ПРИКЛАДНЫЕ НАУЧНЫЕ РАЗРАБОТКИ

УДК 622.276.76: 622. 244.7
DOI: 10.15587/1729-4061.2015.36812

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ГРУЗОПОДЪЕМНЫХ КРЮКОВ

Кулиев Сабир Али оглы, доктор технический наук, профессор
Азербайджанский архитектурно-строительный университет,
ул. А. Султановой, 5, г. Баку, Азербайджан, AZ-1073
E-mail: qezale@mail.ru

Казимов Муса Исмаил оглы, кандидат технических наук
Доцент кафедры прикладная механика, Азербайджанская Государственная Нефтяная Академия,
пр. Азадлыг, 20, г. Баку, Азербайджан, AZ-1073
E-mail: qezale@mail.ru

Рассматривается напряженное состояние криволинейного бруса, ось которого очерчена по дуге окружности. Брус ограничен поверхностями кругового полого цилиндра. Решение поставленной задачи состоит из трех последовательно проводимых задач: выбор поперечного сечения, приближенное решение (основанное на методах сопротивления материалов) и точное решение задачи по методу теории упругости.
Ключевые слова: грузоподъемные крюки, напряженное состояние поперечного сечения, приближенное решение, точное решение.

Розглядається напружений стан криволінійного бруса, вісь якого окреслена по дузі кола. Брус обмежений поверхнями кругового полого циліндра. Рішення поставленої задачі складається з трьох послідовно проведених завдань: вибір поперечного перерізу, наближене рішення (засноване на методах опору матеріалів) і точне рішення задачі за методом теорії пружності.
Ключові слова: вантажопідйомні гаки, напружений стан поперечного перерізу, наближене рішення, точне рішення.

1. Введение

Точное решение задачи о чистом изгибе криволинейного бруса единичной ширины впервые получено русским ученым Х. С. Головиным в 1881 г. Здесь же рассматривается решение оссесимметричных задач с произвольным поперечным сечением.

2. Выбор поперечного сечения

Сначала введем некоторые необходимые обозначения, одинаковые для всех криволинейных брусьев.

ρ — радиус кривизны оси бруса;

P — радиус кривизны нейтрального слоя бруса;

P_1 — радиус кривизны наружных волокон;

P_2 — радиус кривизны внутренних волокон;

«C» — центр тяжести поперечного сечения; «0» центр кривизны **(рис. 1)**.

Как известно, в кривом брусе нейтральная ось OZ не проходит через центр тяжести поперечного сечения «C», а проходит на расстояние $e=\rho-r$ от центра тяжести «C» **(рис. 2)**.

Согласно, например [1–4], координаты центра тяжести любой фигуры определяются выражениями:

$$x_c=\frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i}=\frac{F_1x_1+F_2x_2+...}{F_1+F_2+...},$$

$$y_c=\frac{\sum F_i y_i}{\sum F_i}=\frac{F_1y_1+F_2y_2+...}{F_1+F_2+...}.$$

где x_i и y_i — координаты центра тяжести отдельных простых составных частей площади поперечного сечения; F_i — площадь i-й фигуры; $\sum F_i=F$ площадь всего сечения бруса.

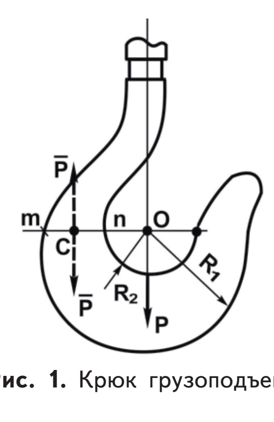

Рис. 1. Крюк грузоподъемный

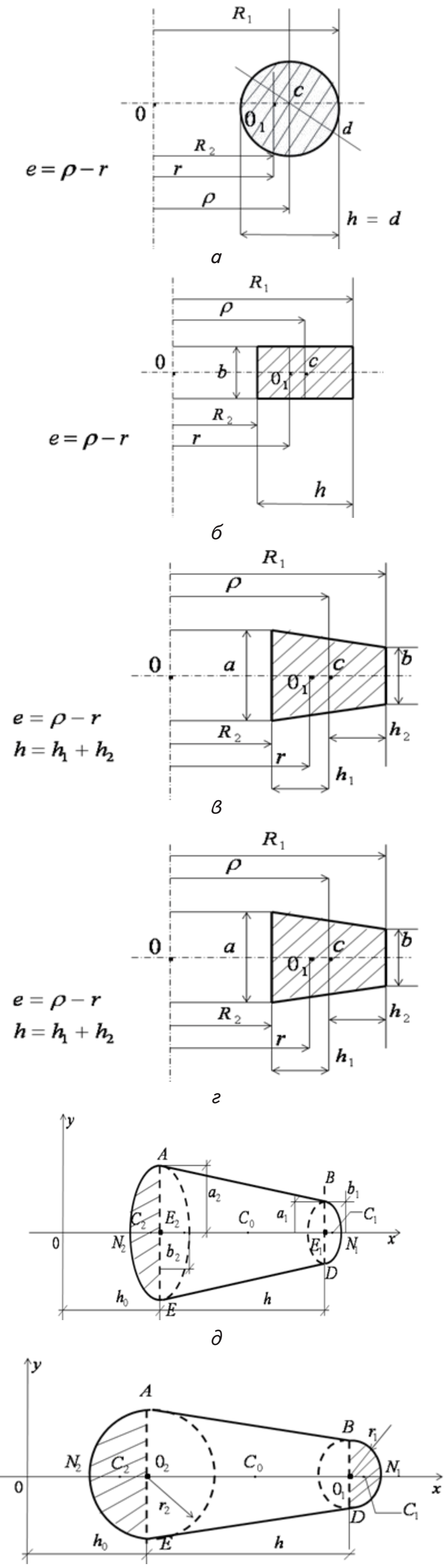

Рис. 2. Поперечные сечении бруса

1. Поперечным сечением бруса является круг **(рис. 2, *а*)**. Площадь круга R_1, координата центра тяжести по оси R_1 (относительно центра изгиба нейтрального слоя точки «0») $x_c = R_2 + R$; $y_c = 0$:

$$r = d^2 \Big/ \left[4\left(2\rho - \sqrt{4\rho^2 - d^2}\right)\right]; \quad R = \frac{d}{2};$$

$$e = \rho - r = \frac{d^2}{16\rho}\left[1 + \frac{1}{4}\left(\frac{d}{2\rho}\right)^2\right]. \qquad (1)$$

2. Поперечное сечение бруса имеет форму прямоугольника **(рис. 2, *б*)**.

Тогда будем иметь:

$$F = h \cdot b; \; x_c = R_2 + \frac{h}{2};$$

$$r = \rho\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2\rho}\right)^3\right]; \; e = \rho - r = \frac{\rho}{3} \cdot \left(\frac{h}{2\rho}\right)^2; \qquad (2)$$

3. Поперечным сечением кривого бруса является трапеция **(рис. 2, *в*)**.

В зависимости вида оснований здесь возможны несколько вариантов:

а) если в основании трапеции прямые и параллельные линии величиной a и b, то будем имеет **(рис. 2, *в*)**

$$x_c = R_2 + h_1; \; h_1 = \frac{2b + a}{a + b}\frac{h}{3}; \; y_c = 0;$$

$$F = \frac{a + b}{2} h_1; \; e = \rho - r;$$

$$r = \frac{h(a + b)}{2\left[\frac{aR_1 - bR_2}{h} \cdot \ln\frac{R_1}{R_2} - (a - b)\right]}; \qquad (3)$$

б) сечением кривого бруса является равнобочная трапеция с основаниями в виде сегмента круга **(рис. 2, *г*)**. В этом случае общая площадь будет

$$F = \frac{a + b}{2} \cdot h + \frac{b^2}{4}\left(\frac{\alpha_1}{\sin^2\alpha_1} - \frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha_1}\right) +$$

$$+ \frac{a^2}{4} \cdot \left(\frac{\alpha_2}{\sin^2\alpha_2} - \frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha_2}\right);$$

в) сечением бруса является равнобочная трапеция с закругленными основаниями в виде полуэллипсов **(рис. 2, *д*)**. Общая площадь

$$F = \frac{a + b}{2} \cdot h + \frac{\pi a_1 b_1}{2} + \frac{\pi a_2 b_2}{2}; \; a = 2a_2; \; b = 2a_1;$$

г) сечением бруса является равнобочная трапеция с полукруглыми основаниями **(рис. 2, *е*)**. Общая площадь

$$F=\frac{\pi a_1^2}{2}+\frac{\pi a_2^2}{2}+\frac{a+b}{2}\cdot h;\ a_1=r_1;\ a_2=r_2.$$

На **рис. 2, *г*, *д*, *е*** по сравнению с **рис. 2, *б*** приняты обозначения $h_0=R_2$.

3. Приближенное решение задачи напряженного состояния кривого бруса

На основе методов сопротивления материалов в поперечных сечениях кривого бруса возникающее напряженное состояние слагается из напряжения растяжения и напряжения от изгибающего момента $M_{\text{изг}}$: $\sigma=\sigma_{\text{раст}}+\sigma_{\text{изг}}$, где $\sigma_{\text{раст}}=P/F$ — напряжение от растяжения.

Напряжения от изгибающего момента определяются с учетом кривизны бруса.

$$\sigma_{\text{изг}}=\frac{M_{\text{изг}}}{F\cdot e}\cdot\frac{y}{r+y},$$

Здесь $M_{\text{изг}}=P(R_2+h_1)$ — изгибающий момент: F — площадь поперечного сечения; $e=\rho-r$ — расстояние от нейтральной линии (слоя) до центра тяжести сечения; y — расстояние от нейтрального слоя до рассматриваемой точки сечения (для которой определяется напряжение).

Таким образом, суммарное напряжение, возникающее в поперечном сечении кривого бруса, определятся следующим выражением

$$\sigma=\sigma_{\text{раст}}+\sigma_{\text{изг}}=\frac{P}{F}+\frac{M_{\text{изг}}}{F\cdot e}\cdot\frac{y}{r+y}.$$

В точках внутреннего контура (в точке «*A*») нормальное напряжение σ_A получает максимальное значение, так как для точек внутреннего контура напряжения от растягивающей силы P (то есть напряжение σ_P) и от изгибающего момента $M_{\text{изг}}$ (т. е. напряжение $\sigma_{\text{изг}}$) суммируется (при этом $y=r-R_2$)

$$\sigma_{\max}=\sigma_A=\sigma_{\text{раст}}+\sigma_{\text{изг}}=\frac{P}{P}+\frac{M_{\text{изг}}}{F\cdot e}\frac{r-R_2}{R_2}=$$
$$=\frac{P}{F}+\frac{P(R_2+h_1)}{F\cdot e}\frac{r-R_2}{R_2}.$$

Применяя эту формулу для различных поперечных сечений, соответственно получим:

а) для кривого бруса с круговым поперечным сечением:

$$\sigma_{\max}=\sigma_A=\frac{P}{\pi\frac{d^2}{4}}+\frac{P\left(R_2+\frac{d}{2}\right)}{F\cdot e}\cdot\frac{r-R_2}{R_2}.$$

Значения e и p определяются формулой (1);

б) сечением кривого бруса является прямоугольник.

Максимальное нормальное напряжение $\sigma_{\max}$ при этом будет определено на основе следующего выражения:

$$\sigma_{\max}=\sigma_A=\sigma_{\text{раст}}+\sigma_{\text{изг}}=\frac{P}{h\cdot b}+$$
$$+\frac{P\left(R_2+\frac{h}{2}\right)}{F\cdot e}\frac{r-R_2}{R_2}.$$

Величины e и p определяются формулой (2);

в) поперечное сечение кривого бруса является равнобочная трапеция с прямолинейными основаниями. В этом случае напряжение в точках внутреннего контура (цилиндрическая поверхность радиуса R_2) определяется следующим выражением:

$$\sigma_{\max}=\sigma_A=\sigma_{\text{раст}}+\sigma_{\text{изг}}=$$
$$=\frac{P}{\frac{a+b}{2}\cdot h}+\frac{P(R_2+h_1)}{F\cdot e}\frac{r-R_2}{R_2},$$

где величины h_1, e и p определяются на основе формул (3).

4. Определение напряженного состояния криволинейных брусьев

Под действием приложенной силы P в поперечных сечениях кривого бруса возникает нормальное напряжение, разлагающееся на две составляющие: нормальное напряжение от растягивающей силы P и нормальное напряжение от чистого изгиба моментом $M_{\text{изг}}=P\cdot x$ (где x — длина плеча пары), при этом максимальное значение длины плеча $x_{\max}=R_2+h_1$ (рис. 2, в). Поэтому рассматриваемая задачи делится на две задачи: растяжение однородного бруса силой P (перпендикулярная к площади поперечного сечения F) и чистый изгиб кривого бруса моментом $M_{\text{изг}}$.

1. Растяжение бруса силой P.

Как известно [1, 5–9] при растяжении бруса силой P, компоненты напряжения будут определяется формулами:

$$\sigma_\theta=\frac{P}{F};\ \sigma_r=\sigma_z=\tau_{r\theta}=0.$$

Тогда все уравнения равновесия и условия совместности деформации удовлетворяются тождественно. В этом можно убедиться, подставляя эти выражения в соответствующие уравнения.

2. Чистый изгиб криволинейных брусьев.

Как известно, при исследованиях напряженного состояния в круглых дисках, на концах криволинейных брусьях с круговой осью, удобно использовать полярные координаты (r и θ). Если теперь ввести функцию напряжений $\varphi(x,y)=\varphi(r,\theta)$, то уравнения равновесия и условии совместности сводятся к следующему виду [1, 5–9].

$$\Delta\Delta\varphi=0, \qquad (4)$$

где

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}$$

— оператор Лапласа.

Уравнение (4) называется бигармоническим уравнением, поэтому функция напряжения должна быть бигармонической.

Если рассматриваются осесимметричные задачи, которые не зависят от переменной θ (полярного угла), то для этих задач бигармоническое уравнение (4) примет более простой вид.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)=0. \qquad (5)$$

При этих предположениях все формулы существенно упростятся.

Известно, что общее решение дифференциального уравнения четвертого порядка (5) можно принять в следующем виде [6], [7], [9]

$$\varphi(r)=C_1C_2\cdot\ln r+C_4r^2\cdot\ln r+C_3\cdot r^2. \qquad (6)$$

Подставляя выражение (6) в формулы, компоненты напряжений σ_r, σ_θ и $\tau_{r\theta}$ будут определяться следующим образом:

$$\sigma_r=\frac{C_2}{r^2}+C_4(1+2\ln r)+2C_3;$$

$$\sigma_\theta=-\frac{C_2}{r^2}+C_4(3+2\ln r)+2C_3; \quad \tau_{r\theta}=0. \qquad (7)$$

Аналогичным образом можно определить компоненты деформации $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$ и $\gamma_{r\theta}$.

Из общего решения (6) оссесимметричных задач можно получить решение для многих частных задач о полярно-симметричных случаях (при отсутствии объемных сил).

Интегральные постоянные $C_1 \div C_4$ определяются из граничных условий каждой конкретной задачи в отдельности.

При чистом изгибе криволинейного бруса, ось которого очерчена по дуге окружности от изгибающего момента $M_{\text{изг}}$, имеем следующие граничные условия.

➨ на внутренней цилиндрической поверхности радиуса $r=R_2$, радиальном направление напряжение σ_r, а также $\tau_{r\theta}$ отсутствует (так как нормальная сила отсутствует): $\sigma_r=0$; $\tau_{r\theta}=0$ при $\tau=R_2$;

➨ на внешней поверхности бруса (при $\tau=R_1$) компоненты напряжений σ_r и $\tau_{r\theta}$ также отсутствуют (так как нормальная сила равна нулю): $\sigma_r=0$; $\tau_{r\theta}=0$ при $\tau=R_1$;

➨ на торцах кривого бруса равнодействующая нормальных напряжений σ_θ равно нулю:

$$\int_F \sigma_\theta\cdot dF=0;$$

➨ момент, создаваемый напряжениями σ_θ, должен приводиться к паре с моментом $M_{\text{изг}}$:

$$\int_F \sigma_\theta\cdot r\cdot dF=M_{\text{изг}}.$$

В этих формулах величина dF — элементарная площадь поперечного сечения:

$$dF=b^*dr,$$

где b^* — ширина элементарной полосы в каждой поперечном сечение, dr — высоты элементарной полосы.

Так как для прямоугольного поперечного сечения $dF=bdr$, где b = const, то компоненты напряжений в криволинейном брусе с прямоугольным поперечным сечением будут определяться формулами:

$$\sigma_r=\frac{P}{F}+\frac{1}{r^2}\left[-\frac{4M}{b\cdot\delta}R_1^2R_2^2\ln\frac{R_1}{R_2}\right]+(1+2\ln r)\times$$

$$\times\left[-\frac{2M}{b\cdot\delta}\left(R_1^2-R_2^2\right)\right]+\frac{2M}{b\cdot\delta}\left[R_1^2-R_2^2+2\left(R_1^2\ln R_1-R_2^2\ln R_2\right)\right];$$

$$\sigma_\theta=\frac{P}{F}+\frac{1}{r^2}\left[-\frac{4M}{b\cdot\delta}R_1^2R_2^2\ln\frac{R_1}{R_2}\right]+(3+2\ln r)\times$$

$$\times\left(-\frac{2M}{b\cdot\delta}\right)\left(R_1^2-R_2^2\right)+\frac{2M}{b\cdot\delta}\left[R_1^2-R_2^2+2\left(R_1^2\ln R_1-R_2^2\ln R_2\right)\right];$$

$$\tau_{r\theta}=0. \qquad (7)$$

Учитывая, что для трапецеидального поперечного сечения, элементарная площадь определяется выражением **(рис. 3)**.

$$dF = b^* \cdot dr = \left[b + \frac{a-b}{h}(R_1 - r) \right] dr,$$

то, компоненты нормальных напряжений σ_r, σ_θ и $\tau_{r\theta}$ в точках внутренней цилиндрической поверхности определяем следующими формулами (заменяя $M_{\text{изг}} = -M$):

$$\sigma_r = \frac{-2M}{\alpha_1} \cdot \ln \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{R_1^2}{R_1^2 - R_2^2} + \frac{P}{F} +$$

$$+ \frac{M}{\delta_3} \cdot \left(1 + 2\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) + \frac{M}{\alpha_1} \cdot (1 + 2\ln R_2);$$

$$\sigma_\theta = \frac{2M}{\alpha_1} \cdot \ln \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{R_1^2}{R_1^2 - R_2^2} - \frac{M}{\alpha_1} \cdot (3 + 2\ln R_2) +$$

$$+ \frac{P}{F} + \frac{(-M)}{\delta_3} \cdot \left(1 + 2\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right); \ \tau_{r\theta} = 0; \qquad (8)$$

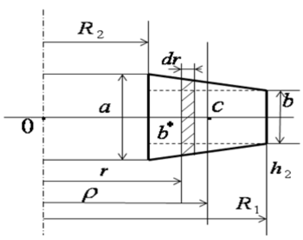

Рис. 3. Трапецеидальное поперечное сечение

Если поперечное сечение кривого бруса будет круговым, то ход решения задачи не изменится. Следует отметить, что при этом элементарная площадь поперечного сечения dF будет в следующем виде **(рис. 4)**:

$$dF = b \cdot d\rho = 2\sqrt{R^2 - r^2} \cdot d\rho;$$

$$\rho = R_2 + R - r = a - r; \ d\rho = -dr,$$

где $a = R_2 + R$, R — радиус кругового сечения. Поэтому изгибающий момент $\tau_{r\theta}$, будет определяться равенством:

$$M_{\text{изг}} = \int_F \sigma_\theta \rho dF = \int_{R_2}^{R_1} \left[-\frac{C_2}{\rho^2} + 2C_3 + C_4 (3 + 2\ln\rho) \rho dF = \right.$$

$$= -\int_{R_2}^{R_1} \left[-\frac{C_2}{a-r} + 2C_3(a-r) + C_4 \cdot 2(a-r)\ln(a-r) + \right.$$

$$\left. + 3C_4(a-r) \right] \cdot 2\sqrt{R^2 - r^2} \cdot dr.$$

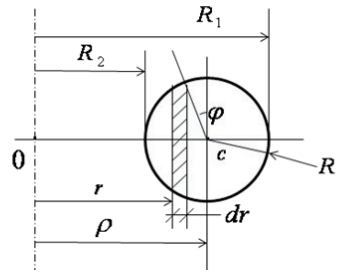

Рис. 4. Круговое поперечное сечение

Далее, решая это уравнение совместно с условиями неразрывности деформации, можно определить интегральные постоянные C_2, C_3 и C_4, а тем самым компоненты нормальных напряжений σ_r, σ_θ и $\tau_{r\theta}$.

Суммарное максимальное напряжение σ_θ будет определяться аналогично формуле (8).

Полученные решения (для прямоугольного, кругового и трапецеидального сечения) иллюстрируется соответствующими числовыми примерами.

5. Числовые результаты, вычисленные по методу теории упругости

Размеры поперечных сечений кривого бруса и значения нагрузки P при числовых расчетах такие же, как и в первом пункте (где результаты вычислений проводились по методу сопротивления материалов).

Кривой брус прямоугольного поперечного сечения. Вычисленные по формуле (7) максимальные напряжения σ_θ имеют следующие значения, представленные в **табл. 1**.

Таблица 1

	Кривой брус прямоугольного поперечного сечения			Кривой брус с трапецеидальным поперечным сечением			Кривой брус с круговым поперечным сечением		
	P (т)	Φ (см²)	σ_θ кг/см²	P (т)	Φ (см²)	σ_θ кг/см²	P (т)	Φ (см²)	σ_θ кг/см²
1	4	8	93,41	4	18	15,56	4	12,56	79,3
2	10	18	32,6	10	30	20,4	10	28,20	30,8

Критическая нагрузка $P_{\text{кр}}$ на основе критерия Гриффитса-Ирвина вычисляется по формуле [3–5]:

$$P_{\text{кр}} = \frac{10}{0{,}97 \cdot 4a} [\sigma_b].$$

где a — значения максимального нормального напряжения $\sigma_{\max}$, а $[\sigma_b]$ — предел выносливости материала кривого бруса [1, 6, 7, 10, 11] — значения, представленные в **табл. 2**.

Таблица 2

Материалы	$[\sigma_\theta]$
Ст-10 — сталь	34 кг/см^2
Ст-25 — сталь	46 кг/см^2
Ст-40 — сталь	58 кг/см^2
Ст-20 — сталь	80 кг/см^2
Ст-(12–28) серый чугун 50 кг/мм^2 при сжатии, 12 кг/мм^2 — при растяжении	

Подставляя найденные значения величины $a=\sigma_{\max}$, подобрав материал, можно найти критическую нагрузку $P_{кр}$ по вышеуказанной формуле, при которой начинается разрушение.

Для вышеуказанных поперечных сечений кривого бруса, критическая нагрузка $P_{кр}$, получила такие значения:

а) $P_{кр}=2{,}997[\sigma_в]$,

б) $P_{кр}=2{,}26[\sigma_в]$,

в) $P_{кр}=3{,}48[\sigma_в]$.

5. Выводы

Анализ полученных числовых результатов, вычисленных по обоим методам, показал, что в инженерных расчетах можно с достаточной точностью пользоваться методами сопротивления материалов, так как максимальное отклонения не превышают 5 % от точного расчета.

Литература

1. Беляев, Н. М. Сопротивление материалов [Текст] / Н. М. Беляев. — М.: Наука, 1963. — 856 с.
2. Кулиев, С. А. Теоретическая механика (краткий курс) [Текст] / С. А. Кулиев, Е. Б. Айвязов. — Баку, Азернешр, 2003. — 396 с.
3. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики [Текст] / С. М. Тарг. — М.: Физматиз, 1968. — 480 с.
4. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики [Текст] / А. А. Яблонский. — М.: Высшая школа, 1977. — 368 с.
5. Амензаде, Ю. А. Теория упругости [Текст] / Ю. А. Амензаде. — М.: Высшая школа, 1976. — 272 с.
6. Кулиев, С. А. Двумерные задачи теории упругости [Текст] / С. А. Кулиев. — М.: Строиздат, 1992. — 352 с.
7. Кулиев, С. А. Некоторые задачи теории упругости [Текст] / С. А. Кулиев. — Баку, Азернешр, 2001. — 400 с.
8. Мусхелишвили, Н. И. Некоторые задачи математической теории упругости [Текст] / Н. И. Мусхелишвили. — М.: Наука, 1966. — 648 с.
9. Тимошенко, С. Р. Теория упругости [Текст] / С. Р. Тимошенко. — М.: Наука, 1965. — 364 с.
10. Бережнитский, Л. Т. Изгиб тоньких пластинок с дефектами типа трещин [Текст] / Л. Т. Бережнитский, М. В. Делявский, В. В. Паносюк. — Киев: Науково-думка, 1979. — 400 с.
11. Шерман, Д. Н. Изгиб поперечной силой эллиптического бруса ослабленного продольно круговой цилиндрической полостью [Текст] / Д. Н. Шерман // Институт механики АН СССР. — 1953. — Т. XVII. — С. 121–150.

Abstract. Stress state of the curved beam, the axis of which is drawn along a circular arc is considered. The beam is limited by the surfaces of the circular hollow cylinder. The cross-section of the beam can be of any shape (three different cross-sections, namely circular, rectangular and trapezoidal is taken as an example).

The solution of the problem consists of three series of tasks: selecting the cross-section, approximate solution (based on the methods of strength of materials) and exact solution of the problem using the method of the theory of elasticity.

Keywords: lifting hooks, cross-section stress state, approximate solution, exact solution.