

УДК 539.3

# НАПРЯЖЕНИЯ В ДИСКРЕТНОМ ЭЛЕМЕНТЕ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

**А.Д. Шамровский**

Доктор технических наук, профессор\*

Контактный тел.: (061) 223-82-16

E-mail: adshamr@rambler.ru

**Д.Н. Колесник**

Аспирант\*

Контактный тел.: (061) 223-82-21

E-mail: mylogin2006@rambler.ru

\*Кафедра программного обеспечения  
автоматизированных систем

Запорожская государственная инженерная академия  
пр. Ленина, 226, г. Запорожье, 69006

*Розглянута методика дискретизації кон-  
тинуальних навантажень. Запропоновано  
підхід для знаходження напружень в дис-  
кретному елементі скінченного розміру, що  
дозволяє будувати епюри та діаграми напру-  
жень*

**Ключові слова:** дискретна модель, дискре-  
тизація навантажень, напруження

*Рассмотрена методика дискретизации  
континуальных нагрузок. Предложен подход  
для нахождения напряжений в дискретном  
элементе конечных размеров, позволяющий  
строить эпюры и диаграммы напряжений*

**Ключевые слова:** дискретная модель, дис-  
кретизация нагрузок, напряжения

*The method of continuous loads sampling is  
observed here. An approach for discrete element  
of finite size stress finding, what allows building  
diagrams and charts stresses, is described here*

**Keywords:** discrete model, loads sampling,  
stresses

## Введение

Ранее [1, 2] была предложена дискретная модель элемента конечных размеров (рис. 1), который может быть использован для решения плоских задач механики деформируемого твердого тела. Данная модель, в частности, базируется на идее моделирования сплошной среды системой упругих стержней, которые деформируются совместно [3]. Решение данной модели производится с помощью метода последовательных перемещений [4].

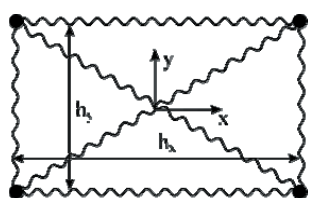


Рис. 1. Дискретный элемент конечных размеров

Благодаря используемому подходу по нахождению жесткостей в данной модели [2], даже один такой элемент позволяет получать математически точные результаты перемещений в узлах модели для основных типов нагрузки, таких как растяжение-сжатие, сдвиг и изгиб [1]. Использование нескольких таких элементов позволяет уточнять результаты в промежутках между углами, что необходимо для более точного решения задач со сложными видами нагружения. Следует заметить, что на данный момент применимость данного метода моделирования является ограниченной объектами, позволяющими разбиение на конечное число элементов прямоугольной формы.

## Дискретизация напряжений

Использование дискретных моделей для решения задач с континуальными граничными условиями, ставит вопрос о методе дискретизации данных условий.

В случае, когда нагрузка задана некоторой функцией  $\sigma$ , находим ее составляющие на каждом из участков, которые соответствуют сторонам прямоугольных элементов тех граней, на которые действует нагрузка. Целью всех операций над нагрузкой является поиск ее главного вектора  $P$  и главного момента  $M$  на каждой грани. Главный вектор нагрузки раскладывается на две составляющих: нормальную  $P_v$  и касательную  $P_\tau$ . Они соответственно заменяются двумя половинными силами, приложенными в вершинах прямоугольника:  $P_v = \frac{1}{2}P_v + \frac{1}{2}P_v$ ,  $P_\tau = \frac{1}{2}P_\tau + \frac{1}{2}P_\tau$ , а момент - двумя компонентами соответствующей пары сил:  $P_M = M/h_y$ .

В общем случае, когда усилия действуют на всех четырех гранях прямоугольника (рис. 2) поступаем аналогично:

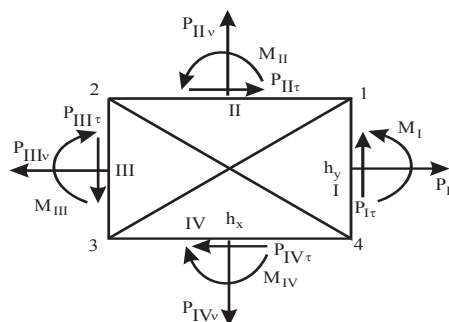


Рис. 2. Главные компоненты усилий на гранях элемента

Заменяя каждую компоненту изображенных усилий на две силы так же, как выполнено ранее, получаем следующую картину (рис. 3). В каждой угловой точке прямоугольника теперь действует по три горизонтальных и по три вертикальных силы.

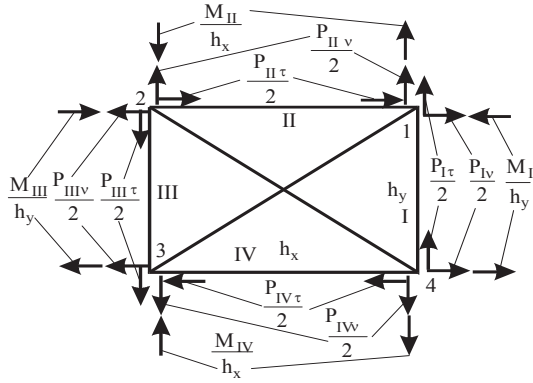


Рис. 3. Главные компоненты усилий в виде сосредоточенных сил

Суммируя эти силы, получаем:

$$\begin{aligned}
 P_{1x} &= \frac{1}{2}P_{IV} - M_I/h_y + \frac{1}{2}P_{II\tau}, & P_{1y} &= \frac{1}{2}P_{IV} + M_{II}/h_x + \frac{1}{2}P_{I\tau}, & (1) \\
 P_{2x} &= -\frac{1}{2}P_{III} + M_{III}/h_y + \frac{1}{2}P_{II\tau}, & P_{2y} &= \frac{1}{2}P_{IV} - M_{II}/h_x - \frac{1}{2}P_{III\tau}, \\
 P_{3x} &= -\frac{1}{2}P_{III} - M_{III}/h_y - \frac{1}{2}P_{IV\tau}, & P_{3y} &= -\frac{1}{2}P_{IV} + M_{IV}/h_x - \frac{1}{2}P_{III\tau}, \\
 P_{4x} &= \frac{1}{2}P_{IV} + M_I/h_y - \frac{1}{2}P_{IV\tau}, & P_{4y} &= -\frac{1}{2}P_{IV} - M_{IV}/h_x + \frac{1}{2}P_{I\tau}.
 \end{aligned}$$

Обратим внимание на то, что в каждую из сумм (1) входит по две нормальные нагрузки, действующие на одной из граней прямоугольника и одна касательная нагрузка, действующая на смежной грани.

Рассмотрим на простых примерах применение данного подхода. Для этого будем использовать прямоугольную область, разбитую на девять прямоугольных элементов. Смежные стороны прямоугольников, для наглядности, будем изображать отдельно, хотя на самом деле они сливаются. Вся фигура в целом имеет размеры  $h_x$  на  $h_y$ .

Начнем с самого простого случая, когда функция нормального напряжений задана константой  $\sigma = const$ , то есть нагрузка равномерно распределена по нагружаемой границе (рис. 4).

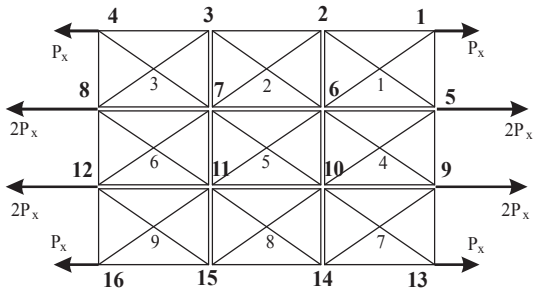


Рис. 4. Распределение сосредоточенных сил при растяжении

Здесь на каждый прямоугольник приходится суммарная нагрузка  $\sigma_x h_y/3$ , которая разбивается на две

сосредоточенные силы  $P_x = \sigma_x h_y/6$ , приложенные в угловых точках прямоугольников. При соединении углов двух смежных прямоугольников эти силы складываются.

В случае, когда на гранях прямоугольной области действуют только одинаковые постоянные касательные напряжения  $\tau = const$ , то есть область подвержена чистому сдвигу. Дискретизация такой нагрузки производится следующим образом (рис. 5):

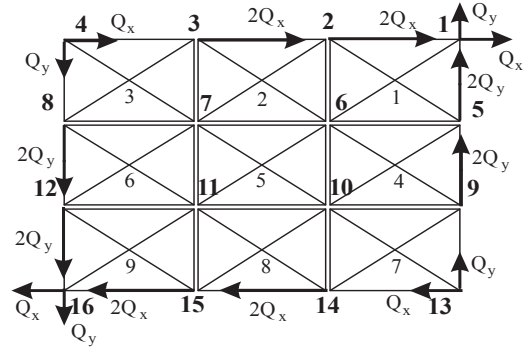


Рис. 5. Распределение сосредоточенных сил при сдвиге

Здесь:  $Q_x = \tau h_x/6$ ,  $Q_y = \tau h_y/6$ . Нагрузка равномерно распределяется по граням элемента.

В случае, когда закон распределения нормальных напряжений задан линейной функцией  $\sigma = a\xi + b$ , сосредоточенные силы будут зависеть от  $\xi$  следующим образом:  $T_1 = ah^2/6 + (a\xi_1 + b)h/2$ ,  $T_2 = ah^2/3 + (a\xi_1 + b)h/2$ .

Интересна так же обратная зависимость:

$$a = 6(T_2 - T_1)/h^2, \quad b = 2(2T_1 - T_2)/h - a\xi_1.$$

Она, в дальнейшем, будет применен для построения эпюр нормальных напряжений.

В случае когда  $\sigma_x = a_x y$ , то есть выполняется изгиб прямоугольной области нормальным напряжением, суммарная картина нагрузки имеет вид, изображенный на рис. 6.

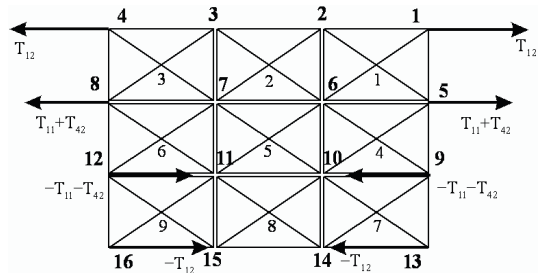


Рис. 6. Распределение сосредоточенных сил при изгибе

Здесь  $\xi = y$ ,  $h = h_y/3$ , значения  $\xi$  для элементов 1 и 3 будет  $\xi_{1,3} = h_y/6$ , для элементов 4 и 6 —  $\xi_{4,6} = -h_y/6$ , для элементов 7 и 9 —  $\xi_{7,9} = -h_y/2$ .

Соответственно:

$$T_{11} = 5a_x h_y^2/108,$$

$$T_{12} = 7a_x h_y^2/108,$$

$$T_{41} = -a_x h_y^2 / 108,$$

$$T_{42} = a_x h_y^2 / 108,$$

$$T_{71} = -7a_x h_y^2 / 108,$$

$$T_{72} = -5a_x h_y^2 / 108.$$

Обратим внимание на то, что в узлах 5 и 8, а также 9 и 10 складываются силы, действующие на разные прямоугольники.

**Напряжения в прямоугольнике**

После дискретизации всех континуальных нагрузок мы имеем множество сосредоточенных сил, которые приложены в вершинах прямоугольников. Теперь можно рассматривать совокупность данных прямоугольников как систему упругих стержней, с той особенностью, что деформации рассматриваются для каждого прямоугольника отдельно [1]. И соответственно применить метод последовательных перемещений [4].

Работа данного метода позволяет получить нам перемещения всех узлов системы и реакции каждой упругой связи каждого элемента (рис. 7).

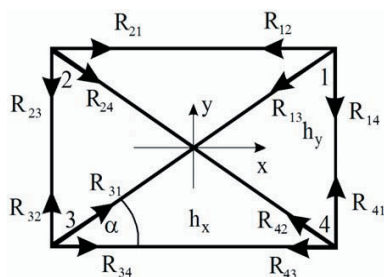


Рис. 7. Реакции, возникшие в упругих связях элемента

Теперь если требуется получить непрерывную картину возникших напряжений необходимо эти реакции линеаризировать. Для этого применим подход обратный изложенному выше относительно получении сосредоточенных сил из компонент напряжения (рис. 8).

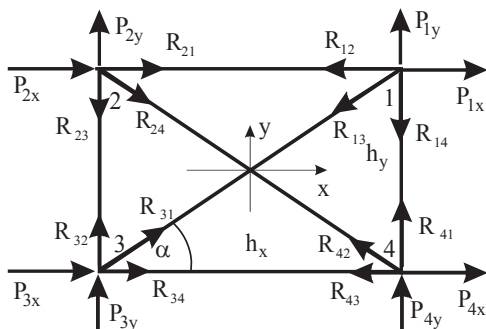


Рис. 8. Сосредоточенные силы, полученные из реакций

В случае мнимых напряжений считаем, что элемент не изменил своей начальной формы и остался прямоугольным.

Составляя для каждой вершины прямоугольника условия равновесия, находим связи между реакциями стержней и усилиями, действующими в вершинах:

$$P_{1x} = R_{12} + R_{13} \cos \alpha, \quad P_{1y} = R_{14} + R_{13} \sin \alpha,$$

$$P_{2x} = -R_{21} - R_{24} \cos \alpha, \quad P_{2y} = R_{23} + R_{24} \sin \alpha,$$

$$P_{3x} = -R_{34} - R_{31} \cos \alpha, \quad P_{3y} = -R_{32} - R_{31} \sin \alpha,$$

$$P_{4x} = R_{43} + R_{42} \cos \alpha, \quad P_{4y} = -R_{41} - R_{42} \sin \alpha.$$

При этом учитываем симметрию реакций:

$$R_{21} = R_{12}, R_{32} = R_{23}, R_{43} = R_{34}, R_{41} = R_{14}, R_{31} = R_{13}, R_{42} = R_{24}.$$

Выполняем, по отношению к реакциям, операцию симметризации:

$$R_x^t = \frac{1}{2}(R_{12} + R_{34}), \quad R_x^f = \frac{1}{2}(R_{12} - R_{34}),$$

$$R_y^t = \frac{1}{2}(R_{14} + R_{23}), \quad R_y^f = \frac{1}{2}(R_{14} - R_{23}),$$

$$R_v = \frac{1}{2}(R_{13} + R_{24}), \quad R_\gamma = \frac{1}{2}(R_{13} - R_{24}).$$

Отсюда:

$$R_{12} = R_{21} = R_x^t + R_x^f, \quad R_{34} = R_{43} = R_x^t - R_x^f,$$

$$R_{14} = R_{41} = R_y^t + R_y^f, \quad R_{23} = R_{32} = R_y^t - R_y^f,$$

$$R_{13} = R_{31} = R_v + R_\gamma, \quad R_{24} = R_{42} = R_v - R_\gamma.$$

Подстановка (3) в (2) дает:

$$P_{1x} = R_x^t + R_x^f + (R_v + R_\gamma) \cos \alpha,$$

$$P_{1y} = R_y^t + R_y^f + (R_v + R_\gamma) \sin \alpha,$$

$$P_{2x} = -R_x^t - R_x^f - (R_v - R_\gamma) \cos \alpha,$$

$$P_{2y} = R_y^t - R_y^f + (R_v - R_\gamma) \sin \alpha,$$

$$P_{3x} = -(R_x^t - R_x^f) - (R_v + R_\gamma) \cos \alpha,$$

$$P_{3y} = -(R_y^t - R_y^f) - (R_v + R_\gamma) \sin \alpha,$$

$$P_{4x} = R_x^t - R_x^f + (R_v - R_\gamma) \cos \alpha,$$

$$P_{4y} = -R_y^t - R_y^f - (R_v - R_\gamma) \sin \alpha.$$

Сравнивая с (1) и упрощая, получаем окончательно для интегральных нагрузок на гранях прямоугольника:

$$P_{Iv} = P_{IIIv} = 2(R_x^t + R_v \cos \alpha), \quad P_{IV} = P_{IIV} = 2(R_y^t + R_v \sin \alpha),$$

$$M_I = M_{III} = -R_x^f h_y, \quad M_{II} = M_{IIV} = R_y^f h_x,$$

$$P_{I\tau} = P_{III\tau} = 2R_y \sin \alpha, \quad P_{II\tau} = P_{IV\tau} = 2R_y \cos \alpha.$$

Исходя из полученных интегральных усилий, можно вычислить соответствующие напряжения относительно реакций:

$$\sigma_I = \sigma_{III} = \frac{2}{h_y} (R_x^t + R_y \cos \alpha) + \frac{12R_x^f}{h_y^2} y;$$

$$\tau_I = \tau_{III} = \frac{2R_y}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} = \tau$$

$$\sigma_{II} = \sigma_{IV} = \frac{2}{h_x} (R_y^t + R_x \sin \alpha) + \frac{12R_y^f}{h_x^2} x;$$

$$\tau_{II} = \tau_{IV} = \frac{2R_x}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} = \tau$$

Относительно сосредоточенных сил:

$$\sigma_I = \sigma_{III} = \frac{1}{2h_y} [(P_{1x} - P_{2x}) - (P_{3x} - P_{4x})] +$$

$$+ \frac{3}{h_y^2} [(P_{1x} - P_{2x}) + (P_{3x} - P_{4x})] y,$$

$$\sigma_{II} = \sigma_{IV} = \frac{1}{2h_x} [(P_{2y} - P_{3y}) + (P_{1y} - P_{4y})] -$$

$$- \frac{3}{h_x^2} [(P_{2y} - P_{3y}) - (P_{1y} - P_{4y})] x$$

$$\tau_I = \tau_{III} = \frac{1}{h_y} (P_{1y} + P_{4y}) = \tau; \quad \tau_{II} = \tau_{IV} = \frac{1}{h_x} (P_{1x} + P_{2x}) = \tau.$$

В качестве примеров изобразим эпюры приведенных выше случаев нагрузки: растяжение (рис. 9), изгиб (рис. 10).

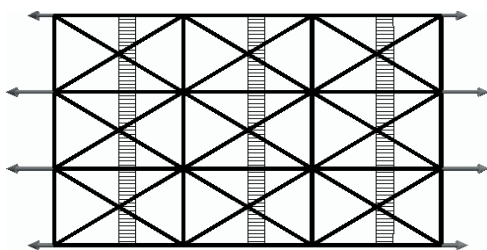


Рис. 9. Эпюра нормальных напряжений в прямоугольной пластине при растяжении

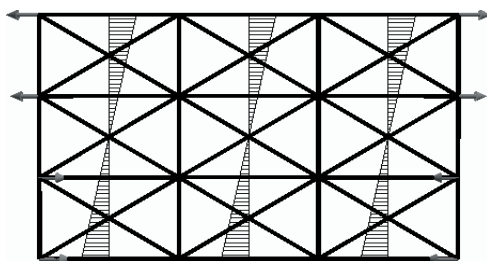


Рис. 10. Эпюра нормальных напряжений в прямоугольной пластине при изгибе

### Интерполяция напряжений

Если же необходимо получить непрерывную картину распределения напряжений можно прибегнуть к методу билинейной интерполяции, так как, работая с четырехугольниками, мы имеем ровно четыре напряжения в четырех точках.

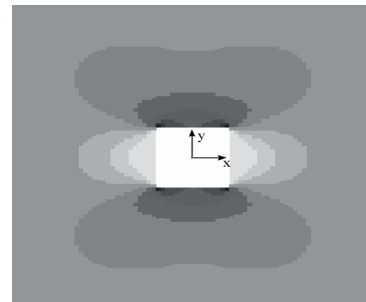
Для этого восстановим билинейную форму второго ранга относительно базиса  $x^0 \cdot y^0, x^1 \cdot y^0, x^0 \cdot y^1, x^1 \cdot y^1$ , т.е. найдем неизвестные компоненты матрицы билинейной формы:  $\varphi(x, y) = \varphi_{11} + x \cdot \varphi_{12} + y \cdot \varphi_{21} + x \cdot y \cdot \varphi_{22}$ .

Так, как мы знаем значения данной функции в четырех точка, а так же координаты этих точек, то задача сводится к решению системы четырех линейных алгебраических уравнений относительно четырех неизвестных:

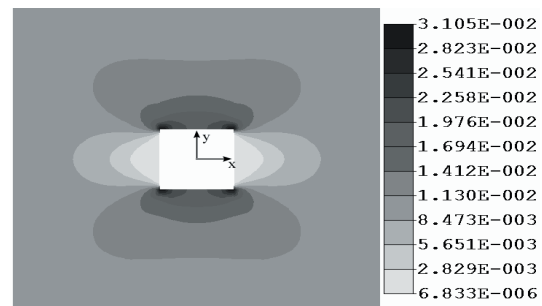
$$\begin{cases} \varphi_{11} + x_1 \cdot \varphi_{12} + y_1 \cdot \varphi_{21} + x_1 \cdot y_1 \cdot \varphi_{22} = \varphi_1(x_1, y_1) \\ \varphi_{11} + x_2 \cdot \varphi_{12} + y_2 \cdot \varphi_{21} + x_2 \cdot y_2 \cdot \varphi_{22} = \varphi_1(x_2, y_2) \\ \varphi_{11} + x_3 \cdot \varphi_{12} + y_3 \cdot \varphi_{21} + x_3 \cdot y_3 \cdot \varphi_{22} = \varphi_1(x_3, y_3) \\ \varphi_{11} + x_4 \cdot \varphi_{12} + y_4 \cdot \varphi_{21} + x_3 \cdot y_3 \cdot \varphi_{22} = \varphi_1(x_4, y_4) \end{cases}$$

Решение данной системы элементарно и поэтому не приводится. Найдя искомые коэффициенты матрицы, мы можем вычислить значения функции в любой точке элемента и всей модели в целом.

Стоит, однако, заметить, что в случае дискретной модели результаты получаемых напряжений одной и той же точки, но для разных прямоугольников могут существенно отличаться. Что может выражаться в ступенчатом характере получаемых диаграмм напряжений (рис. 11а). Их можно сгладить, если использовать определенным образом усредненные относительно разных элементов узловые напряжения (рис. 11б).



а)



б)

Рис. 11. Распределение нормальных напряжений при растяжении пластины с квадратным отверстием а) по элементам; б) усредненное

### Выводы

Для представленной ранее дискретной модели [1,2] предложены методы дискретизации континуальных нагрузок, с получением сосредоточенных сил в узлах модели. Так же предложен метод получения

напряжений относительно реакций рассчитанных в ходе работы алгоритма последовательных приближений [4].

Предложено два подхода для отображения данных реакций, как в виде эпюр напряжений, так и в виде диаграмм напряжений.

### Литература

1. Шамровський О.Д. Дискретні моделі для плоских статических задач теорії пружності [Текст] / А.Д. Шамровський, Ю.А. Лымаренко, Д.Н. Колесник, Миняйло Т.А., В.В. Кривуляк // Восточно-Европейский журнал передовых технологий // научный журнал. – Харьков: Технологический центр, 2011. – №3/7 (51). – С. 11–18.
2. Шамровський А.Д. Решение плоских статических задач механики деформируемого твердого тела при помощи дискретных моделей, получаемых на основе экспериментальных данных [Текст] / А.Д. Шамровський, Ю.А. Лымаренко, Д.Н. Колесник // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: збірник наукових праць / Дніпропетровський національний університет. - Дніпропетровськ: Ліра, 2011. - Вип. 17. - С. 274–288.
3. Шамровський О.Д. Метод последовательных приближений для расчета стержневых систем [Текст] / О.Д. Шамровський, А.І. Безверхий, В.В. Кривуляк // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні, 2008. – № 2. – С. 110 –118.
4. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела [Текст] : учебное пособие для вузов / Ю.Н. Работнов. - 2-е изд., испр. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. - 712 с.

*В роботі виконано аналіз галузі легкового автомобілебудування України: розглянуто товарну номенклатуру та структуру виробництва легкових автомобілів в Україні; визначено кількісні та якісні показники трудових ресурсів автомобілебудівної галузі; охарактеризовано локалізацію виробництва*

*Ключові слова: автомобілебудування, легковий автомобіль, структура виробництва легкових автомобілів*

*В работе выполнен анализ отрасли легкового автомобилестроения Украины: рассмотрена товарная номенклатура и структура производства легковых автомобилей в Украине; определены количественные и качественные показатели трудовых ресурсов автомобилестроительной отрасли; охарактеризована локализация производства*

*Ключевые слова: автомобилестроение, легковой автомобиль, структура производства легковых автомобилей*

*The analysis of Ukrainian motor-car construction industry is made: a commodity nomenclature and pattern of automobile car production is considered in Ukraine; the quantitative and qualitative indexes of motor industry labour resources are determined, localization of production is characterized*

*Keywords: motor industry, car, car production pattern*

УДК 629.331

## АНАЛІЗ ГАЛУЗІ ЛЕГКОВОГО АВТОМОБІЛЕ- БУДУВАННЯ УКРАЇНИ

**О.Г. Кривоконь**

Кандидат філософських наук, доцент\*

Контактний тел.: (057) 707-64-64

E-mail: kryvokon@mail.ru

**А.І. Бондаренко**

Кандидат технічних наук\*

Контактний тел.: (057) 707-64-64,

095-867-44-78

E-mail: anatoliybon@rambler.ru

\*Кафедра “Автомобіле- і тракторобудування”

Національний технічний університет

“Харківський політехнічний інститут”

вул. Фрунзе, 21, м. Харків, Україна 61002

### Вступ

Автомобілебудівна галузь, яку в багатьох економічно розвинених країнах світу відносять до стратегіч-

ної, в Україні, на жаль, досить повільно відновлюється після кризи.

Незважаючи на суттєве скорочення обсягів виробництва та продажу легкових автомобілів, жоден з се-