Представлена узагальнена математична модель динаміки популяцій копитних. Приведені результати досліджень узагальненої математичної моделі на предмет наявності особливих рішень

Ключові слова: узагальнена математична модель, особливі рішення

Представлена обобщенная математическая модель динамики популяций копытных. Приведены результаты исследований обобщенной математической модели на предмет наличия особых решений

Ключевые слова: обобщенная математическая модель, особые решения

The article presents the generalized mathematical model of the ungulates population dynamics. The research results of a generalized mathematical model for the presence of specific solutions are presented

Keywords: generalized mathematical model, special solutions

УДК 007.51:519.8 (075.8)

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЫХ РЕШЕНИЙ ОБОБЩЁННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИЙ

А. В. Маевский
Аспирант
Житомирский национальный агроекологический университет
бульвар Старый, 7, г. Житомир, Украина, 10008
Контактный тел. (0412) 415-686, 097-403-14-96
E-mail: eko_univer@i.ua

Постановка задачи

Изучение динамики численности популяций необходимо для создания научных основ оптимального использования полезных видов животных. Использование математического аппарата позволяет создавать математические модели, адекватно описывающие динамику численности популяций. Такой моделью является обобщенная математическая модель динамики популяций [2], полученная теоретическим путем на основе анализа функционирования систем. В связи с нахождением решения дифференциального уравнения, которым представлена вышеупомянутая модель, возникает вопрос о наличии особых решений.

В данной статье проводится анализ дифференциального уравнения, описывающего динамику численности популяций, с целью выявления особых решений обобщенной модели динамики популяций.

Обобщенная математическая модель динамики популяций

Как известно, модель динамики популяций Лотки-Вольтерра [1] имеет вид:

$$\frac{dN}{dt} = \varphi N - \frac{N^2}{a_0} \quad . \tag{1}$$

Разработанная обобщенная модель динамики популяций имеет вид нелинейного дифференциального уравнения [2]:

$$\left(1 + a_1 N\right)\frac{dN}{dt} = \varphi N - \frac{N^2}{a_0}, \tag{2}$$

где N – количество особей в популяции; φ – потенциал экспоненциального роста; a_0, a_1 – параметры потерь, сдерживающие экспоненциальный рост популяций.

Сравнительный анализ (1) и (2) показывает, что уравнение (2) отличается от уравнения Ферхюльста (1) наличием нелинейного элемента $a_1 N\frac{dN}{dt}$.

Особые решения модели динамики популяций

Сделаем замену $N = y,\ t = x$, тогда уравнение (2) примет вид:

$$\left(1 + a_1 y\right)\cdot\frac{dy}{dx} = \varphi y - \frac{y^2}{a_0}; \tag{2'}$$

Разделяя переменные, получим:

$$\left(1 + a_1 y\right)dy = \left(\varphi y - \frac{1}{a_0}y^2\right)dx \quad \text{или} \quad \frac{1 + a_1 y}{\varphi y - \frac{1}{a_0}y^2}dy = dx;$$

где $\frac{1}{a_0} = k;\quad y \neq 0;\quad \frac{1}{k} = a_0.$

Интегрируя, находим:

$$\int\frac{1 + a_1 y}{\varphi y - ky^2}dy = \int dx \tag{3}$$

Упростим обобщенную логистическую модель:

$$\frac{1 + a_1 y}{\varphi y - ky^2} = \frac{1}{\varphi y - ky^2} + \frac{a_1 y}{\varphi y - ky^2} = = \frac{1}{\varphi y - ky^2} + \frac{a_1}{\varphi - ky^2} = \frac{1}{y\left(\varphi - ky\right)} + \frac{a_1}{\varphi - ky}. \tag{4}$$

Подставив (4) в (3), получим:

$$\int\frac{1 + a_1 y}{\varphi y - ky^2}dy = \underbrace{\int\frac{1}{y\left(\varphi - ky\right)}dy}_{\mathbf{(I)}} + \underbrace{\int\frac{a_1}{\varphi - ky}dy}_{\mathbf{(II)}} \tag{5}$$

Упростив первое и второе слагаемое уравнения (5)

I:

$$\int \frac{1}{y(\varphi - ky)} dy = \frac{1}{k}\int \frac{1}{y\left(\frac{\varphi}{k} - y\right)} dy = \frac{1}{k}\left(\int \frac{\frac{k}{\varphi}}{y} dy + \int \frac{k/\varphi}{\frac{\varphi}{k} - y} dy\right) =$$

$$= \frac{1}{k}\left(\frac{k}{\varphi}\int \frac{dy}{y} + \frac{k}{\varphi}\int \frac{dy}{\frac{\varphi}{k} - y}\right) = \frac{1}{\varphi}\left(\int \frac{dy}{y} + \int \frac{dy}{\frac{\varphi}{k} - y}\right) =$$

$$= \frac{1}{\varphi}\left(\ln y - \ln\left(\frac{\varphi}{k} - y\right) + C_1\right) = \frac{1}{\varphi}\left(\ln \frac{y}{\frac{\varphi}{k} - y} + C_1\right)$$

II:

$$\int \frac{a_1}{\varphi - ky} dy = a_1 \int \frac{dy}{\varphi - ky} = \frac{a_1}{k}\int \frac{dy}{\frac{\varphi}{k} - y} = -\frac{a_1}{k}\ln\left(\frac{\varphi}{k} - y\right) + C_2,$$

Получим:

$$\int \frac{1 + a_1 y}{\varphi y - ky^2} dy = \frac{1}{\varphi}\ln \frac{y}{\frac{\varphi}{k} - y} + C_1 - \frac{a_1}{k}\ln\left(\frac{\varphi}{k} - y\right) + C_2 =$$

$$= \frac{1}{\varphi}\ln \frac{y}{\frac{\varphi}{k} - y} - \frac{a_1}{k}\ln\left(\frac{\varphi}{k} - y\right) + C_3 =$$

$$= \ln\left(\frac{y}{\frac{\varphi}{k} - y}\right)^{\frac{1}{\varphi}} + \ln\left(\frac{\varphi}{k} - y\right)^{-\frac{a_1}{k}} + C_3 = \ln\left(\frac{y}{\frac{\varphi}{k} - y}\right)^{\frac{1}{\varphi}}\left(\frac{\varphi}{k} - y\right)^{-\frac{a_1}{k}} + C_3$$

Правая часть уравнения (3) примет вид:

$$\int dx = x + C_0 ,$$

тогда:

$$\ln\left(\frac{y}{\frac{\varphi}{k} - y}\right)^{\frac{1}{\varphi}}\left(\frac{\varphi}{k} - y\right)^{-\frac{a_1}{k}} + C_3 = x + C_0;$$

$$\ln\left(\frac{y}{\frac{\varphi}{k} - y}\right)^{\frac{1}{\phi}}\left(\frac{\varphi}{k} - y\right)^{-\frac{a_1}{k}} = x + C;$$

$$\ln\left(\frac{y}{\varphi a_0 - y}\right)^{\frac{1}{\varphi}}(\varphi a_0 - y)^{-a_1 a_0} = x + C;$$

$$\left(\frac{y}{\varphi a_0 - y}\right)^{\frac{1}{\varphi}}(\varphi a_0 - y)^{-a_1 a_0} = e^{x+c} = e^x \cdot e^c = C \cdot e^x.$$

Рассмотрим общий интеграл уравнения Φ(x, y, c)=0:

$$\left(\frac{y}{\varphi a_0 - y}\right)^{\frac{1}{\varphi}}(\varphi a_0 - y)^{-a_1 a_0} - Ce^x = 0 .$$

Найдем частную производную $\frac{\partial \Phi}{\partial c}$ $e^x = 0$.

Это невозможно. Поэтому можно сделать вывод, что особых решений дифференциальное уравнение (2’) не имеет.

Рассмотрим уравнение:

$$\frac{y^{\frac{1}{\varphi}}}{(\varphi a_0 - y)^{\frac{1}{\varphi}}} \cdot \frac{1}{(\varphi a_0 - y)^{a_1 a_0}} - ce^x = 0$$

или

$$\frac{y^{\frac{1}{\varphi}}}{(\varphi a_0 - y)^{\frac{1}{\varphi} + a_1 a_0}} - ce^x = 0 . \qquad (6)$$

Общий интеграл уравнения (3) при условии y=N, x=t, а также учитывая уравнение (6), примет вид:

$$\frac{N^{\frac{1}{\varphi}}}{(\varphi a_0 - N)^{\frac{1}{\varphi} + a_1 a_0}} - ce^t = 0.$$

Положив $\varphi a_0 = b_0$, окончательно получим:

$$\frac{N^{\frac{1}{\varphi}}}{(b_0 - N)^{\frac{1}{\varphi} + a_1 a_0}} - ce^t = 0 .$$

Таким образом, дифференциальное уравнение (2) особых точек не имеет. А это свидетельствует о том, что внутренняя точка, через которую проходит единственная интегральная кривая дифференциального уравнения, является обычной точкой.

Выводы и предложения

Приведенный анализ обобщенной модели динамики популяций на предмет наличия особых решений показывает, что таковых решений нет и обобщенная математическая модель динамики популяций копытных имеет решение в виде семейства интегральных кривых.

Литература

1. Пількевич І.А. Математичне моделювання динаміки популяцій: монографія / І.А.Пількевич. – Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2010. – 87 с.
2. Маевский А.В. Математическое моделирование динамики популяций / А.В.Маевский, И.А.Пилькевич // Восточно-Европейский журнал передових технологий.- 2010.- №3/6(45). – С. 50-53.
3. Маевский А.В. Мониторинг копытных животных, обитающих в охотничьих хозяйствах Украины /, А.В.Маевский И.А.Пилькевич // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – 2010. – №5/4 (47). – С. 35-40.
4. Бендат Дж. Прикладной анализ случайных данных / Дж.Бендат, Л.Пирсол. – М.: Мир, 1989. – 540 с.
5. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника / В.И. Тихонов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1982. – 624 с.