt} \quad (7)$$

де  $\frac{dV_6}{dt}$  - об'ємна швидкість росту бульбашки,  $m^3/c$ ;

$\rho''$  - густина біогазу,  $kg/m^3$ .

Отже, з врахуванням рівнянь (4), (6), (7):

$$\rho'' \frac{dV_6}{dt} = \int_0^{R \sin \theta_0} q \delta 2\pi z dz = q \delta \pi R^2 \sin^2 \theta_0 \quad (8)$$

З врахуванням, що бульбашка має форму усіченої сфери [6], об'ємна швидкість росту бульбашки:

$$\frac{dV_6}{dt} = \frac{\pi}{3} \cdot (1 + \cos \theta_0)^2 \cdot (2 - \cos \theta_0) \cdot R^2 \frac{dR}{dt} \quad (9)$$

де:

$$f(\theta_0) = (1 + \cos \theta_0)^2 (2 - \cos \theta_0)$$

Швидкість росту бульбашки:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{3 \cdot q \cdot \delta \cdot \sin^2 \theta_0}{\rho'' \cdot f(\theta_0)} \quad (10)$$

Визначимо прискорення  $\bar{a}_b$  як похідну від швидкості росту бульбашки по часу:

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = \frac{3 \cdot \frac{dq}{dt} \cdot \delta \cdot \sin^2 \theta_0}{\rho'' \cdot f(\theta_0)} \quad (11)$$

де:

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= -\frac{B_0 S}{\tau^2} \cdot \left( 1 - \frac{k}{\mu \tau - 1 + k} \right) + \frac{B_0 S}{\tau} \cdot \frac{\mu k}{(\mu \tau - 1 + k)^2} = \\ &= \frac{B_0 S}{\tau} \left( \frac{\mu k}{(\mu \tau - 1 + k)^2} + \frac{k}{(\mu \tau - 1 + k) \tau} - \frac{1}{\tau} \right) \end{aligned}$$

Нехай  $\frac{dq}{dt} = p$ . Тоді:

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = \frac{3 \cdot p \cdot \delta \cdot \sin^2 \theta_0}{\rho'' \cdot f(\theta_0)} \quad (12)$$

Враховуючи, що на бульбашку діють під'ємна сила Архімеда  $F_a$ , сила поверхневого натягу  $F_\sigma$  та сила інерції  $F_i$ , відривний радіус бульбашки може бути визначений з рівняння рівноваги:

$$F_a + F_i - F_\sigma = 0 \quad (13)$$

Для бульбашки, що має форму усіченої сфери, під'ємну силу Архімеда можна визначити з рівняння:

$$F_a = \frac{\pi \cdot R_0^3}{3} \cdot f(\theta_0) \cdot g \cdot (\rho' - \rho'') \quad (14)$$

де  $\rho', \rho''$  - густина субстрату та газу відповідно;

Утримуючу силу поверхневого натягу знайдемо за формулою:

$$F_\sigma = 2\pi R_0 \cdot \sigma \cdot \sin \theta_0 \quad (15)$$

де  $\sigma$  - поверхневий натяг рідини.

Враховуючи (1), (2), (10), (11), (14), (15), складемо рівняння динамічної рівноваги:

$$\frac{\pi \cdot R_0^3}{3} \cdot f(\theta_0) \cdot g \cdot (\rho' - \rho'') + \frac{c_u \cdot m \cdot 3p \cdot \delta \cdot \sin^2 \theta_0 f_3(\theta_0)}{\rho'' \cdot f(\theta_0)} - c_u \cdot \frac{dm}{dR} \cdot \left( \frac{3q \cdot \delta \cdot \sin \theta_0 \cdot f_3(\theta_0)}{\rho'' \cdot f(\theta_0)} \right)^2 - 2\pi R_0 \cdot \sigma \cdot \sin \theta_0 = 0$$

Так як бульбашка має форму усіченої сфери, то маса бульбашки:

$$m = \frac{1}{9} \pi \cdot f(\theta_0) \cdot R^3 \cdot \rho'' \tag{16}$$

а зміна маси бульбашки:

$$\frac{dm}{dR} = \frac{1}{3} \pi \cdot f(\theta_0) \cdot R^2 \cdot \rho'' \tag{17}$$

З врахуванням виразів (17) і (18), рівняння динамічної рівноваги запишемо у вигляді:

Після алгебраїчних перетворень, остаточно рівняння (18) прийме вигляд:

$$\frac{\pi \cdot R_0^3}{3} \cdot f(\theta_0) \cdot g \cdot (\rho' - \rho'') + \frac{c_u \cdot \frac{1}{3} \pi \cdot f(\theta_0) \cdot R_0^3 \cdot \rho'' \cdot 3p \cdot \delta \cdot \sin^2 \theta_0 f_3(\theta_0)}{\rho'' f(\theta_0)} - c_u \cdot \frac{1}{3} \pi \cdot f(\theta_0) \cdot R_0^2 \cdot \rho'' \cdot \left( \frac{3q \cdot \delta \cdot \sin \theta_0 \cdot f_3(\theta_0)}{\rho'' \cdot f(\theta_0)} \right)^2 - 2\pi R_0 \cdot \sigma \cdot \sin \theta_0 = 0$$

Позначимо:

$$\frac{R_0^2}{3} \cdot f(\theta_0) \cdot g \cdot (\rho' - \rho'') + c_u \cdot \frac{1}{3} \cdot R_0^2 \cdot p \cdot \delta \cdot \sin^2 \theta_0 f_3(\theta_0) - \frac{3c_u \cdot R_0 \cdot q^2 \cdot \delta^2 \cdot f_3^2(\theta_0) \sin^4 \theta_0}{f(\theta_0) \cdot \rho''} - 2\pi \cdot \sigma \cdot \sin \theta_0 = 0 \tag{19}$$

$$a = \frac{1}{3} f(\theta_0) g (\rho' - \rho'') + \frac{1}{3} c_u p \delta \sin^2 \theta_0 f_3(\theta_0),$$

$$b = - \frac{3c_u q^2 \delta^2 f_3^2(\theta_0) \sin^4 \theta_0}{f(\theta_0) \rho''}, \tag{20}$$

$$c = -2\pi \sigma \sin \theta_0$$

Рівняння (19) з врахуванням (11) представляє собою квадратичне рівняння типу:  $aR_0^2 + bR_0 + c = 0$ , яке розв'язується відносно  $R_0$ :

$$R_{01} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad R_{02} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}$$

Перший корінь фізичного змісту не має.

**Висновок**

Отримане рівняння зростання бульбашки біогазу на поверхні біоплівки, яка іммобілізована на нерухомих носіях. Це рівняння дозволяє визначити радіус відриву бульбашки біогазу в залежності від інтенсивності утворення біогазу, властивостей субстрату та відстані між носіями мікрофлори.

Література

1. Курис, Ю.В. Особенности технологии и методы интенсификации анаэробного сбраживания./ Курис Ю.В., Ткаченко С.И., Майстренко А.Ю.// Наука – науково-технічному прогрессу в паливно-енергетичному комплексі – 2008. – №11. – с. 35-41.
2. Guyot, Jean-Pierre. Etude de quelques interactions microbiennes lors de la digestion anaerobie de la matiere organique par des cultures mixtes definies ou naturelles: дис. док. биол. наук. / Jean-Pierre Guyot. – Aix-Marceille, 1990. – 123с.
3. Amrani, M. Méthanisation des eauxrésiduares dans un biofiltre thermophile / M. Amrani, N. Tazrouti // Revue des Energies Renouvelables – 2009. – Т.12, N°1 – с. 1-8.
4. Cresson, Romain. Etude du démarrage de procédésintensifs de méthanisation. Impact des conditions hydrodynamiques et de la stratégie de montée encharge sur la formation et l'activité du biofilm: дис. док. техн. наук/ Romain Cresson. – Montpellier II, 2006. – 272 с.
5. Юдаев, Б.Н. Техническая термодинамика. Теплопередача. Учебник для неэнергет. спец. Втузов. – М: Высшая школа, 1988. – 479с.
6. Федоткин, И.М. Пленочные теплообменные аппараты и пути интенсификации теплообмена в них/ И.М. Федоткин, В.Р. Фирисюк – Киев: УкрНИИИТИ, 1969 – 91с.
7. Арутюнов, А.Л. О перспективах использования основных и альтернативных видов топлива в сельскохозяйственном производстве России/ А.Л. Арутюнов // Проблемы прогнозирования – 2010. – №3. – с. 82-92.