Выводы

Таким образом, анализ закономерностей течения в рассматриваемых зонах машины с учетом реологических свойств среды позволили разработать методику расчета формующей части машины по переработке целлюлозы, усовершенствовать ее конструкцию и повысить эффективность работы технологической линии в целом.

Литература

1. Идельчик, И.Е. Аэрогидродинамика технологических аппаратов [Текст] / И.Е.Идельчик.-М. : Машиностроение, 1983. -351 с.
2. Каминер,А.А. Гидродинамика в инженерной практике [Текст] / А.А.Каминер, О.М.Яхно. –К. : Техніка,1987. -175с. – Библиогр.: сю165-173.
3. Носко, С.В. Критериальная оценка степени действия сил инерции на гидродинамические характеристики потока в каналах литниковой системы [Текст] / С.В.Носко,В.А.Ковалев / Вестник НТУУ» КПИ» : Машиностроение. -2002. –Т.1, №42 –С.192-193.
4. Носко, С.В. Исследование кинематических характеристик потока в каналах литниковой системы, методами визуализации[Текст] / С.В.Носко, В.А.Мосийчук / Вестник НТУУ «КПИ» : Машиностроение. -2011 №62. –с79-82.
5. Петров, Г.А. Движение жидкости с изменением расхода вдоль пути [Текст] / Г.А.Петров. – М.: Стройиздат 1961. – 137с.

УДК 539.3

УТОЧНЕННАЯ МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ПРОГРЕССИРУЮЩЕГО РАЗРУШЕНИЯ

А.В. Гондлях
Доктор технических наук, профессор
Кафедра химического, полимерного и силикатного машиностроения
Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт»
пр. Победы, 37, г. Киев, 03056
Контактный тел.: (044) 406-85-46, 067-465-53-27
E-mail: avg_ru@mail.ru

Розглянуто питання побудови уточненої ітераційно-аналітичної моделі деформування багатошарових конструкцій з композитних матеріалів, орієнтованої на дослідження процесів прогресуючого руйнування і розшарування. Наведено рішення контрольних завдань

Ключові слова: теорії багатошарових систем, композити, руйнування, міцність

Рассмотрены вопросы построения уточненной итерационно-аналитической модели деформирования многослойных конструкций из композитных материалов, ориентированной на исследование процессов прогрессирующего разрушения и расслоения. Приведены решения контрольных задач

Ключевые слова: теории многослойных систем, композиты, разрушение, прочность

The problems of iteratively refined analytical models constructing of multilayer structures deformation of composite materials, process-oriented ob study of the progressive destruction and layering are shown. The solutions of control tasks are given

Keywords: multilayer systems theory, composite materials, destruction, strength

1. Введение

Растущие требования к экономичности, надежности и снижению материалоемкости сооружений выдвигают задачу анализа деформирования и разрушения многослойных оболочек в качестве одного из главных направлений механики композитов.

Как известно, большие трудности, возникающие в связи с наличием малого параметра - толщины слоев оболочки при непосредственном интегрировании дифференциальных уравнений механики деформированного твердого тела применительно к исследованию н.д.с. оболочечных систем, приводят к необходимости разработки специальных математических моделей расчета, позволяющих, пусть с определенной степенью приближения, но весьма эффективно производить оценку прочностных свойств однородных по толщине и многослойных оболочек.

В связи с этим, наряду с применением для исследования н.д.с. оболочек полуаналитических методов расчета, асимптотического метода интегрирования трехмерных уравнений теории упругости в последнее время рядом авторов разработаны уточненные модели деформирования многослойных оболочечных систем, базирующихся на введении каких - либо гипотез относительно распределения по толщине конструкции вектора перемещений (кинематические гипотезы), либо компонент тензора напряжений (статические гипотезы). К достоинствам моделей данного класса следует отнести физически обоснованный выбор функций приведения. Однако, данный подход обладает существенным недостатком, связанным с неконтролируемостью ошибок, гипотетически вносимых в расчет.

В определенной мере этот недостаток устраняется в теориях итерационного типа, предполагающих уточнение получаемого решения на основании специально разработанных итерационных процедур.

Идея такого подхода, впервые предложенная в работах С.А.Амбарцумяна [1] и развиваемая в дальнейшем в работах В.Г.Пискунова [2], А.О.Рассказова [3], И.Г.Терегулова [4] и их учеников, позволила получить ряд новых гипотез приведения, компоненты распределения напряжений, либо перемещений зависят от н.д.с. конструкции, полученного при решении задачи в рамках гипотезы прямой нормали.

Основываясь на предположении о допустимости разложения вектора перемещений и поперечных касательных напряжений по толщине оболочки по полиномам Лежандра, в работах А.В.Плеханова и А.П.Прусакова [5] построена итерационная процедура интегрирования разрешающих уравнений методом самоуравновешенных состояний.

Несмотря на значительные успехи в области разработки математического моделирования деформирования многослойных оболочечных систем применительно к решению линейных задач, анализ отечественной и зарубежной литературы подтверждает весьма ограниченное число работ, в которых с единых позиций была бы построена математическая модель деформирования оболочечных систем с учетом нелинейных эволюционных процессов, протекающих в материале в зависимости от уровня компонент н.д.с. конструкции.

Построение подобного рода теории оболочек необходимо в случае исследования нелинейного деформирования конструкций с учетом изменения физико-механических параметров слоев обусловленного появлением и развитием зон разрушения. Трудности, возникающие при решении поставленной задачи, обусловлены тем, что моделирование таких характерных особенностей разрушения композитов, как, например, расслоение требует по сути дела учета изменения граничных условий на границах контакта слоев, местоположение которых заведомо не известно.

Данное обстоятельство приводит к необходимости постоянного контроля за числом удерживаемых членов разложения ряда в случае решения задачи методом разложения в ряды, либо получению новых разрешающих соотношений теорий более высокого порядка в случае применения метода гипотез.

В связи с этим, при исследовании процессов нелинейного деформирования и разрушения оболочечных систем, теории, базирующиеся на концепции фиксированного базиса приведения трехмерной задачи механики деформированного твердого тела к двумерной задаче теории оболочек, оказываются не эффективными.

2. Цель работы

Целью настоящей работы является разработка эффективной методики расчета многослойных и однородных пространственных оболочечных систем, позволяющей естественным образом моделировать нелинейный характер изменения физико-механических характеристик слоев пакета, а также процессы трещинообразования в слоях на основании специально разработанной итерационной процедуры физически обоснованного выбора базиса разложения вектора перемещений по толщине оболочек в процессе ее деформирования при статических и динамических нагрузках.

Рассмотрим тонкие, средней толщины и толстые оболочки (в том числе и многослойные), метрика которых задана в местной криволинейной (сопровождающей) системе координат $x^i\left(i=\overline{1,3}\right)$. Ось x^3 направим по нормали к поверхности приведения x^1x^2. После введния базисной системы координат $z^{i'}\left(i=\overline{1,3}\right)$, положение любой точки оболочки определим радиус-вектором $\vec{r}=\vec{r}\left(x^1,x^2,x^3\right)$.

3. Основная процедура итерационно-аналитической теории оболочек

Пусть вектор соответствует действительным перемещениям многослойной оболочки переменной толщины, полученным в результате решения трехмерной задачи теории упругости. В этом случае формально представим компоненты u_i вектора перемещений в виде:

$$u_i=\sum_{s=1}^{s}F_s^i(x^3,t)v_i^s(x^1,x^2,t), \tag{1}$$

где

v_i^s - компоненты обобщенного вектора перемещений поверхности приведения x^1x^2 оболочки, определенные из решения краевой задачи в рамках трехмерного оператора теории упругости;

F_3^i - функции приведения.

Как правило, в представлениях u_i в форме (1) функции F_s^i считаются известными и определяются в виде функциональных сопровождений степенных или тригонометрических рядов, компонентами разложений по полиномам Лагранжа, Лежандра и т.д. Как отмечалось выше, при моделировании процессов трещинообразования такой подход неизбежно приводит к необходимости удержания большого числа членов разложения ряда для детального описания изменения функции перемещений по толщине разнородного пакета слоев, к необходимости постоянного контроля за числом удерживаемых членов разложения ряда, а также к своевременному расширению базиса. Эта ситуация еще более усугубляется при использовании метода гипотез. Поэтому, математические модели процессов нелинейного деформирования и разрушения оболочечных систем, построенные на основе метода разложения в ряды, либо базирующиеся на концепции фиксированного базиса приведения трехмерной задачи механики деформируемого твердого тела к двумерной задаче теории оболочек, оказываются, как правило, не эффективными.

Рассмотрим уравнения (1). Чтобы вектор описывал действительное деформированное состояние оболочки, необходимо выполнение условия стационарности полной энергии системы.

Сформулируем следующую вариационную задачу: найти такие функции v_i^s и F_s^i, которые бы обеспечили выполнение вариационного принципа Гамильтона-Остроградского, а именно:

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(W-K-A)dt = \\ = \delta_{v_i^s}\int_{t_0}^{t_1}(W-K-A)dt + \delta_{F_s^i}\int_{t_0}^{t_1}(W-K-A)dt = 0 \qquad (2)$$

здесь обозначение типа $\delta_{v_i^s}$ и $\delta_{F_s^i}$ означает, что варьирование функционала производится по v_i^s или F_s^i, соответственно.

Учитывая (1) преобразуем (2) к виду:

$$\int_{t_0}^{t_1}\Bigg\{\int_V A_j^r\left(V_i^s;\frac{\partial v_i^s}{\partial x^\alpha};\frac{\partial^2 v_i^s}{\partial x^\alpha\partial x^\beta};F_s^i;\frac{dF_s^i}{dx^3};\frac{d^2F_s^i}{(dx^3)^2};p_j^r\right)\delta v_j^r dV + \\ +\int_V B_j^r\left(V_i^s;\frac{\partial v_i^s}{\partial x^\alpha};\frac{\partial^2 v_i^s}{\partial x^\alpha\partial x^\beta};F_s^i;\frac{dF_s^i}{dx^3};\frac{d^2F_s^i}{(dx^3)^2};p_j^r\right)\delta F_r^j dV - \\ -\int_s a_j^r\left(V_i^s;\frac{\partial v_i^s}{\partial x^\alpha};F_s^i;\frac{dF_s^i}{dx^3};q_j^r\right)\delta v_r^j dS - \\ -\int_s b_j^r\left(V_i^s;\frac{\partial v_i^s}{\partial x^\alpha};F_s^i;\frac{dF_s^i}{dx^3};q_j^r\right)\delta F_r^j dS\ \Bigg\}dt = 0 \qquad (3)$$

Учитывая независимость вариаций δv_j^r и δF_r^j, на основании (3) запишем интегралы, для получения разрешающей системы уравнений

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\int_V A_j^r\left(V_i^s;\frac{\partial v_i^s}{\partial x^\alpha};\frac{\partial^2 v_i^s}{\partial x^\alpha\partial x^\beta};F_s^i;\frac{dF_s^i}{dx^3};\frac{d^2F_s^i}{(dx^3)^2};p_j^r\right)\delta v_j^r dV\right\}dt = 0; \qquad (4)$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\int_V B_j^r\left(V_i^s;\frac{\partial v_i^s}{\partial x^\alpha};\frac{\partial^2 v_i^s}{\partial x^\alpha\partial x^\beta};F_s^i;\frac{dF_s^i}{dx^3};\frac{d^2F_s^i}{(dx^3)^2};p_j^r\right)\delta F_r^j dV\right\}dt = 0;$$

с соответствующими интегралами для получения уравнений, описывающих граничные условия

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\int_s a_j^r\left(v_i^s;\frac{\partial v_i^s}{\partial x^\alpha};F_s^i;\frac{dF_s^i}{dx^3};q_j^r\right)\delta v_r^j dS\right\}dt = 0; \\ \int_{t_0}^{t_1}\left\{\int_s b_j^r\left(v_i^s;\frac{\partial v_i^s}{\partial x^\alpha};F_s^i;\frac{dF_s^i}{dx^3};q_j^r\right)\delta F_r^j dS\right\}dt = 0. \qquad (5)$$

Отличительная особенность выражения (3) от известных из литературных источников функционалов, используемых для построения математических моделей деформирования оболочек, заключается в том, что решение разрешающей системы уравнений, полученных на основе (4) обеспечивает определение не только вектора обобщенных неизвестных v_i^s, но также и физически обоснованных функций приведения F_s^i, независимо от физических процессов, протекающих в материале оболочки в любой момент времени (пластическое деформирование, либо разрушение слоев).

Таким образом, систему дифференциальных уравнений (4) и, определив обобщенные неизвестные v_i^s и функции приведения F_s^i, приходим к непосредственному трехмерному представлению вектора перемещений u_i на основании формул (1), тождественно удовлетворяющему с любой заданной точностью трехмерным уравнениям движения (2). Выполнение этой процедуры прямыми методами может оказаться затруднительным.

В то же время, использование в данном случае итерационных методов, заключающихся в последовательном уточнении компонент v_i^s, либо функций F_s^i, исходя из условия минимизации вектора невязки трехмерного оператора теории упругости (2), позволяет существенным образом упростить получение искомого решения в связи с тем, что система уравнений (4) в этом случае представляется в виде двух подсистем:

1) - системы уравнений движения теории оболочек, сформулированной в смысле метода разложения в ряды относительно обобщенных перемещений при фиксированных (полученных на предыдущей итерации) функциях приведения

$$C_j^{r(n-1)}\left(V_i^{s(n)};\frac{\partial v_i^{s(n)}}{\partial x^\alpha};\frac{\partial^2 v_i^{s(n)}}{\partial x^\alpha\partial x^\beta};p_j^r\right) = 0 \qquad (6)$$

с граничными условиями типа

$$c_j^{r(n-1)}\left(V_i^{s(n)};\frac{\partial v_i^{s(n)}}{\partial x_\alpha};q_j^r\right) = 0 \qquad (7)$$

и 2) - системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно функций F_s^i в смысле метода Крылова- Канторовича при функциях обобщенных перемещений, т.е.:

$$D_j^{r(n-1)}\left(F_s^{i(n)};\frac{dF_s^{i(n)}}{dx^3};\frac{d^2F_s^{i(n)}}{(dx^3)^2};p_j^r\right) = 0 \qquad (8)$$

с соответствующими граничными условиями

$$d_j^{r(n-1)}\left(F_s^{i(n)};\frac{dF_s^{i(n)}}{dx^3};q_j^r\right) = 0 \qquad (9)$$

Коэффициенты в уравнениях (6) и (8) представляют собой интегральные характеристики, зависящие от компонент напряженно - деформированного состояния, полученного на n-1 итерации, а именно:

$$C_j^{r(n-1)} = C_j^{r(n-1)}\left\{\int_h \left(F_s^{i(n-1)}; p_j^{r(n-1)}\right) dh\right\}$$

$$D_j^{r(n-1)} = D_j^{r(n-1)}\left\{\int_S \left(V_j^{r(n-1)}; p_j^{r(n-1)}\right) dS\right\}. \qquad (10)$$

Такая методика решения основной системы уравнений (4) существенно упрощает решение задачи, поскольку соотношения (8) представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которая может быть легко разрешима известными численными методами математической физики, а при соответствующей группировке неизвестных допускает также и аналитическое решение.

4. Применение итерационно-аналитической теории оболочек для получения точных решений определения напряженно - деформированного состояния многослойных плит

В качестве одного из примеров рассмотрим бесконечно длинную плиту, свободно опертую по контуру и находящуюся под действием равномерно распределенной по закону синуса на внешней поверхности $\left(x^3 = \frac{h}{2}\right)$ нагрузки $g = g_o \sin\frac{\pi x^1}{L}$. Точное решение этой задачи приведено в известной работе Pagano [9]. Ось x^2 направлена по ширине плиты. Плита находиться в условиях плоского деформированного состояния, т.е. $e_{22} = e_{12} = e_{23} = 0$. При этом граничные условия формируются следующим образом:

$$\begin{cases} \sigma^{33}_{\left|x^3=\frac{h}{2}\right.} = g_o \sin\frac{\pi x^1}{L}; \quad \sigma^{33}_{\left|x^3=-\frac{h}{2}\right.} = \sigma^{13}_{\left|x^3=\frac{h}{2}\right.} = \sigma^{13}_{\left|x^3=-\frac{h}{2}\right.} = 0; \\ \sigma^{11}_{\left|x^1=0\right.} = \sigma^{11}_{\left|x^1=L\right.} = 0; \quad u_{3\left|x^1=0\right.} = u_{3\left|x^1=L\right.} = 0. \end{cases} \qquad (11)$$

Получим точное решение этой задачи на базе общих положений итерационно-аналитической теории. Для этого представим искомое решение в виде ряда:

$$u_i = \sum_{n=1}^{\infty} F^{i(n)}\left(x^3\right) v_i^{(n)}\left(x^1\right); \qquad (12)$$

Здесь $F^{i(n)}$ - функции, подлежащие определению;

$$v_1^{(n)} = -\frac{n\pi}{L} A_n \cos\frac{n\pi x^1}{L}; \quad v_2^{(n)} = -A_n \sin\frac{n\pi x^1}{L}. \qquad (13)$$

Граничные условия сформулируем аналогично (11).

Компоненты тензора деформаций определим на основании (12) следующим образом:

$$e_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x^1} = \sum_{n=1}^{\infty} F^{1(n)} v_{1,1}^{(n)}; \quad e_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x^3} = F_{,3}^{3(n)} v_3^{(n)}; \qquad (14)$$

$$e_{31} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_1}{\partial x^3} + \frac{\partial u_3}{\partial x^1}\right] = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[F_{,3}^{1(n)} v_1^{(n)} + F^{3(n)} v_{3,1}^{(n)}\right];$$

При этом, учитывая ортогональность рядов (13) выражение для определения работы деформаций и работы внешних сил запишем в виде:

$$\begin{aligned} W = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_v \Big\{ & c^{1111} F^{1(n)^2} v_{1,1}^{(n)^2} + c^{3333} F_{,3}^{3(n)^2} v_3^{(n)^2} + \\ & + 2c^{1133} F^{1(n)} F_{,3}^{3(n)} v_{1,1}^{(n)} v_3^{(n)} + \frac{1}{2} c^{1313} F_{,3}^{3(n)^2} v_1^{(n)^2} + \\ & + c^{1313} F_{,3}^{1(n)} F^{3(n)} v_1^{(n)} v_{3,1}^{(n)} + \frac{1}{2} c^{1313} F^{3(n)^2} v_{3,1}^{(n)^2} \Big\} dV; \end{aligned} \qquad (15)$$

$$A = \sum_{n=1}^{\infty}\int_L g^{\pm} F^{3(n)}_{\left(x^3=\pm\frac{h}{2}\right)} V_3^{(n)} dL. \qquad (16)$$

Следуя стандартной процедуре итерационно-аналитической теории, найдем такие функции $F^{i(n)}$, которые бы при заданных значениях компонент вектора перемещений доставили бы минимум функционала полной энергии системы, т.е.:

$$\begin{aligned} \delta(W-A) = & -\sum_{n=1}^{\infty}\int_v \Big\{ \frac{1}{2} c^{1313} v_1^{(n)^2} F_{,33}^{1(n)} - c^{1111} v_{1,1}^{(n)^2} F^{1(n)} + \\ & + \left(c^{1133} v_{1,1}^{(n)} v_3^{(n)} - \frac{1}{2} c^{1313} v_1^{(n)} v_{3,1}^{(n)}\right) F_{,3}^{3(n)} \Big\} \delta F^{1(n)} dV - \\ & - \sum_{n=1}^{\infty}\int_v \Big\{ c^{3333} v_3^{(n)^2} F_{,33}^{3(n)} - \frac{1}{2} c^{1313} v_{3,1}^{(n)^2} F^{3(n)} + \\ & + \left(\frac{1}{2} c^{1313} v_1^{(n)} v_{3,1}^{(n)} - c^{1133} v_{1,1}^{(n)} v_3^{(n)}\right) F_{,3}^{1(n)} \Big\} \delta F^{3(n)} dV + \\ & + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_v \left\{\left[c^{1313} v_1^{(n)^2} F_{,3}^{1(n)} + c^{1313} v_1^{(n)} v_{3,1}^{(n)} F^{3(n)}\right] \delta F^{1(n)}\right\}_{,3} dV + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty}\int_v \left\{\left[c^{3333} v_3^{(n)^2} F_{,3}^{3(n)} + \frac{1}{2} c^{1313} v_{1,1}^{(n)} v_3^{(n)} F^{1(n)}\right] \delta F^{3(n)}\right\}_{,3} dV - \\ & - \left\{\sum_{n=1}^{\infty}\int_L g^{\pm} V_3^{(n)} \delta F^{3(n)} dL\right\} = 0. \end{aligned} \qquad (17)$$

Учитывая независимость вариаций $\delta F^{i(n)}$, после интегрирования уравнения (17) по первой пространственной координате, получим разрешающую систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $F^{i(n)}$

$$\begin{cases} T_1^{(n)} F_{,33}^{1(n)} - M_1^{(n)} F1(n) + \left(N_1^{(n)} - N_3^{(n)}\right) F_{,3}^{3(n)} = 0; \\ T_3^{(n)} F_{,33}^{3(n)} - M_3^{(n)} F^{3(n)} + \left(N_3^{(n)} - N_1^{(n)}\right) F_{,3}^{1(n)} = 0; \end{cases} \qquad (18)$$

и соответствующие им уравнения для описания граничных условий:

$$\begin{cases} \int_v \left[\left\{T_1^{(n)} F_{,3}^{1(n)} + N_3^{(n)} F^{3(n)}\right\} \delta F^{1(n)}\right]_{,3} = 0; \\ \int_v \left[\left\{T_3^{(n)} F_{,3}^{3(n)} + N_1^{(n)} F^{1(n)}\right\} \delta F^{3(n)}\right]_{,3} dv = \int_L g_{(n)}^{\pm} V_3^{(n)} \delta F^{3(n)} \quad dL, \end{cases} \qquad (19)$$

где:

$$T_1^{(n)}=\frac{1}{2}c^{1313}\int_L v_1^{(n)^2}dL;\qquad T_3^{(n)}=c^{3333}\int_L v_3^{(n)^2}dL;$$

$$M_1^{(n)}=c^{1111}\int_L v_{1,1}^{(n)^2}dL;\qquad M_3^{(n)}=\frac{1}{2}c^{1313}\int_L v_3^{(n)^2}dL;\qquad (20)$$

$$N_1^{(n)}=c^{1133}\int_L v_{1,1}^{(n)}v_3^{(n)}dL;\qquad N_3^{(n)}=\frac{1}{2}c^{1313}\int_L v_1^{(n)}v_{3,1}^{(n)}dL.$$

Следуя стандартной процедуре метода Эйлера, после соответствующей замены переменных, два уравнения (18) приводятся к системе четырех уравнений первой степени, а именно:

$$\begin{cases} T_1^{(n)}F_{,3}^{5(n)}-M_1^{(n)}F^{1(n)}+\left(N_1^{(n)}-N_3^{(n)}\right)F^{\sigma(n)}=0;\\ T_3^{(n)}F_{,3}^{\sigma(n)}-M_3^{(n)}F^{3(n)}-\left(N_1^{(n)}-N_3^{(n)}\right)F^{5(n)}=0;\\ F_{,3}^{1(n)}-F^{5(n)}=0;\\ F_{,3}^{3(n)}-F^{\sigma(n)}=0;\end{cases}\qquad (21)$$

Представляя искомые неизвестные $F^{i(n)}$ в виде $F^{i(n)}=\lambda^{(n)}e^{r(n)}$, после подстановки их в (21), стандартным образом составляем характеристическое уравнение четвертого порядка относительно $r_i^{(n)}$

$$T_1^{(n)}T_3^{(n)}r^{(n)^4}-\left[M_1^{(n)}T_3^{(n)}+M_3^{(n)}T_1^{(n)}-\left(N_1^{(n)}-N_3^{(n)}\right)^2\right]r^{(n)^2}+\qquad (22)$$
$$+M_1^{(n)}M_3^{(n)}=0;$$

решением которого являются корни:

$$r_{1,2,3,4}^{(n)}=\pm\sqrt{s_{1,2}^{(n)}};\qquad (23)$$

$$s_{1,2}^{(n)}=\frac{1}{2}\left[T_1^{(n)}T_3^{(n)}\right]^{-1}\left[M_1^{(n)}T_3^{(n)}+M_3^{(n)}T_1^{(n)}-\left(N_1^{(n)}-N_3^{(n)}\right)^2\right]\pm$$
$$\pm\sqrt{\left[M_1^{(n)}T_3^{(n)}+M_3^{(n)}T_1^{(n)}-\left(N_1^{(n)}-N_3^{(n)}\right)^2\right]^2-4M_1^{(n)}M_3^{(n)}T_1^{(n)}T_3^{(n)}}.$$

При этом искомые функции приведения $F^{1(n)}$ и $F^{3(n)}$ определяются следующим образом:

$$F^{1(n)}=\sum_{i=1}^{4}c_i^{(n)}e^{r_i^{(n)}x^3};$$

$$F^{3(n)}=-\sum_{i=1}^{4}\frac{T_1^{(n)}r_i^{(n)^2}-M_1^{(n)}}{r_i^{(n)}\left(N_1^{(n)}-N_2^{(n)}\right)}c_i^{(n)}e^{r_i^{(n)}x^3}.\qquad (24)$$

Для уточнения физического смысла уравнений (19), определяющих граничные условия, преобразуем их к виду:

$$\begin{cases}\int_h\left[\left\{T_1^{(n)}F_{,3}^{1(n)}+N_3^{(n)}F^{3(n)}\right\}\delta F^{1(n)}\right]_{,3}dh=\int_L\sigma^{13}v_1^{(n)}\delta F^{1(n)}n_3dL=0.\\ \int_h\left[\left\{T_3^{(n)}F_{,3}^{3(n)}+N_1^{(n)}F^{1(n)}\right\}\delta F^{3(n)}\right]_{,3}dh=\int_L\sigma_{(n)}^{33}v_3^{(n)}\delta F^{3(n)}n_3dL=\\ =\int_L q_{(n)}^{\pm}v_3^{(n)}\delta F^{3(n)}dL.\end{cases}\qquad (25)$$

Таким образом, компоненты напряженно-деформированного состояния плиты при заданных компонентах перемещений ее срединной поверхности представляются в виде:

$$u_1=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{4}c_i^{(n)}e^{r_i^{(n)}x^3}V_1^{(n)};\qquad (26)$$

$$u_3=-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{4}\frac{T_1^{(n)}r_i^{(n)^2}-M_1^{(n)}}{r_i^{(n)}\left(N_1^{(n)}-N_3^{(n)}\right)}c_i^{(n)}e^{r_i^{(n)}x^3}V_3^{(n)};$$

$$\sigma^{13}=\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{(n)}^{13}=\frac{1}{2}c^{1313}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{4}\left\{\left[r_i^{(n)}v_1^{(n)}-\frac{T_1^{(n)}r_i^{(n)^2}-M_1^{(n)}}{r_i^{(n)}\left(N_1^{(n)}-N_3^{(n)}\right)}V_{3,1}^{(n)}\right]c_ie^{r_i^{(n)}x^3}\right\};$$

$$\sigma^{33}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{4}\left[c_i^{3311}V_{1,1}^{(n)}-c^{3333}\frac{T_1^{(n)}r_i^{(n)^2}-M_1^{(n)}}{\left(N_1^{(n)}-N_3^{(n)}\right)}V_3^{(n)}\right]c_i^{(n)}e^{r_i^{(n)}x^3};$$

$$\sigma^{11}=\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{(n)}^{11}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{4}\left[c^{1111}V_{1,1}^{(n)}-c^{1133}\frac{T_1^{(n)}r_i^{(n)^2}-M_1^{(n)}}{\left(N_1^{(n)}-N_3^{(n)}\right)}V_3^{(n)}\right]c_i^{(n)}e^{r_i^{(n)}x^3}.$$

Постоянные интегрирования $c_i^{(n)}$ определяются на основании соотношений (25) для обеспечения выполнения статических граничных условий на лицевых поверхностях плиты, т.е.:

$$\sigma_{(n)\left(x^3=\pm\frac{h}{2}\right.}^{13}=0;\qquad \sigma_{(n)\left(x^3=\pm\frac{h}{2}\right.}^{33}=g_{(n)}^{\pm}.\qquad (27)$$

где $g_{(n)}^{\pm}$ - амплитудное значение n-й гармоники разложения вектора нагрузки в соответствии с законом разложения компоненты вектора перемещений по первой пространственной координате.

$\sigma_{(n)}^{13},\sigma_{(n)}^{33}$ - компоненты тензора напряжений, соответствующие гармонике n вектора нагрузки $g_{(n)}^{\pm}$

Приведем точное решение этой задачи, полученное в работе Pagano [9] в предположении о трансверсальной изотропии материала в плоскости x^2x^3:

$$\begin{cases}u_1=\dfrac{\cos\lambda x^1}{\lambda}\sum_{i=1}^{4}A_i\left[R_{13}\lambda^2-R_{11}r^2\right]e^{r_ix^3};\\ u_3=\sin\lambda x^1\sum_{i=1}^{4}A_i\left[R_{13}r_i-\dfrac{R_{33}\lambda^2}{r_i}\right]e^{r_ix^3};\end{cases}\qquad (28)$$

где

$$R_{11}=\frac{c^{3333}}{c^{1111}c^{3333}-\left(c^{1313}\right)^2};\qquad R_{33}=\frac{c^{1111}}{c^{1111}c^{3333}-\left(c^{1313}\right)^2};$$

$$R_{13}=-\frac{c^{1133}}{c^{1111}c^{3333}-\left(c^{1313}\right)^2}.$$

После выполнения элементарных преобразований сравнение уравнений (26) и (28) свидетельствует о их полной идентичности с точностью до определения постоянных интегрирования $c_i^{(n)}$ при n=1.

Литература

1. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек.- М.: Наука.-1975.-446 с.
2. Пискунов В.Г. Об одном варианте неклассической теории неоднородных пологих оболочек и пластин // Прикладная механика.-1979.-15.- N11.-С.76-81.
3. Рассказов А.О.,Соколовская И.И., Шульга Н.А.,Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек. - К.: Наукова думка.- 1985.
4. Терегулов И.Г., Сибгатулин Э.С. Метод расчета на усталость слоистых композитных оболочек и пластин // Механика ком- позитных материалов.-1990.-N5.-С.878-896.
5. Плеханов А.В., Прусаков А.П. Об одном асимптотическом методе построения теории изгиба пластин средней толщины // Изв. АН СССР.-Механика твердого тела.-1976.-N3.-С.84- 90.
6. Гондлях А.В. Итерационно-аналитическая теория пластин и оболочек // Рукопись деп. в УкрНИИНТИ. -1988.-N1212-Ук88.
7. Гондлях А.В. Итерационно-аналитическая теория деформирования многослойных оболочек // Сопротивление материалов и теория сооружений. - К.: Будивэльник.-1988.-N53.-с.33-37.
8. Баженов В.А., Сахаров А.С., Гондлях А.В., Мельников С.Л. Нелинейные задачи механики многослойных оболочек. - К.: НД Будмехан ки.-1994.-264с.
9. Pagano N.J. Exact solutions for composite in cylindrical bending. // J. Composite materials.-1969.-3.- p.398-411.

УДК 629.735.083.02.06(045)

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ В КОМПРЕССОРНОЙ РЕШЕТКЕ ПРИ БОЛЬШИХ ДОЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ

Ю.М. Терещенко
Доктор технических наук, професор*
Контактный тел.: (044) 406-75-93
И.А. Ластивка
Кандидат технических наук, заведующий кафедрой
Кафедра высшей математики**
Контактные тел.: (044) 406-78-34, 067-503-67-56
Е.В. Дорошенко
Кандидат технических наук, ассистент*
Контактный тел.: 068-351-30-39
*Кафедра авиационных двигателей**
**Национальный авиационный университет
пр. Космонавта Комарова, 1, м. Киев, 03680

У роботі представлено результати чисельного моделювання течії у компресорній решітці при великих дозвукових швидкостях з подальшим порівнянням результатів чисельного і фізичного експерименту

Ключові слова: моделювання течії, компресорна решітка, примежовий шар

В работе представлены результаты численного моделирования течения в компрессорной решетке при больших дозвуковых скоростях с последующим сравнением результатов численного и физического эксперимента

Ключевые слова: моделирование течения, компрессорная решетка, пограничный слой

The results of simulation of subsonic flow in compressor blade cascade are presented in the work. Comparison results of numerical and physical experiments are given

Keywords: flow simulation, compressor blade cascade, boundary layer

1. Вступление

Аэродинамическое совершенство во многом определяет совершенство авиационного двигателя.

При проектировании лопаточных венцов осевого компрессора необходимо минимизировать все потери, которые имеют место в процессе преобразования энергии в ступенях компрессора. Отсюда вытекает необходимость детального изучения процесса течения в решетках аэродинамических профилей и установления влияния формы профилей и других геометрических параметров решетки на основные показатели работы решетки в широком диапазоне изменения чисел Маха и Рейнольдса [1, 2].