15. Жиглявский, А. А. Обнаружение разладки случайных процессов в задачах радиотехники [Текст] / А. А. Жиглявский, А. Е. Красовский. – Л.: Издательство ленинградского университета, 1988. – 224 с.
16. Galeano, P. Covariance changes detection in multivariate time series [Text] / P. Galeano, D. Pena // Journal of Statistical Planning and Inference. – 2007. – Vol. 137, Issue 1. – P. 194–211. doi: 10.1016/j.jspi.2005.09.003
17. Тевяшев, А. Д. Про один клас моделей для моделювання квазістаціонарних режимів роботи газотранспортних систем [Текст] / А. Д. Тевяшев, В. М. Щелкалін // Вісник академії митної служби України. – 2010. – № 2. – С. 19 – 27. – Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/j-pdf/vamsutn_2010_2(44)__5.pdf

УДК 519.866+ 519.711.2
DOI: 10.15587/1729-4061.2015.37800

РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВЫХ ДВИЖЕНИЙ В СИСТЕМАХ ЛОТКИ-ВОЛЬТЕРРА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Аль-Рефаи Валид Ахмед Махмуд
Аспирант*
Email: wamralal@yahoo.com
Альджаафрех Мохаммад Ракан Абед Алнаби
Аспирант*
E-mail: mohammadrakan1987@yahoo.com
*Кафедра прикладной математики
Харьковский национальный университет радиоэлектроники
пр. Ленина, 14, г. Харьков, Украина, 61166

Досліджено ефекти дестабілізації моделі, описуваної рішенням системи диференціальних рівнянь типу Лотки-Вольтерра для двох видів при слабких синусоїдальних зовнішніх впливах на швидкість розмноження. Досліджено стійкість неавтономної системи. Знайдені чисельні рішення при частотах впливу, близьких до частоти циклу незбуреної системи

Ключові слова: модель Лотки-Вольтерра, збурення моделі, проблеми стійкості, періодичні рішення, аттрактор, граничний цикл

Исследованы эффекты дестабилизации модели, описываемой решением системы дифференциальных уравнений типа Лотки-Вольтерра для двух видов при слабых синусоидальных внешних воздействиях на скорость размножения. Исследована устойчивость неавтономной системы. Найдены численные решения при частотах воздействия, близких к частоте цикла невозмущенной системы

Ключевые слова: модель Лотки-Вольтерра, возмущения модели, проблемы устойчивости, периодические решения, аттрактор, предельный цикл

1. Введение

Известно, что впервые с необходимостью исследования периодических движений с помощью нелинейных моделей столкнулись радиоинженеры (Андронов, Хайт, Витт и другие) в первой половине XX века. К тому времени для этого уже существовали развитые, в частности Пуанкаре, Понтрягиным, Петровским и Хопфом, математические методы.

В то же время, экономические системы всегда считались очень сложными, динамика рынка – хаотической, поэтому исследования в данной области проводились в большинстве случаев на основе статистических данных прошедших лет. Построение экономических прогнозов и расчёт перспектив дальнейшего развития, в некоторой мере, являлись лишёнными научной основы предположениями, не имеющими никаких весомых оснований для рационального использования и претворения гипотез в жизнь. Математическое моделирование с использованием современных компьютерных технологий предоставляет возможность изучить характер той или иной экономической ситуации, перспективы, гипотезы, затрачивая на эксперименты гораздо меньшие временные и материальные ресурсы. Таким образом, математические и имитационные модели экономических процессов всегда были и остались актуальны, поскольку предоставляют возможность промоделировать за малое время то, что крайне сложно и долго испытывать в реальной жизни.

Общеизвестно, что важнейшим инструментом развития экономики является конкуренция. Также конкурентные процессы имеют место и в других областях, таких как биология, экология, психология, военное дело, логистика и большая часть проблем исследования операций и многокритериальной оптимизации процессов. Все эти области знаний и деятельности обслуживаются математическими моделями одного класса – уравнениями динамических систем. Базовыми в этом классе моделей являются логистические уравнения, а также их системы, которые впервые предложил и исследовал В. Вольтерра еще в начале XX века. Он положил начало исследованию, так называемых, ”мягких” моделей, варианты которых предлагаются в настоящей работе, где рассмотрена математическая модель совместного сосуществования двух биологических видов (популяций) типа «хищник – жертва», известная как модель Вольтерра-Лотки, глубокие исследования и обобщения которой заложили фундамент математической теории биологических сообществ или так называемой математической экологии [1].

В настоящей работе содержится описание основных механизмов перехода к неустойчивости и хаосу в модели сосуществования двух достаточно многочисленных видов в замкнутом ареале, и алгоритмы их численного анализа, необходимые для решения задачи.

Объектом исследования является процесс динамики сосуществования видов «жертв» и «хищников» в среде их обитания с внешним воздействием; предметом исследования – модели типа Лотки-Вольтерра с возмущенной правой частью и численные методы их анализа.

2. Литературный обзор и постановка проблемы

Эффект хаотизации движений в детерминированных нелинейных системах, еще совсем недавно казавшийся просто невероятным в рамках традиционных стереотипов классической механики и теории колебаний, сейчас уже представляется как научно обоснованное явление фундаментальной значимости. Интерес к этой тематике не только не ослабевает, но продолжает нарастать, о чем свидетельствует увеличивающийся поток научной информации в виде научных статей (например, [2] и библиография к ней). В частности, в работах [3, 4] приведены теоретическое обоснование результатов расчета по рассмотренной ниже модели. В докладах [4, 5] показаны возможные сценарии перехода к хаотическому движению в таких экологических системах через бифуркации. Помимо экологии, конкуренция – один из наиболее значимых процессов в экономике. Существует множество универсальных математических моделей [6–8], успешно применяющихся в разных отраслях науки, однако, точно описывающих конкурентные процессы современной рыночной экономики практически нет. Базовые модели [1, 8] были разработаны достаточно давно и не всегда верно описывают динамику современных конкурентных отношений. Изучение существующих математических моделей даёт возможность найти оптимальные пути для построения новых модификаций исходных моделей, подходящих к данной ситуации развития конкуренции и экономики в целом. Модель Лотки-Вольтерра и её обобщения широко используется, например, в монографии [9] по биологии и диссертациях [7], работах по экологии [10, 11] и экономике [12], где, в частности, показано, что после незначительной модификации трофической функции, модель адекватно описывает взаимоотношение секторов производства и поставок.

Теория предсказывает, что при наличии определенных типов внешних воздействий со стороны среды на такую систему, её устойчивость может нарушаться, и движения приобретают квази-случайный вид [3, 4, 8].

3. Цель и задачи исследования

Цель работы – исследование и использование особенностей периодических процессов в эволюционных моделях для стабилизации их динамики.

Для достижения указанной цели были поставлены следующие задачи:

1. Выбрать ”мягкую” модель, адекватно описывающую динамику конкуренции в экологических и экономических системах.
2. Выбрать вид периодического возмущения.
3. Путем численных экспериментов выявить параметры, отвечающие за устойчивую динамику системы.
4. Определить численные значения параметров:
   а) устойчивого роста;
   б) хаотической динамики.

4. Математическое описание и базовая модель объекта

Рассматривается в малом ареале (остров) экосистема из двух видов:

1) «жертвы» – в отсутствии хищников могут размножаться неограниченно;

2) «хищники» – размножение ограничено численностью жертв.

Численность тех и других достаточно велика, и меняется гладко во времени.

$$dx/dt = rx - \gamma_1 xy\ ,$$

$$dy/dt = -sy + \gamma_2 xy\ , \qquad (1)$$

где r, s, γ_1, γ_2 =const > 0; x – число особей жертв; y – число особей хищников.

С помощью замены переменных

$$\xi = x - x_*\ ,\ \ \eta = y - y_* \qquad (2)$$

система (1) преобразуется к виду

$$d\xi/dt = -\gamma_1\left(x_*\eta + \xi\eta\right),$$

$$d\eta/dt = \gamma_2\left(y_*\xi + \xi\eta\right)\ , \qquad (3)$$

которая имеет общий интеграл вида

$$\frac{e^{\xi/\gamma_1} e^{\eta/\gamma_2}}{\left[\gamma_1\left(\xi + x_*\right)\right]^{x_*/\gamma_1}\left[\gamma_2\left(\eta + y_*\right)\right]^{y_*/\gamma_2}} = C\ .$$

Первоначальная автономная система (1) возбуждается малым, по сравнению с остальными параметрами, периодическим колебанием размно-жения одного или обоих видов этой экосистемы.

Обозначения и физический смысл переменных и параметров взяты из работы [3]. Пусть физические и биологические факторы вызывают периодическое изменение абсолютной и относительной скорости вымирания хищников

$$\frac{dx}{dt} = rx - \gamma_1 xy,$$
$$\frac{dy}{dt} = -S(t)y + \gamma_2 xy + n\cos\Omega t. \qquad (4)$$

Здесь $S(t) = s(1+\frac{n}{s}\cos\Omega t)$; Ω – частота периодических возмущений, близка к частоте предельного цикла без возмущений. Автономная система, соответствующая (4), при $n=0$ имеет нетривиальное состояние равновесия.

С помощью замены переменных $\xi = x - x_*$, $x_* = s/\gamma_2$, $\eta = y - y_*$, $y_* = r/\gamma_1$ система (4) преобразуется к виду

$$\frac{d\xi}{dt} = -\gamma_1(x_*\eta + \xi\eta),$$
$$\frac{d\eta}{dy} = \gamma_2(y_*\xi + \xi\eta) + (n - ny_*)\cos\Omega t - n\eta\cos\Omega t. \qquad (5)$$

Пусть параметры таковы, что $s = r = \gamma_1 = \gamma_2 = 1$, тогда уравнения (5) примут вид

$$\frac{d\xi}{dt} = -(\eta + \xi\eta),$$
$$\frac{d\eta}{dt} = \xi + \xi\eta - n\eta\cos\Omega t. \qquad (6)$$

В переменных ρ, θ система (6) запишется так:

$$\frac{d\rho}{dt} = -2\rho^2 \sin\theta\cos\theta(\cos\theta - \sin\theta) - n\rho\sin^2\theta\cos\Omega t,$$
$$\frac{d\theta}{dt} = 1 + 2\rho\sin\theta\cos\theta(\cos\theta + \sin\theta) - n\sin\theta\cos\theta\cos\Omega t. \qquad (7)$$

На рис. 1, 2 приведены результаты численного моделирования потери устойчивости предельного цикла. Бифуркационный параметр $n = 0{,}15$; $\xi_0 = \eta_0 = 0{,}1$ – рис. 1 в сравнении с *n*=0,1 – рис. 2. Обозначения на рисунках: системное время – Z_{n0}; Z_{n1} и Z_{n2} – численности видов.

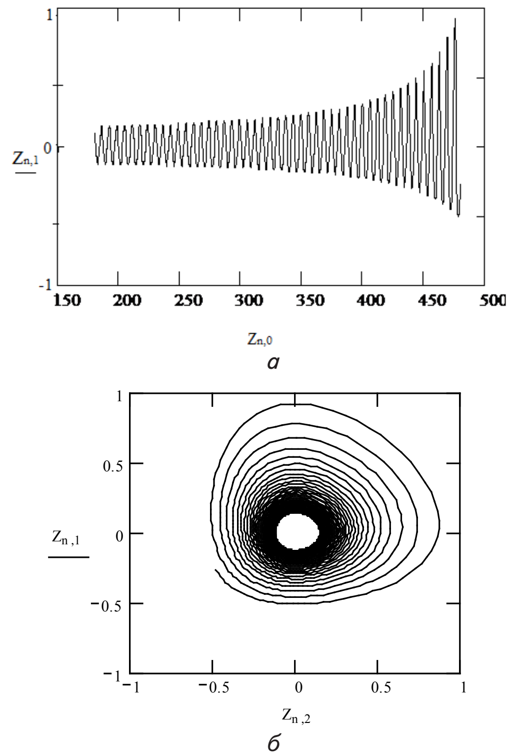
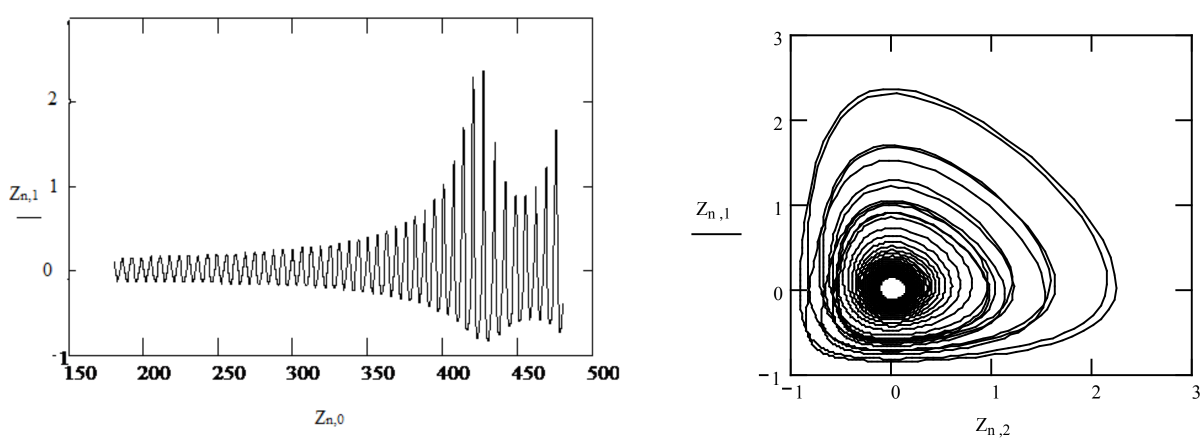


Рис. 2. Динамика системы при *n*=0.1: *а* — временная зависимость; *б* — фазовый портрет

Здесь начальные значения ξ_0, η_0 выбраны так, чтобы при $n=0$ траектория находилась в области притяжения к особой точке (x_*, y_*) в системе координат xOy. Изменения динамики очевидны, как в фазовом пространстве, так и на графике решений, если сравнить рис. 1, *а* и рис. 2, *а*. Причина появления хаоса здесь та же, что и появление нерезонансного тора при размерности задач *n*>2. А именно, неавтономность системы в результате явно зависимого от времени периодического возмущения с периодом, несоизмеримым с периодом собственного движения. Заметим, что хаотические движения появляются не только в окрестности странных аттракторов, которых в данной задаче быть не может, ввиду её малой размерности (*n*=2).



а *б*

Рис. 1. Динамика системы при *n*=0.15: *а* — временная зависимость численности; *б* — фазовый портрет

5. Выводы

В работе, на основе анализа литературных источников и характерных признаков поведения объекта, выбрана динамическая модель для дальнейшего исследования. Такая модель относится к типу "мягких". Она сохраняет все качественные особенности данного класса объектов и абстрагируется от вопросов о точности решений и их совпадений с динамикой конкретного объекта.

В качестве первого приближения выбраны синусоидальные возмущения скорости роста популяций. Это обосновано тем, что линеаризация невозмущенной модели имеет синусоидальные решения. Было подтверждено выдвинутое предположение о бифуркации при совпадении или близости периодов этих движений.

В результате численных экспериментов выявлены бифуркации при изменении как амплитуды n, так и периода возмущения Ω. Трофические параметры невозмущенной системы, как известно для системы Лотки-Вольтерра, к бифуркациям не приводят.

Малое изменение амплитуды – в пределах 0.05 – приводит к переходу системы от периодических движений к устойчивому росту, и затем, к хаотическим колебаниям. При этом показатели Ляпунова λ_1^*, λ_2^* могут иметь противоположные знаки. Значит, бифуркация вносит, в силу нарушения симметрии характеристических показателей на полупериодах, несимметричность в структуру характеристических показателей, а с ней неустойчивость и "уход" траектории на бесконечность.

Литература

1. Вольтерра, В. Математическая теория борьбы за существование [Текст] / В. Вольтерра. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 288 с.
2. Jost, C. The wolves of Isle Royale display scale-invariant satiation and density dependent predation on moose [Text] / C. Jost, G. Devulder, J. A. Vucetich, R. Peterson, R. Arditi // Journal of Animal Ecology. – 2005. – Vol. 74, Issue 5. – P. 809–816. doi: 10.1111/j.1365-2656.2005.00977.x
3. Мартынюк, А. А. Хаотическая потеря предельного цикла в задаче Вольтерра [Текст] / А. А. Мартынюк, Н. В. Никитина // Докл. АН Украины. – 1996. – № 4. – С. 1–7.
4. Никитина, Н. В. О хаотической потере устойчивости [Текст] / Н. В. Никитина // Докл. НАН Украины. – 1997. – № 11. – С. 61–65.
5. Hayashi, C. Bifurcations and the Generation of Chaotic States in the Solutions of Nonlinear Differential Equations [Text]: 4-й Нац. конгр./ C. Hayashi, H. Kawakami // Теорегическая и прикладная механика. – Варна, София, 1981 – С. 537–542.
6. Hoppensteadt, F. Predator-prey model [Text] / F. Hoppensteadt // Scholarpedia. – 2006.– Vol. 1, Issue 10. – P. 1563. doi: 10.4249/scholarpedia.1563
7. Сорокин, П. А. Моделирование биологических популяций с использованием комплексных моделей, включающих в себя индивидуум-ориентированные и аналитические компоненты [Текст]: дис. ... канд. физ.-мат. наук / П. А. Сорокин – Долгопрудный, 2004.– 153 с.
8. Эрроусмит, Д. К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями [Текст] / Д. К. Эрроусмит, К. М. Плейс. – М.: Мир, 1986. – 243 с.
9. Brauer, F. Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology [Text] / F. Brauer, C. Castillo-Chavez. – Springer-Verlag, 2000. – 201 p.
10. Arditi, R. How Species Interact: Altering the Standard View on Trophic Ecology [Text] / R. Arditi, L. R. Ginzburg. – Oxford University Press, 2012. – 112 p.
11. Гусятников, П. П. Качественные и численные методы в задачах оптимального управления в моделях хищник-жертва и популяции леммингов [Текст]: дис. ... канд. физ.-мат. наук / П. П. Гусятников. – Москва, 2006.– 101 с.
12. Nasritdinov, G. Limit cycle, trophic function and the dynamics of intersectoral interaction [Text] / G. Nasritdinov, R. T. Dalimov // Current Research J. of Economic Theory. – 2010. – Vol. 2, Issue 2. – P. 32–40.