

*На основі розв'язку уточнених динамічних рівнянь згину балки отримані і проаналізовані графіки розповсюдження нестационарної хвилі. Показана картина динаміки поперечних зусиль, що виникають у балці під час раптового прикладення моменту, що згинає. Наведені результати, на відміну від загальновідомих, зберігають швидкості розповсюдження фронтів хвиль такими ж як і в теорії пружності*

*Ключові слова: асимптотико-груповий, поперечне зусилля, хвиля що згинає, момент що згинає, нестационарна хвиля*

*На основе решения уточненных динамических уравнений изгиба балки получены и проанализированы графики распространения нестационарной волны. Показана картина динамики поперечных усилий возникающих в балке при внезапно приложенном изгибающем моменте. Приведенные результаты, в отличие от общеизвестных, сохраняют скорости распространения фронтов волн такими же, как и в теории упругости*

*Ключевые слова: асимптотико-групповой, поперечное усилие, изгибная волна, изгибающий момент, нестационарная волна*

# АНАЛИЗ РЕШЕНИЙ УТОЧНЕННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ИЗГИБА БАЛКИ НА ПРИМЕРЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ЭВОЛЮЦИИ ПОПЕРЕЧНЫХ УСИЛИЙ

**Л. Н. Егармина**

Кандидат технических наук, доцент  
Кафедра высшей и прикладной математики  
Запорожская государственная  
инженерная академия  
пр. Ленина, 226, г. Запорожье, Украина, 69006  
E-mail: l.yegarmina@gmail.com

## 1. Введение

Задача распространения нестационарных упругих волн в стержнях и балках представляет значительный теоретический и практический интерес в силу того, что конструкции такого типа и их ударные нагрузки часто встречаются на практике. Такие волны возникают во время ударной нагрузки конструкции, что не является редкостью в современной авиации, космонавтике и т. д. Задачи такого класса в постановке математической теории упругости настолько сложны, что их, как правило, удается решить только приближенно. Особенно сложными являются зоны вблизи фронтов возмущений. Из-за наличия границ (у балки их четыре), в них возникают внутренние многократные отражения фронтов распространяющихся волн. Причем картина отраженных волн непрерывно усложняется в процессе распространения возмущения. Напряженно деформированное состояние, в данном случае, является принципиально трехмерным.

В то же время известные модели динамики таких конструкций недостаточно точно описывают подобные нестационарные волны. Соответствующие уравнения могут либо задавать неправильные скорости распространения фронтов волн, либо описывать бесконечную скорость распространения возмущения, упуская возникающие трехмерные эффекты вблизи фронтов [1, 2].

Рассматривая современные широко распространенные пакеты прикладных программ, необходимо заметить, что они чаще всего используют известные классические модели, которые не всегда являются адекватными сути поставленной задачи из-за по умолчанию

заложенных в их основу недопустимых в некоторых случаях предположений и гипотез о характере исследуемого процесса.

Трехмерные эффекты наилучшим образом учитываются, если соответственные задачи решаются на основе трехмерных динамических уравнений теории упругости [3, 4]. Данное исследование посвящено анализу решений уточненной математической модели изгиба балки полученной без использования предварительных гипотез, а посредством исследования трехмерных динамических уравнений теории упругости методом асимптотико-группового анализа [5]. Указанная модель способна описывать трехмерные эффекты вблизи фронтов распространяющихся волн, показывая усредненную по толщине слоя картину [6].

## 2. Анализ литературных данных и постановка проблемы

Ранее в работе [7] было показано, как известные динамические уравнения продольной деформации стержня получаются из трехмерных уравнений теории упругости при помощи метода асимптотико-группового анализа. Данный метод позволил отказаться от предварительных допущений и гипотез, которые обычно накладываются на исследуемые процессы при получении уравнений динамики стержней [1, 2, 8]. Это тем более интересно, учитывая тот факт, что в динамических задачах существенную роль зачастую играют некоторые факторы, которые не учитываются классическими урав-

нениями, например, поперечные колебания стержня, возникающие при движении продольной волны [5, 6, 9].

В работе [6] получаются асимптотически обоснованные уточненные уравнения изгиба стержня на основе трехмерных уравнений теории упругости. Данная модель позволяет учитывать как известные в изгибе балки эффекты, так и некоторые новые [6]. В данной работе приводится графическая интерпретация уже найденного ранее решения этих уравнений на примере нового исследования – динамики поперечных усилий, возникающих при внезапно приложенном изгибающем моменте на торец полубесконечного стержня квадратного сечения. Приведен анализ полученных результатов.

### 3. Цель и задачи исследования

Целью работы является исследование прифронтовых зон нестационарной волны, возникающей при внезапно приложенном к торцу полубесконечной балки квадратного сечения изгибающему моменту с помощью уточненных динамических уравнений изгиба балки. В данном конкретном исследовании рассматриваются поперечные усилия, возникающие при таком изгибе.

Для достижения указанной цели были поставлены следующие задачи:

1. Выделить из общего решения неисследованные ранее величины – поперечные усилия и их значение в напряженно-деформированном состоянии балки при изгибе.
2. Получить наглядную картину распространения возмущения в балке для поперечных усилий в виде графиков.
3. Проанализировать полученные результаты.

### 4. Поиск поперечных усилий возникающих при изгибе балки квадратного поперечного сечения для случая внезапно приложенного изгибающего момента

В работе [6] подробно изложена процедура получения уточненных динамических уравнений изгиба балки на основе трехмерных уравнений теории упругости при помощи метода асимптотико-группового анализа. При этом реализовано, так называемое, неминимальное упрощение трехмерных уравнений, приводящее к одномерным уравнениям. В однородном случае, отечающем отсутствию нагрузок на боковых поверхностях балки, система уравнений будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \partial_x^2 \phi + c \partial_x W + c \partial_x V - 8a_s^2 (\partial_x w + \phi) - \partial_t^2 \phi &= 0; \\ a_s^2 \partial_x^2 w + (a_s^2 + c) \partial_x \phi + W + cV - \partial_t^2 w &= 0; \\ 8a_s^2 \partial_x^2 w + (8a_s^2 + 24c) \partial_x \phi + 24(W + cV) + \partial_t^2 W &= 0; \\ 8(V + c \partial_x \phi + cW) + \epsilon \partial_t^2 V &= 0; \\ Q = \partial_x w + \phi; \quad M = \partial_x \phi + cW + cV; \\ N = W + c \partial_x \phi + cV; \quad K = V + c \partial_x \phi + cW. \end{aligned} \tag{1}$$

Дополнительный анализ этих уравнений дает новое упрощение [10]:

$$\begin{aligned} a_s^2 \partial_x^2 w + (a_s^2 + c) \partial_x \phi - \partial_t^2 w &= 0; \\ 8a_s^2 \partial_x^2 w + (8a_s^2 + 24c) \partial_x \phi + \partial_t^2 W = 0; \quad 8c \partial_x \phi + \epsilon \partial_t^2 V &= 0; \\ Q = \partial_x w + \phi; \quad M = \partial_x \phi; \quad N = c \partial_x \phi; \quad K = c \partial_x \phi. \end{aligned} \tag{2}$$

Оно отвечает быстрым изменениям по  $x$  и по  $t$ , что в свою очередь говорит о больших значениях дифференциальных операторов  $\partial_x$  и  $\partial_t$ . В этих условиях результаты, получаемые в первом приближении, нуждаются в уточнениях, достигаемых путем построения процедуры последовательных приближений.

Представим искомые функции в виде рядов:

$$\begin{aligned} \phi = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i, \quad w = \sum_{i=1}^{\infty} w_i, \quad W = \sum_{i=1}^{\infty} W_i, \quad V = \sum_{i=1}^{\infty} V_i, \\ Q = \sum_{i=1}^{\infty} Q_i, \quad M = \sum_{i=1}^{\infty} M_i, \quad N = \sum_{i=1}^{\infty} N_i, \quad K = \sum_{i=1}^{\infty} K_i. \end{aligned} \tag{3}$$

Упрощенные уравнения (2) порождают бесконечную рекуррентную систему уравнений:

$$\begin{aligned} \partial_x^2 \phi_i + c \partial_x W_{i-1} + c \partial_x V_{i-1} - 8a_s^2 (\partial_x w_{i-1} + \phi_{i-1}) - \partial_t^2 \phi_i &= 0; \\ a_s^2 \partial_x^2 w_i + (a_s^2 + c) \partial_x \phi_i + W_{i-1} + cV_{i-1} - \partial_t^2 w_i &= 0; \\ 8a_s^2 \partial_x^2 w_i + (8a_s^2 + 24c) \partial_x \phi_i + 24(W_{i-1} + cV_{i-1}) + \partial_t^2 W_i &= 0; \\ 8(V_{i-1} + c \partial_x \phi_i + cW_{i-1}) + \epsilon \partial_t^2 V_i &= 0; \\ Q_i = \partial_x w_i + \phi_i; \\ M_i = \partial_x \phi_i + c(W_{i-1} + V_{i-1}); \\ N_i = W_{i-1} + c(\partial_x \phi_i + V_{i-1}); \\ K_i = V_{i-1} + c(\partial_x \phi_i + W_{i-1}), (i = 1, 2, \dots). \end{aligned} \tag{4}$$

Остановимся коротко на поиске решений полученной системы. Будем разыскивать его в виде:

$$\begin{aligned} \phi_i = \sum_{j=1}^i \phi_{i,j}^1 x^{i-j} (t-x)^{\gamma+i+j-1} + \sum_{j=2}^i \phi_{i,j}^2 x^{i-j} (a_s t-x)^{\gamma+i+j-1}; \\ w_i = \sum_{j=1}^i w_{i,j}^1 x^{i-j} (t-x)^{\gamma+i+j} + \sum_{j=1}^i w_{i,j}^2 x^{i-j} (a_s t-x)^{\gamma+i+j}; \\ W_i = \sum_{j=1}^i W_{i,j}^1 x^{i-j} (t-x)^{\gamma+i+j} + \sum_{j=1}^i W_{i,j}^2 x^{i-j} (a_s t-x)^{\gamma+i+j}; \\ V_i = \sum_{j=1}^i V_{i,j}^1 x^{i-j} (t-x)^{\gamma+i+j} + \sum_{j=2}^i V_{i,j}^2 x^{i-j} (a_s t-x)^{\gamma+i+j}; \\ M_i = \sum_{j=1}^i M_{i,j}^1 x^{i-j} (t-x)^{\gamma+i+j-2} + \sum_{j=2}^i M_{i,j}^2 x^{i-j} (a_s t-x)^{\gamma+i+j-2}; \\ K_i = \sum_{j=1}^i K_{i,j}^1 x^{i-j} (t-x)^{\gamma+i+j-2} + \sum_{j=2}^i K_{i,j}^2 x^{i-j} (a_s t-x)^{\gamma+i+j-2}; \\ N_i = \sum_{j=1}^i N_{i,j}^1 x^{i-j} (t-x)^{\gamma+i+j-2} + \sum_{j=2}^i N_{i,j}^2 x^{i-j} (a_s t-x)^{\gamma+i+j-2}; \\ Q_i = \sum_{j=1}^i Q_{i,j}^1 x^{i-j} (t-x)^{\gamma+i+j-1} + \sum_{j=1}^i Q_{i,j}^2 x^{i-j} (a_s t-x)^{\gamma+i+j-1}. \end{aligned} \tag{5}$$

После подстановки решений (5) в рекуррентные уравнения (4) будем иметь:

$$\begin{aligned} \phi_{i,j-1}^1 &= \frac{1}{2(i-j+1)(\gamma+i+j-2)} \left\{ (i-j+2)(i-j+1)\phi_{i,j-2}^1 + \right. \\ &+ c \left[ (i-j+1)W_{i-1,j-2}^1 - (\gamma+i+j-2)W_{i-1,j-1}^1 + \right. \\ &+ (i-j+1)V_{i-1,j-2}^1 - (\gamma+i+j-2)V_{i-1,j-1}^1 \left. \right] - \\ &- 8a_s^2 \left[ (i-j+1)w_{i-1,j-2}^1 - \right. \\ &\left. - (\gamma+i+j-2)w_{i-1,j-1}^1 + \phi_{i-1,j-1}^1 \right] \left. \right\}, \\ (i=2,3,\dots; j=2,\dots,i); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{i,j}^2 &= \frac{1}{(a_s^2-1)(\gamma+i+j-1)(\gamma+i+j-2)} \left\{ (i-j+2)(i-j+1)\phi_{i,j-2}^2 - \right. \\ &- 2(i-j+1)(\gamma+i+j-2)\phi_{i,j-1}^2 + c \left[ (i-j+1)(W_{i-1,j-2}^2 + V_{i-1,j-2}^2) - \right. \\ &- (\gamma+i+j-2)(W_{i-1,j-1}^2 + V_{i-1,j-1}^2) \left. \right] - 8a_s^2 \left[ (i-j+1)w_{i-1,j-2}^2 - \right. \\ &\left. - (\gamma+i+j-2)w_{i-1,j-1}^2 + \phi_{i-1,j-1}^2 \right] \left. \right\}, \quad (i=2,3,\dots; j=2,\dots,i); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_{ij}^1 &= \frac{1}{(1-a_s^2)(\gamma+i+j)(\gamma+i+j-1)} \left\{ a_s^2(i-j+2)(i-j+1)w_{i,j-2}^1 - \right. \\ &- 2a_s^2(i-j+1)(\gamma+i+j-1)w_{i,j-1}^1 + (a_s^2+c) \left[ (i-j+1)\phi_{i,j-1}^1 - \right. \\ &\left. - (\gamma+i+j-1)\phi_{ij}^1 \right] + W_{i-1,j-1}^1 + cV_{i-1,j-1}^1 \left. \right\}, \quad (i=1,2,\dots; j=1,\dots,i); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_{i,j-1}^2 &= \frac{1}{2a_s^2(i-j+1)(\gamma+i+j-1)} \left\{ a_s^2(i-j+2)(i-j+1)w_{i,j-2}^2 + \right. \\ &+ (a_s^2+c) \left[ (i-j+1)\phi_{i,j-1}^2 - (\gamma+i+j-1)\phi_{ij}^2 \right] + W_{i-1,j-1}^2 + cV_{i-1,j-1}^2 \left. \right\}, \\ (i=2,3,\dots; j=2,\dots,i); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{ij}^1 &= -\frac{1}{(\gamma+i+j)(\gamma+i+j-1)} \left\{ 8a_s^2 \left[ (i-j+2)(i-j+1)w_{i,j-2}^1 - \right. \right. \\ &- 2(i-j+1)(\gamma+i+j-1)w_{i,j-1}^1 + (\gamma+i+j)(\gamma+i+j-1)w_{ij}^1 \left. \right] + \\ &+ (8a_s^2+24c) \left[ (i-j+1)\phi_{i,j-1}^1 - (\gamma+i+j-1)\phi_{ij}^1 \right] + 24(W_{i-1,j-1}^1 + \\ &+ cV_{i-1,j-1}^1) \left. \right\}, \quad (i=1,2,\dots; j=1,\dots,i); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{ij}^2 &= -\frac{1}{a_s^2(\gamma+i+j)(\gamma+i+j-1)} \left\{ 8a_s^2 \left[ (i-j+2)(i-j+1)w_{i,j-2}^2 - \right. \right. \\ &- 2(i-j+1)(\gamma+i+j-1)w_{i,j-1}^2 + (\gamma+i+j)(\gamma+i+j-1)w_{ij}^2 \left. \right] + \\ &+ (8a_s^2+24c) \left[ (i-j+1)\phi_{i,j-1}^2 - (\gamma+i+j-1)\phi_{ij}^2 \right] + 24(W_{i-1,j-1}^2 + \\ &+ cV_{i-1,j-1}^2) \left. \right\}, \quad (i=1,2,\dots; j=1,\dots,i); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{ij}^1 &= -\frac{8}{\varepsilon(\gamma+i+j)(\gamma+i+j-1)} \left\{ V_{i-1,j-1}^1 + c \left[ (i-j+1)\phi_{i,j-1}^1 - \right. \right. \\ &\left. - (\gamma+i+j-1)\phi_{ij}^1 \right] + cW_{i-1,j-1}^1 \left. \right\}, \quad (i=1,2,\dots; j=1,\dots,i); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{ij}^2 &= -\frac{8}{\varepsilon a_s^2(\gamma+i+j)(\gamma+i+j-1)} \left\{ V_{i-1,j-1}^2 + c \left[ (i-j+1)\phi_{i,j-1}^2 - \right. \right. \\ &\left. - (\gamma+i+j-1)\phi_{ij}^2 \right] + cW_{i-1,j-1}^2 \left. \right\}, \quad (i=2,3,\dots; j=2,\dots,i); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{ij}^1 &= (i-j+1)w_{i,j-1}^1 - (\gamma+i+j)w_{ij}^1 + \phi_{ij}^1, \\ (i=1,2,\dots; j=1,\dots,i); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{ij}^2 &= (i-j+1)w_{i,j-1}^2 - (\gamma+i+j)w_{ij}^2 + \phi_{ij}^2, \\ (i=1,2,\dots; j=1,\dots,i); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{ij}^1 &= (i-j+1)\phi_{i,j-1}^1 - (\gamma+i+j-1)\phi_{ij}^1 + c(W_{i-1,j-1}^1 + V_{i-1,j-1}^1), \\ (i=1,2,\dots; j=1,\dots,i); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{ij}^2 &= (i-j+1)\phi_{i,j-1}^2 - (\gamma+i+j-1)\phi_{ij}^2 + c(W_{i-1,j-1}^2 + V_{i-1,j-1}^2), \\ (i=2,3,\dots; j=2,\dots,i); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{ij}^1 &= W_{i-1,j-1}^1 + c \left[ (i-j+1)\phi_{i,j-1}^1 - (\gamma+i+j-1)\phi_{ij}^1 + V_{i-1,j-1}^1 \right], \\ (i=1,2,\dots; j=1,\dots,i); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{ij}^2 &= W_{i-1,j-1}^2 + c \left[ (i-j+1)\phi_{i,j-1}^2 - (\gamma+i+j-1)\phi_{ij}^2 + V_{i-1,j-1}^2 \right], \\ (i=2,3,\dots; j=2,\dots,i); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{ij}^1 &= V_{i-1,j-1}^1 + c \left[ (i-j+1)\phi_{i,j-1}^1 - (\gamma+i+j-1)\phi_{ij}^1 + W_{i-1,j-1}^1 \right], \\ (i=1,2,\dots; j=1,\dots,i); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{ij}^2 &= V_{i-1,j-1}^2 + c \left[ (i-j+1)\phi_{i,j-1}^2 - (\gamma+i+j-1)\phi_{ij}^2 + W_{i-1,j-1}^2 \right], \\ (i=2,3,\dots; j=2,\dots,i). \end{aligned}$$

Выражения вида  $t-x$  в (5) определены при  $x \leq t$  и равны нулю при  $x > t$ ; выражения вида  $a_s t-x$  определены при  $x \leq a_s t$  и равны нулю при  $x > a_s t$ . Необходимо не забывать, что коэффициенты сумм (4) определены при значениях  $j$ , заданных в записях соответствующих сумм. Если индекс выходит за указанные пределы, то коэффициенты считаются равными нулю.

В данном исследовании нас главным образом интересуют поперечные усилия  $K$  и  $N$ . Соответствующие коэффициенты находятся на основании заранее полученных значений коэффициентов для перемещений  $\phi$ ,  $V$  и  $W$ . Однако рекуррентные соотношения (6) не позволяют находить полное решение из-за отсутствия в них возможности определять коэффициенты вида  $\phi_{ii}^1$  и  $w_{ii}^2$ . В работе [10] подробно описана логическая цепочка, приводящая к соответственным формулам:

$$\begin{aligned} \phi_{ii}^1 &= \frac{1}{\gamma+2i-1} \left\{ \phi_{i,i-1}^1 + c(W_{i-1,i-1}^1 + V_{i-1,i-1}^1) - f_i + \right. \\ &+ a_s^{\gamma+2(i-1)} \left[ \phi_{i,i-1}^2 - (\gamma+2i-1)\phi_{ii}^2 + c(W_{i-1,i-1}^2 + V_{i-1,i-1}^2) \right] \left. \right\}, \\ (i=1,2,\dots). \end{aligned} \tag{7}$$

Для случая внезапно приложенного в момент времени  $t=0$  и остающегося в дальнейшем постоянного момента  $M(0,t)=1$  будет:

$$w_{ii}^2 = -\frac{W_{ii}^1}{a_s^{\gamma+2i}} \quad (i=1,2,\dots). \tag{8}$$

Таким образом, имеем возможность доводить решение до конца и получать наглядное представление о происходящих процессах (рис. 1–4).

На рис. 1–4 приведены соответствующие графические результаты. Изображены графики поперечных усилий как функции  $x$  для моментов времени  $\tau=3$  и  $\tau=6$  при условии, что  $M(x,t)=1, Q(x,t)=0$ . Здесь, как и в случае продольной волны [6, 7], на первом фронте

$x=1$  возникает трехмерное напряженное состояние, вызывающее движение этого фронта со скоростью, соответствующей теории упругости. Однако с удалением от данного фронта картина изменяется более сложным образом, чем в случае продольной волны.

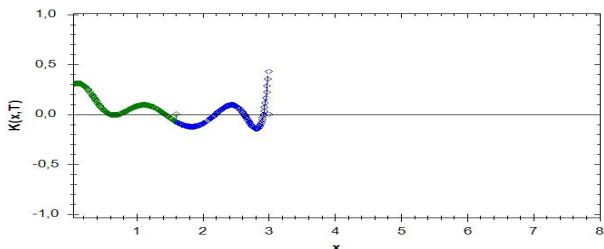


Рис. 1. Поперечное усилие K в стержне при внезапно приложенном изгибающем моменте (безразмерное время  $t=3$ )

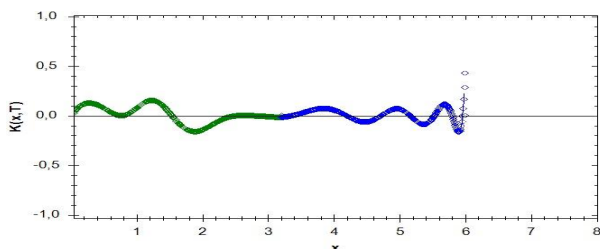


Рис. 2. Поперечное усилие K в стержне при внезапно приложенном изгибающем моменте (безразмерное время  $t=6$ )

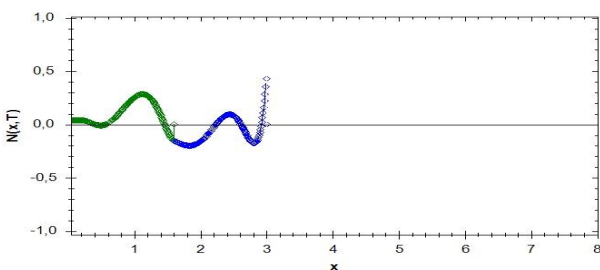


Рис. 3. Поперечное усилие N в стержне при внезапно приложенном изгибающем моменте (безразмерное время  $t=3$ )

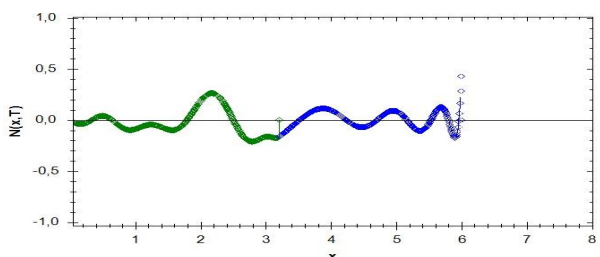


Рис. 4. Поперечное усилие N в стержне при внезапно приложенном изгибающем моменте (безразмерное время  $t=6$ )

Трехмерное состояние постепенно переходит в двумерное уже после прохождения второго фронта  $x=a_2t$  и

без образования квазифронтов [6]. Вначале, с удалением от первого фронта, поперечные усилия постепенно уменьшаются, но в зоне вблизи второго фронта значения усилий резко возрастают. После прохождения этой зоны они быстро убывают, что и означает переход к двумерному состоянию.

### 5. Выводы

Исследование предлагаемых уточненных уравнений позволило получить наглядную картину распространения нестационарного волнового возмущения в балке при воздействии на ее торец внезапно приложенного изгибающего момента. Анализ полученных графиков поперечных усилий показал, что в данном случае следует обратить особое внимание на роль второго фронта. В соответствии с приложенной нагрузкой главным здесь является первый фронт – фронт продольных волн, однако в его близи были получены незначительные изменения. Зато в зоне второго фронта наблюдается резкое увеличение значений. Показан переход от трехмерного напряженно-деформированного состояния к двумерному, что подчеркивает важную роль поперечных составляющих процесса.

### Литература

1. Тимошенко, С. П. Колебания в инженерном деле [Текст] / С. П. Тимошенко. – М.: «Наука», 1967. – 444 с.
2. Бабаков, И. М. Теория колебаний [Текст] / И. М. Бабаков. – М., «Наука», 1968. – 559 с.
3. Векуа, И. Н. К вопросу распространения упругих волн в бесконечном слое, ограниченном двумя параллельными плоскостями [Текст] / И. Н. Векуа // Тр. Тбилисс. Геофизич. Ин-та. – 1937. – Т. 2. – С. 23–50.
4. Кабулов, В. К. Интегральные уравнения типа баланса и их применение к динамическому расчету стержней и балок [Текст] / В. К. Кабулов – АН УзбССР, 1961. – 185 с.
5. Шамровский, А. Д. Асимптотико-групповой анализ дифференциальных уравнений теории упругости [Текст] / А. Д. Шамровский. – Запорожье, Издательство ЗГИА, 1997 – 169 с.
6. Шамровский, О. Д. Розповсюдження нестационарних пружних хвиль у тонкостінних конструкціях [Текст] / О. Д. Шамровський, Л. М. Єгарміна. – Запоріжжя, ЗДІА, 2011. – 132 с.
7. Шамровский, А. Д. Вывод динамических уравнений продольной деформации стержня при помощи двойного упрощения уравнений теории упругости [Текст] / А. Д. Шамровский, Л. Н. Егармина // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 2009. – № 2. – С. 111–115.
8. Чернаков, П. В. Применение интегралов уравнения теплопроводности к решению задач о колебаниях стержней и пластинок [Текст] / П. В. Чернаков // Учен. зал. Куйбышевск. гос. пед. и учит. ин-та. – 1951. – Вып. 11.
9. Скрышник, И. А. Двумерное моделирование трехмерных продольных волн в плоском слое [Текст] / И. А. Скрышник,

А. Д. Шамровский. – Математическое моделирование физико-математических полей и интенсификация промышленного производства, 1995. – С. 43–50.

10. Шамровский, А. Д. Решение уточненных уравнений. Пример внезапно приложенного на торце изгибающего момента [Текст] / А. Д. Шамровский, Л. Н. Егармина // Восточно-Европейский журнал передовых технологий: Прикладная механика – 2011. – Т. 3, № 7 (51). – С. 52–55. – Режим доступа: <http://journals.urau.ua/eejet/article/view/1617/1514>

*В процесі вивчення осередку деформації при подовжньому прокатуванні виконано аналіз складного напружено-деформованого стану металу з точки зору реологічної концепції. Визначено критерії Прандтля, Пекле, Рейнольдса і Фруда, в'язкість сталі в осередку деформації для заданих режимів обробки. Встановлено, що течія металу при прокатці відбувається ламінарно, а не турбулентно, контактний теплообмін здійснюється переважно конвективно, а не молекулярно*

*Ключові слова: осередок деформації, реологічні властивості, течія металу, режими обтиснень, напруження*

*В процессе изучения очага деформации при продольном прокатывании выполнен анализ сложного напряженно-деформированного состояния металла с точки зрения реологической концепции. Определены критерии Прандтля, Пекле, Рейнольдса и Фруда, вязкость стали в очаге деформации для заданных режимов обработки. Установлено, что течение металла при прокатке происходит ламинарно, а не турбулентно, контактный теплообмен осуществляется преимущественно конвективно, а не молекулярно*

*Ключевые слова: очаг деформации, реологические свойства, течение металла, режимы обжатий, напряжение*

УДК 621.771

DOI: 10.15587/1729-4061.2015.38059

## ИССЛЕДОВАНИЕ ОЧАГА ДЕФОРМАЦИИ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ ПРОКАТЫВАНИИ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ РЕОЛОГИЧЕСКОЙ КОНЦЕПЦИИ

**Н. Н. Бережной**

Доктор технических наук, профессор\*

**В. А. Чубенко**

Кандидат технических наук, доцент\*

**А. А. Хиоцкая**

Старший преподаватель\*

**С. О. Мацшин**

Ассистент\*

E-mail: sergej.macyshin@inbox.ru

**В. А. Чубенко\*\***

\*Кафедра обработки металлов давлением  
и материаловедения\*\*

\*\*ГВУЗ «Криворожский национальный университет»

Криворожский металлургический институт

ул. 22-ого Партсъезда, 11,

г. Кривой Рог, Украина, 50027

### 1. Введение

Теория и технология прокатного производства на сегодняшний день достигли значительных успехов. Но существует большое количество недостаточно обоснованных допущений для упрощения расчетов [1], что снижает их точность. Теория прокатного производства основывается на теории упругости и пластичности твердых тел, где рассматриваются напряжения и деформации в сплошных средах вследствие пластической деформации и нагревания металла. При описании механических процессов, которые происходят в очаге деформации при прокатке металлов, используют понятия «течение», «текучесть», «ползучесть», которые недостаточно полно рассмотрены с реологической точки зрения.

Поэтому изучение процессов, которые происходят в очаге деформации при прокатывании, – задача актуальная. Для этого возникает необходимость определить такие критерии подобия, как критерий Прандтля, Пекле, Рейнольдса и Фруда, а также вязкость металла в очаге деформации, что позволит определить характер течение металла, характер теплопереноса в очаге деформации и повысить точность расчетов.

### 2. Анализ литературных данных и постановка проблемы

Теория прокатного производства основывается на теории упругости и пластичности твердых тел,