

Проведено аналіз забруднених зон антропогенного походження, зокрема поверхневих та підземних вод. Проаналізовано стан і характер процесів, що відбуваються в межах Домбровського кар'єру, а також інших промислових зон України, що зазнають техногенних впливів. Запропоновано математичні моделі дифузійних процесів, а також різницеві схеми методу змінних напрямів для чисельної реалізації моделей, вказано напрями подальших досліджень

Ключові слова: стан довкілля, антропогенні фактори впливу, математична модель, дифузія

Проведен анализ загрязненных зон антропогенного происхождения, в частности поверхностных и подземных вод. Проанализировано состояние и характер процессов, происходящих в пределах Домбровского карьера, а также других промышленных зон Украины, испытывающие техногенные нагрузки. Предложены математические модели диффузионных процессов, а также разностные схемы метода переменных направлений для численной реализации моделей, указано направления дальнейших исследований

Ключевые слова: состояние окружающей среды, антропогенные факторы воздействия, математическая модель, диффузия

УДК 519.876.5

DOI: 10.15587/1729-4061.2015.35952

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ЗАБРУДНЕННЯ ҐРУНТІВ ЯК РЕЗУЛЬТАТУ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

А. П. Олійник

Доктор технічних наук,
професор, завідувач кафедри*
E-mail: andrij-olijnyk@rambler.ru

А. А. Мороз

Аспірант*

E-mail: alice.shelyp@gmail.com

*Кафедри математичних методів в інженерії
Івано-Франківський національний технічний
університет нафти і газу
вул. Карпатська 15,
м. Івано-Франківськ, Україна, 76019

1. Вступ

Оцінка впливу технологічних процесів в різних галузях промисловості залишається актуальною науково-технічною проблемою, вирішенню якої присвячено багато робіт експериментального та теоретичного характеру. Можливості сучасних ЕОМ дозволяють реалізовувати та доводити до чисельних характеристик моделі, що базуються на системах диференціальних рівнянь з частинними похідними, зокрема, параболічного типу, з урахуванням широкого класу початкових та граничних умов, використовуючи при цьому дані експериментальних досліджень характеристик ґрунтів – їх проникності, коефіцієнтів дифузії, в'язкості, густини тощо. Важливого значення набуває також вивчення залежності між характером поширення шкідливих речовин в середовищі та геометричною конфігурацією досліджуваних областей. Математичне моделювання дозволяє розробляти засоби опису, вивчення та кількісної характеристики процесів та явищ різної природи, яких об'єднує негативний вплив на довкілля.

2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми

При реалізації технологічних процесів в нафтогазовій та хімічній промисловості важко спрогнозувати

їх можливі негативні наслідки для екологічної та економічної ситуації. Тому вивчення таких наслідків, їх кількісних характеристик є актуальною науково-технічною задачею.

З даного питання існує багато літературних джерел, більшість з яких звертають основну увагу екологічним аспектам проблеми – при видобутку сланцевого газу на газоносних площах України [1], стану підземних вод в районах видобутку калійних солей [2, 4]; стану ґрунтів на рекультивованих ділянках свердловин [3]. Вказана проблема є актуальною для багатьох регіонів України [4, 5]. Важливого значення набуває вивчення властивостей як ґрунтів – їх проникність, густина, в'язкість, пористість, так і відповідні характеристики нафтопродуктів [6]. Якісна оцінка впливу вторинних методів інтенсифікації видобутку нафти на довкілля, і зокрема, на стан ґрунтів, вивчена в роботах [7, 8].

Реалізація підходів, пов'язаних в роботах [1–8], передбачає значний об'єм експериментальних досліджень, результати цих методів має вагомое значення при математичному моделюванні вказаних процесів, оскільки вони дають змогу одержати інформацію про величини та функції, які входять у відповідні моделі. Математичне та фізичне моделювання часто виконується одночасно, оскільки це дозволяє побудувати ефективні розрахункові алгоритми з

використанням широкого класу експериментальних досліджень. Зокрема, в роботі [8] розглядається теорія формування капілярних явищ у глинах, суглинках, супісках та пісках. Встановлено, що висота і швидкість капілярного підняття підземних вод різна і зростає зі збільшенням дисперсності ґрунтів в зоні магістральних трубопроводів, кар'єрів, в яких відстоюється технологічна рідина та відходи хімічної промисловості, капілярні сили утримують рідинний ареал у ґрунтах на певній висоті від рівня ґрунтового потоку.

В роботах [9–12] аналізуються експериментально – теоретичні методи визначення коефіцієнтів дифузії та інших властивостей ґрунтів. Експериментально на фізичній моделі одержано дані щодо висоти капілярного підняття води у ґрунтах і досліджено його вплив на розповсюдження забруднення. Встановлено, що капілярні сили утримують рідинний ареал у ґрунтах на певній висоті від рівня ґрунтового потоку.

З математичної точки зору реалізація моделей пов'язана з необхідністю урахування складних геометричних конфігурацій областей, властивостей середовища поширення речовин [13–15] (наприклад, при аваріях, пов'язаних з витоком продуктів з трубопроводів), оцінки зони поширення речовин до певних концентрацій (реалізація технологій видобутку сланцевого газу) та інших факторів. Оптимізму, при реалізації таких моделей додає той факт, що сучасні засоби ЕОМ дозволяють реалізовувати двовимірні та тривимірні моделі, що дозволяє суттєво підвищити точність моделювання.

3. Ціль і задачі дослідження

Метою роботи є моделювання процесу фільтрації шкідливих речовин в ґрунтах з використанням двовимірних та тривимірних параболічних рівнянь, що дозволяє оцінювати зміну концентрації цих речовин та прогнозувати процес їх поширення.

Дослідження будуть проводитись із застосуванням методів математичної фізики, чисельних методів, методів інтерполяції та апроксимації даних, методів розробки та реалізації апаратного забезпечення для контролю параметрів ґрунтів та концентрації речовин, методів створення програмних комплексів для ЕОМ.

В запропонованій роботі здійснюється побудова математичної моделі, яка дозволяє оцінити концентрації речовин у певній області за відомим математичним апаратом з широким класом граничних та початкових умов, зокрема таких, що задаються як неперервними, так і розривними функціями.

З цією метою ставляться наступні задачі:

- побудова математичної моделі процесу поширення шкідливих речовин в ґрунтах;
- встановити відповідні граничні та початкові умови на основі даних про забруднення ґрунтів на реальних об'єктах;
- розроблення та дослідження на стійкість різних схем для рівняння дифузії;
- створення програмного комплексу реалізації моделей, його відлагодження, аналіз розрахунків.

4. Математичне моделювання процесу фільтрації з використанням двовимірних та тривимірних рівнянь параболічного типу

Розглядається модельна задача дифузії речовин в тривимірній області G , яка моделює конфігурацію досліджуваного об'єкта. Основним рівнянням моделі є рівняння дифузії в області G , яке є тривимірним параболічним рівнянням, що описує нестационарний процес:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, y, z, t) \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(a(x, y, z, t) \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(a(x, y, z, t) \frac{\partial c}{\partial z} \right), \quad (1)$$

де c – концентрація речовин, $a(x, y, z, t)$ – коефіцієнт дифузії, який залежить від часу t та просторових координат x, y, z . Для рівняння (1) необхідно встановити граничні:

$$C|_{\partial G} = C(t) \quad (2)$$

та початкові умови:

$$C|_{t=0} = C(x, y, z). \quad (3)$$

При моделюванні об'єктів необхідно враховувати, що найбільш загальна постановка (1)–(3) дає можливість одержати адекватний реальній фізичній картині розв'язок в окремих випадках: для відносно простих конфігурацій області G та найпростіших типів граничних та початкових умов.

Система (1)–(3) дозволяє моделювати процеси в областях типу кубу:

$$0 \leq x \leq L_x; 0 \leq y \leq L_y; 0 \leq z \leq L_z, \quad (4)$$

де L_x, L_y, L_z – характерні розміри області.

Така модель використовується, наприклад, в задачах оцінки зони впливу технологічних рідин при видобуванні сланцевого газу. В тому випадку, коли моделюється аварійна ситуація на трубопроводі (прорив, малі витoki тощо) рівняння (1) записується в циліндричній системі координат:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = a^2 \left[\frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 c}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right] + Q(r, \phi, z, t), \quad (5)$$

де r, ϕ, z – циліндричні координати, t – час, a^2 – коефіцієнт дифузії ($a^2 = \text{const}$); $Q(r, \phi, z, t)$ – питома інтенсивність надходження в досліджувану область речовини, що характеризується концентрацією $C(r, \phi, z, t)$. В такому випадку граничні умови задаються у вигляді:

$$C|_{r=R_T} = f_1(\phi, z, t), \quad (6)$$

$$C|_{z=z_1} = Cf_2(r, \phi), \quad (7)$$

$$C|_{z=z_2} = Cf_3(r, \phi, t), \quad (8)$$

$$C|_{\phi=0} = C|_{\phi=2\pi}, \tag{9}$$

$$\nabla C|_{\phi=0} = \nabla C|_{\phi=2\pi}, \tag{10}$$

де R_T – радіус трубопроводу. Умови (9) та (10) описують властивість замкнутих перерізів. В системі (6)–(10) відсутні умови на нескінченності або на певній відстані $R = R_{kp}$ від трубопроводу виду:

$$C|_{R=R_{kp}} = C_0, \tag{11}$$

де R_{kp} та C_0 – це параметри області, при яких вплив витоку $Q(x, y, z, t)$ є несуттєвим.

Значення R_{kp} вибирається з точки зору реальної фізичної картини процесу і може бути з корегованим в процесі розв'язку.

Рівняння (1) допускає частковий розвиток виду (при умові):

$$C(x, y, z, t) = \frac{1}{\sqrt{t^3}} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4a^2t}}, \tag{12}$$

який, як правило, не враховує умови (2) та (3). При побудові чисельного методу для вказаного рівняння методом скінчених різниць використовуються неявні методи змінних напрямків. При найбільш очевидному узагальненні на тривимірний випадок різницева схема виявляється лиш умовно стійкою і має похибку апроксимації $O(\Delta t, \Delta x^2, \Delta y^2, \Delta z^2)$. Для того, щоб обійти цю проблему, запропоновано [16] загальний метод побудови неявних схем змінних напрямків, які мають другий порядок точності і є безумовно стійкими.

Застосовуючи цей метод, можливе узагальнення схеми Кранкла – Ніколсона на випадок тривимірного рівняння дифузії. Якщо ввести позначення:

$$C(x_i, y_j, z_k, t_n) = U_{i,j,k}^n, \tag{13}$$

$$\delta_x^2 U_{i,j,k}^n = \frac{U_{i+1,j,k}^n - 2U_{i,j,k}^n + U_{i-1,j,k}^n}{h_x^2},$$

$$\delta_y^2 U_{i,j,k}^n = \frac{U_{i,j+1,k}^n - 2U_{i,j,k}^n + U_{i,j-1,k}^n}{h_y^2}, \tag{14}$$

$$\delta_z^2 U_{i,j,k}^n = \frac{U_{i,j,k+1}^n - 2U_{i,j,k}^n + U_{i,j,k-1}^n}{h_z^2}, \tag{15}$$

де h_x, h_y, h_z – кроки по відповідних координатах, то за умови, що $\Delta t = \tau$ – крок по часу, і, виникає наступна три крокова схема:

Крок 1 :

$$U^* - U^n = \frac{\tau a^2}{2} \delta_x^2 (U^* + U^n) + \frac{\tau a^2}{2} \delta_y^2 U^n + \frac{\tau a^2}{2} \delta_z^2 U^n. \tag{16}$$

Крок 2 :

$$U^{**} - U^n = \frac{\tau a^2}{2} \delta_x^2 (U^* + U^n) + \frac{\tau a^2}{2} \delta_y^2 (U^{**} + U^n) + \frac{\tau a^2}{2} \delta_z^2 U^n. \tag{17}$$

Крок 3 :

$$U^{n+1} - U^n = \frac{\tau a^2}{2} \delta_x^2 (U^* + U^n) + \frac{\tau a^2}{2} \delta_y^2 (U^{**} + U^n) + \frac{\tau a^2}{2} \delta_z^2 (U^{n+1} + U^n). \tag{18}$$

Тут верхні індекси * та ** позначають проміжні значення, n та n+1 – кроки по часу, індекси i, k, j опущені в усіх членах рівнянь.

В системі (16) задача зводиться до лінійної системи з три діагональною матрицею за методом прогонки [16] відносно U^* , на другому кроці система розв'язується відносно U^{**} , а на третьому – відносно U^{n+1} . При цьому в схемі використовуються умови (2) та (3).

При реалізації схеми (16)–(18) виникає проблема опису масиву $U_{i,j,k}^n$ – в загальному випадку чотиривимірного. При фіксованому номері кроку по часу «n» цей масив є тривимірним, що також суттєво ускладнює обчислювальну схему. В процесі розрахунків використовується 12 одновимірних масивів, значення елементів яких переприводяться для кожного нового кроку по координаті t. Аналогічний підхід зберігається також при розв'язанні задачі (5) з умовами (6)–(11). Схема (16)–(18) з умовами (2), (3) вимагає значних обчислювальних ресурсів, тому ефективним методом зменшення об'єму обчислень є пониження розмірності задачі. Крім того, такий перехід є достатньо обґрунтованим, якщо розглядається відносно проста конфігурація області.

Тому область G розглядається як двовимірна прямокутна область, що є допустимим припущенням за умови, що процеси в досліджуваній області мало змінюються по одній з координат. В такому випадку область замінюється на:

$$V = \{(x, y); 0 \leq x \leq L_1; 0 \leq y \leq L_2\}. \tag{19}$$

За умов, що в рівнянні (1) при цьому зникають похідні по z, одержуються:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (a(x, y, t) \frac{\partial c}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (a(x, y, t) \frac{\partial c}{\partial y}). \tag{20}$$

Коефіцієнт залежить від просторових координат по часу, що дозволяє моделювати змінні властивості ґрунтів щодо дифузії, проникності шкідливих речовин в середовище. У випадку області (19) необхідно задати концентрацію речовини на кожній з чотирьох границь

$$\begin{cases} C|_{x=0} = C_1(y, t); \\ C|_{x=L_1} = C_2(y, t); \\ C|_{y=0} = C_3(x, t); \\ C|_{y=L_2} = C_4(x, t), \end{cases} \tag{21}$$

що дозволяє врахувати особливості концентрацій речовини на границях області. Конкретний вигляд функцій $c_i(x,y,t)$ встановлюється з урахуванням особливостей задачі, що досліджується. Зокрема, для моделювання підняття рівня забруднення вод можлива наступна розрахункова схема: для граничних умов в області V (рис. 1)

$$\left\{ \begin{array}{l} C|_{y=0} = C_1; \\ C|_{x=0} = \begin{cases} C_0 = 0, L_3 < y < L_2, \\ C_1 \neq 0, 0 \leq y < L_3; \end{cases} \\ C|_{y=L_2} = C_0; \\ C|_{x=L_1} = \begin{cases} C_0 = 0, L_3 < y < L_2, \\ C_1 \neq 0, 0 \leq y < L_3, \end{cases} \end{array} \right. \quad (22)$$

з поширенням вказаних умов на всі внутрішні точки.

Вказані початкові умови є модельними, зокрема C_1 , може бути функцією x та y . Для моделювання випадків задаються граничні умови у вигляді: в умовах (22) змінюється умова при $y = 0$:

$$C|_{y=0} = \frac{C_1}{Kt^2 + 1}, \quad (23)$$

де C_1 – початкова концентрація, K – коефіцієнт який моделює інтенсивність хімічних реакцій, пов'язаних зі збільшенням концентрації контрольованої величини. Функція в (23) є модельною, яка дозволяє вивчати викиди зі спадною в часі інтенсивністю. В найзагальнішому випадку:

$$C|_{y=0} = f(x,t), \quad (24)$$

де $f(x,t)$ – модельна функція для граничних умов. Умови (24) можуть бути залишені і для інших ділянок границі області, в яких є витік або витік шкідливих речовин.

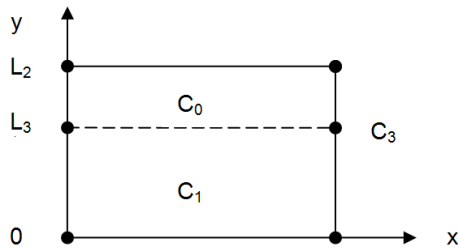


Рис. 1. Початкові умови задачі

Позитивним моментом при переході до області меншої розмірності є те, що за основу може бути взятий розрахунковий алгоритм (16)–(18), який в даному випадку є двокроковим:

Крок 1:

$$\frac{U_{ij}^{n+1/2} - U_{ij}^n}{\tau/2} = a^2 \delta_x^2 U_{ij}^{n+1/2} + a^2 \delta_y^2 U_{ij}^n. \quad (25)$$

Крок 2:

$$\frac{U_{ij}^{n+1} - U_{ij}^{n+1/2}}{\tau/2} = a^2 \delta_x^2 U_{ij}^{n+1/2} + a^2 \delta_y^2 U_{ij}^{n+1}. \quad (26)$$

Застосування (25)–(26) та (27)–(28) дозволяє зменшити об'єм обчислень без суттєвої втрати точності.

5. Аналіз результатів розрахунків за моделлю процесу поширення шкідливих речовин в області з різними властивостями ґрунтів.

Для різницевої схеми (25)–(26) з граничними та початковими умовами (21)–(24) та (3) створено програмний комплекс реалізації моделі та проведено тестові розрахунки, результати яких наведено на рис. 2.

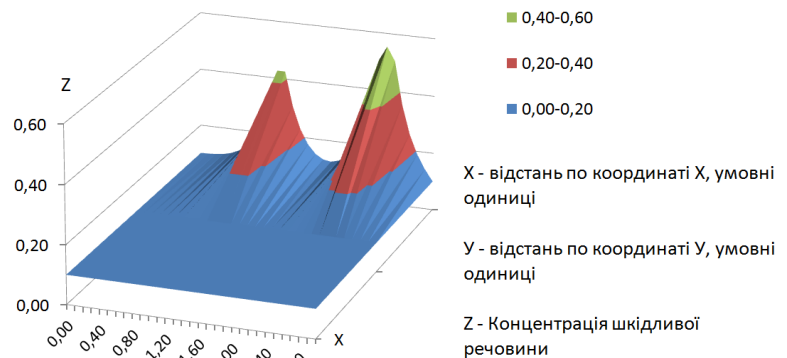


Рис. 2. Розподіл концентрації шкідливої речовини в модельній області за наявності витоків різної інтенсивності

Розроблена обчислювальна схема дозволяє врахувати змінні характеристики ґрунтів, інтенсивності викидів шкідливих речовин. Розроблена модель дозволяє оцінювати поведінку концентрації шкідливої речовини в залежності від часу, результати модельних розрахунків наведено на рис 3.

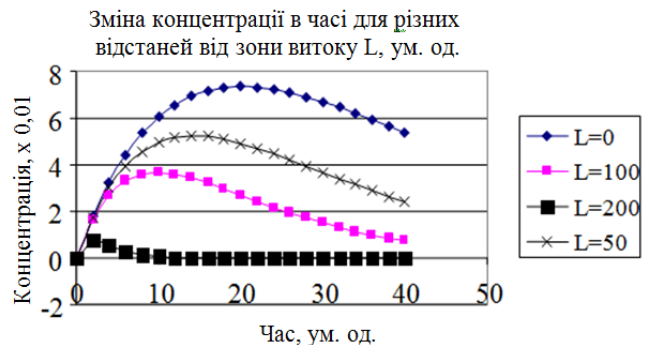


Рис. 3. Зміна концентрації шкідливої речовини в часі

В циліндричній системі координат схема (25)–(26) набуває вигляду:

$$\frac{U_{ij}^{n+1/2} - U_{ij}^n}{\tau/2} = a^2 \delta_r^2 U_{ij}^{n+1/2} + \frac{1}{R_T + ih_r} \frac{U_{i+1,j}^{n+1/2} - U_{i,j}^{n+1/2}}{h_r} + \frac{a^2}{(R_T + ih_r)^2} \delta_\phi^n U_{ij}^n, \quad (27)$$

$$\frac{U_{ij}^{n+1} - U_{ij}^{n+1/2}}{\tau/2} = a^2 \delta_r^2 U_{ij}^{n+1/2} + \frac{1}{R_T + ih_r} \frac{U_{i+1,j}^{n+1/2} - U_{i,j}^{n+1/2}}{h_r} + \frac{a^2}{(R_T + ih_r)^2} \delta_\phi^{n+1} U_{ij}^{n+1}, \quad (28)$$

з граничними умовами (6) – (11). Допущення суттєво обмежує можливість моделі – в загальному випадку

$$a^2 = a^2(x, y, z, c, \mu_1, \dots, \mu_n, t), \quad (29)$$

або

$$a^2 = a^2(r, \phi, z, c, \mu_1, \dots, \mu_n, t). \quad (30)$$

Параметри $\mu_i, i=1, \dots, n$ та їх кількість – число n визначають фактори, що впливають на узагальнений коефіцієнт дифузії. До таких факторів можуть належати параметри, дослідженні в [7, 8] та інші параметри – проникність середовища, пористість, в'язкість рідин та інші. Очевидно, число « n » не може бути великим – попередніми дослідженнями з використанням методів оптимізації експериментальних досліджень необхідно відібрати ті параметри μ_i , які суттєво впливають на величину $C(x, y, z, t)$ [17].

Замість коефіцієнта $a(x, y, t)$ можна підрахувати ефективний коефіцієнт дифузії, який визначається для суміші речовин, яка складається з N компонент:

$$D_a = \frac{(1 - x_a)}{\sum_{j=1}^N \frac{x_j}{D_{aj}}}, \quad (31)$$

де x_a ; x_j – молярні долі речовини, що проникає в середовище та j – ої компоненти комбінованого середовища; D_{aj} – коефіцієнт бінарної дифузії компонента a в середовищі j .

6. Обговорення результатів моделювання процесу поширення шкідливих речовин в області з різними властивостями ґрунтів

Проведено аналіз забруднених зон антропогенного походження, зокрема поверхневих та підземних вод. Проаналізовано стан і характер процесів, що відбуваються в межах Домбровського кар'єру, а також інших промислових зон України, що зазнають техногенних впливів. Запропоновано математичні моделі дифузійних процесів, що базується на рівнян-

ні дифузії для двовимірних та тривимірних областей з широким класом початкових та граничних умов, а також різницевої схеми методу змінних напрямків для чисельної реалізації моделей, вказано напрями подальших досліджень.

Наукова новизна проведених досліджень полягає в розробці нового підходу до моделювання процесів, що відбуваються в ґрунтах забруднених зон внаслідок антропогенної діяльності на основі двохвимірної та тривимірної рівняння дифузії з розривними початковими умовами та засобів чисельної реалізації моделі методом змінних напрямків.

Теоретичне значення полягає в адаптації відомих моделей та чисельних алгоритмів до вирішення задачі опису дифузійних процесів з урахуванням розривних початкових умов та джерел забруднення.

Практичне значення визначається можливістю вивчення та прогнозування поведінки поверхневих та підземних вод внаслідок забруднення через антропогенну діяльність людини з урахуванням широкого класу факторів, що впливають на них.

7. Висновки

Таким чином, основними результатами роботи є:

- побудовано математичну модель процесу поширення шкідливих речовин в ґрунтах з використанням дво- та тривимірної рівняння дифузії в декартовій та циліндричній системах координат;
- встановлено відповідні граничні та початкові умови на основі даних про забруднення ґрунтів на реальних об'єктах шляхом моделювання граничних умов спеціально введеними функціями;
- розроблено та досліджено на стійкість різницевої схеми для дво- та тривимірної рівняння фільтрації та встановлено порядок точності по кожній координат;
- створено програмний комплекс для реалізації моделей, проведено його відлагодження, здійснено розрахунки та проведено їх аналіз, який засвідчив добре узгодження результатів чисельного моделювання з реальною фізичною картиною процесу дифузії шкідливих речовин в середовищі
- Предметом подальших досліджень будуть наступні питання:
 - дослідження його стійкості розрахункових алгоритмів;
 - проведення тестових розрахунків для модельних областей;
 - збір та узагальнення інформації про всі числові характеристики та вигляд функцій, що входять в відповідні моделі;
 - визначення коефіцієнта дифузії як функції просторових координат з урахуванням складу середовища як суміші речовин, що дозволяє враховувати найскладніший з точки зору математичного опису характер процесу;
 - дослідження реальних систем, що впливають на довкілля, формулювання рекомендацій.

Література

1. Калініченко, А. В. Екологічні ризики видобутку сланцевого газу на газоносних площах України [Текст] / А. В. Калініченко, О. П. Копішинська, А. В. Копішинський; ВІСНИК Полтавської державної аграрної академії. – 2013. – Т. 477, № 2. – С. 127–131.

2. Семчук, Я. М. Основні завдання і методи досліджень для обґрунтування охорони підземних вод в районі видобутку калійних солей [Текст] / Я. М. Семчук, Л. В. Палійчук // Науковий вісник ІФНТУНГ. – 2007. – № 1(15). – С. 164–167.
3. Журавель, М. Ю. Оцінка техногенної трансформації ґрунтів на рекультивованих ділянках свердловин [Текст] / М. Ю. Журавель, Т. О. Клочко, В. В. Яременко // Ученые записки Таврического национального университета имени В.И.Вернадского Серия «География». – 2013. – Т. 26 (65), № 1. – С. 55–61.
4. Малик, Ю. О. Моніторинг стану Домбровського кар'єру [Текст] / Ю. О. Малик, О. М. Демків. – Національний університет “Львівська політехніка”, кафедра прикладної екології та збалансованого природокористування, 2013. – С. 285–288.
5. Кудеравець, Р. С. Геомагнітні моделі родовищ вуглеводнів та перспективних структур центральної частини Дніпровсько-Донецької западини [Текст] / Р. С. Кудеравець, В. Ю. Максимчук, Ю. М. Городиський // Науковий вісник ІФНТУНГ. – 2009. – № 1(19). – С. 73–81.
6. Процько, Я. І. Вплив нафти та нафтопродуктів на ґрунтовий покрив [Текст] / Я. І. Процько // Вісник Полтавської державної аграрної академії. – 2010. – № 2. – С. 189–191.
7. Сабан, В. З. Оцінювання впливу вторинних методів інтенсифікації видобутку нафти на довкілля [Текст] / В. З. Сабан, Я. М. Семчук // Науковий вісник ІФНТУНГ. – 2009. – № 4 (22). – С. 142–147.
8. Скиба, Е. Е. Дослідження впливу капілярного підняття підземних вод на розповсюдження нафтового забруднення в ґрунтах [Текст] / Е. Е. Скиба, Я. М. Семчук // Науковий вісник ІФНТУНГ. – 2011. – № 4 (30). – С. 77–81.
9. Ryzhakova, N. K. A new method for estimating the coefficient of diffusion and emanation of radon in the soil [Text] / N. K. Ryzhakova // Journal of Environmental Radioactivity. – 2014. – Vol. 135. – P. 63–66. doi: 10.1016/j.jenvrad.2014.04.002
10. Rampit, I. A. About measurements emanation of soil factor [Text] / I. A. Rampit // ANRT. – 2004. – Vol. 3. – P. 51–52.
11. Migaszewski, Z. M. Element concentration in soils, and plant bioindicators in selected habitats of the Holly Cross Mts, Poland [Text] / Z. M. Migaszewski // Water, Air and Soil Pollut. – 2001. – Vol. 129. – P. 369.
12. Migaszewski, Z. M. Soil subhorizon – a potential geoindicator of environmental pollution [Text] / Z. M. Migaszewski, A. Galuszka // Polish J. of Environmental Stud. – 2008. – Vol. 17, Issue 3. – P. 405–410.
13. Silva, E. J. G. A puff model using a three-dimensional analytical solution for the pollutant diffusion process [Text] / E. J. G. Silva, T. Tirabassi, M. T. Vilhena, D. Buske // Atmospheric Research. – 2003. – Vol. 134. – P. 131–136. doi: 10.1016/j.atmosres.2013.07.009
14. Sahoo, B. K. Two-dimensional diffusion theory of trace gas emission into soil chamber for flux measurements [Text] / B. K. Sahoo, Y. S. Mayya // Agricultural and Forest Meteorology. – 2010. – Vol. 150, Issue 9. – P. 1211–1224. doi: 10.1016/j.agrformet.2010.05.009
15. Arya, S. P. Modelling and parametrization of near source diffusion in weak winds [Text] / S. P. Arya // Journal of Applied Meteorology. – 1995. – Vol. 34, Issue 5. – P. 1112–1122. doi: 10.1175/1520-0450(1995)034<1112:mapons>2.0.co;2
16. Андерсон, Д. Вычислительная гидромеханика и теплообмен [Текст] / Д. Андерсон, Дж. Таннехил, Р. Плетчер. – М.: Мир, 1990. – 384 с.
17. Ермаков, С. М. Математическая теория оптимального эксперимента [Текст] : уч. пос. / С. М. Ермаков, А. А. Жиглевский. – М.: Наука, 1987. – 320 с.