го комплекса, включающего в себя: оборудование по безотходной переработке изношенных автомобильных шин и производству высококачественной продукции на основе резиновой крошки и металлокорда, систему организации сбора и сортировки отходов в регионах России.

Литература

1. Демьянова В.С. Комплексное использование промышленных отходов. // Экология и промышленность России. – 2008- С.12-14.
2. Демьянова В.С., Гусев А.Д., Дярькин Р.А. Черепица на основе резиносодержащих отходов // Материалы международной научно-технической конференции «Актуальные вопросы строительства» в 2 частях, часть 1. Изд-во Мордовского университета. - 2009. с. 10-13.
3. Демьянова В.С., Макаров М.М., Дярькин Р.А., Кураков П.А. Снижение техногенной нагрузки на окружающую среду путём использования отходов автопромышленного комплекса // Экология урбанизированных территорий. – 2008. - № 4. с. 86-90.
4. Уэйн Л.В. Microsoft Office Excel 2007. // Анализ данных и бизнес-моделирование. - СПб.: БХВ - Петербург, - 2007.

Отримані інтегральні рівняння, які описують розсіяння пружних хвиль на неоднорідності кінцевого розміру, що знаходиться в безмежному анізотропному середовищі. Показано, що вони еквівалентні диференційним рівнянням

Ключові слова: інтегральні рівняння, функція Гріна, пружні хвилі

Получены интегральные уравнения, которые описывают рассеяние упругих волн на неоднородности конечного размера, находящейся в безграничной анизотропной среде. Показано, что они эквивалентны дифференциальным уравнениям

Ключевые слова: интегральные уравнения, функция Грина, упругие волны

Integral equations, describing the scattering of elastic waves on homogeneities of finite size, located in an infinite anisotropic medium are given. It is shown that they are equivalent to differential equations

Keywords: integral equations, Grin function, elastic waves

УДК 548.4, 517.958:532.72

ВЫВОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ РАССЕЯНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Е.М. Прохоренко
Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник
Институт электрофизики и радиационных технологий НАН Украины
ул. Гуданова, 13, г. Харьков, 61002
Контактный тел.: (057) 700-41-11

Введение

Одним из методов исследования материалов есть воздействие на них пучком заряженных частиц. При попадании в кристалл иона происходит создание различных дефектов. Дефекты могут иметь как точечную, так и протяженную структуру. При создании этих дефектов контроль осуществляется посредством подбора параметров легирования. Особенности уже созданных нарушений могут исследоваться ядерно-физическими методами, в частности методом обратного рассеяния. Во время создания дефекта происходит изменение структуры облучаемого материала, и соответственно изменяются поля упругих напряжений. При их описании используются дифференциальные уравнения. Однако в настоящее время многие краевые задачи, возможно, решить с использованием уравнений поля в интегральной форме, которые эквивалентны дифференциальным уравнения.

Интегральные уравнения широко применяются для решения задач распространения электромагнитных волн в волноводах различной конфигурации, их рассеивания на неоднородностях [1]. Также, использование интегральных уравнений позволило решить ряд задач диффузии [2]. Переход от дифференциальной формы уравнений поля к интегральной дает возможность сформулировать краевую задачу, как задачу с нелокальными граничными условиями, и находить внутренне поле упругих напряжений в рассеивающей неоднородности непосредственно через невозмущенное поле падающей волны.

Цель работы

Целью данной работы есть вывод интегральных уравнений для упругих волн в анизотропной среде и их последующий анализ.

Обоснование метода и вывод интегральных уравнений

Рассмотрим бесконечную упругую анизотропную среду.

Её свойства характеризуются тензором модулем упругости λ_{iklm}. Упругие волны описываются волновым уравнением в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \lambda_{iklm}\frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k \partial x_l} = 0 \qquad (1)$$

Пусть в этой однородной среде расположена неоднородность объема, которая характеризуется тензором модулей упругости $\lambda^1{}_{iklm}$, отличном от λ_{iklm}. Для решения задачи рассеяния упругих волн на этой неоднородности необходимо решать такую краевую задачу:

Известная падающая волна $u_i^{(o)}$, рассеиваясь на неоднородности, порождает волны внутри неоднородности – (внутреннее поле) и вне неоднородности $u_i^{(e)}$ (рассеянное поле). Функции u_i как внутри, так и вне неоднородности, строятся из собственных функций уравнения (1), для внутренней и внешней областей. На поверхности неоднородности должны выполняться граничные условия. В данном случае для решения задач теории упругости будет эффективным использовать условия равновесия на поверхности нарушенной области:

$$\sigma_{ik} n_k + \rho q_i = p_i \qquad (2)$$

где q_i – плотность внешних объемных сил; p_i – компонента внешней поверхностной силы, которая действует на единицу поверхности неоднородности; n_k – внешняя нормаль к единице поверхности; $\sigma_{ik} = \lambda_{iklm}(\frac{\partial u_e}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_l})$ – отдельный элемент тензора упругих напряжений. Уравнение (1) имеет множество решений в частных производных. Граничное условие (2) дает возможность выбрать единственное решение, которое описывает данную краевую задачу.

Нашей задачей является свести решение данной задачи, представленной при помощи дифференциального уравнения, к решению эквивалентного ей интегрального уравнения представленного как:

$$u_i(\vec{r},t) = u_i^{(0)}(\vec{r},t) + \hat{A}\int_v G_{ik}(\vec{r},\vec{r}')u_k(\vec{r}',t)d\vec{r}' \qquad (3)$$

где $u_i(\vec{r},t) = u_i^{(0)} + u_i^{(e)}$ при $\vec{r} \ni v$, или $u_i(\vec{r},t) = u_i^{(i)}$ при $\vec{r} \in v$, величина $\hat{A}$ – оператор, а функция $G_{ik}(\vec{r},\vec{r}')$ – функция Грина уравнения (1) для безграничной среды, v – объем нарушенной области. Данное интегральное уравнение для точек внутри неоднородности $\vec{r} \in v$, определяет внутренне поле смещений упругих сил $u_i^{(i)}$, через поле смещений в падающей невозмущенной волне $u_i^{(o)}$. При значениях $\vec{r} \ni v$ из выражения (3) следует, что полное поле упругих напряжений находится через известное внутреннее поле $u_i^{(i)}$. Под полным внешним полем подразумевается сумма поля падающей упругой волны $u_i^{(o)}$, и поля отраженной волны $u_i^{(i)}$. Интегральные уравнения, аналогичные (3), уже достаточно широко применяются в электродинамике, для решения задач рассеяния электромагнитных волн на различных типах неоднородностей. Поэтому будем считать, что разработанные методы их решения, применимы и для решения граничных задач в теории упругости.

Считаем, что для безграничной анизотропной среды с заданной локальной неоднородностью, справедливо уравнение (1) с правой частью в виде:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \lambda_{iklm}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial x_l} = (\lambda_{iklm}(\vec{r}) - \lambda_{iklm})\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_m} \qquad (4)$$

где $\lambda_{iklm}(\vec{r}) = \lambda_{iklm}$ для точек вне дефекта ($\vec{r} \ni v$), и $\lambda_{iklm}(\vec{r}) - \lambda'_{iklm}$ для области внутри дефекта ($\vec{r} \in v$). Уравнение (4) является универсальным неоднородным волновым уравнением и точно описывает все упругие волны, как внутри неоднородности, так и во всем анизотропном пространстве. Его решение, с формальной точки, находится с помощью функции Грина. Функция Грина, для уравнений этого типа, является тензором второго ранга. Учитывая монохроматичность полей, т.е. зависимость от времени в виде $e^{i\omega t}$, функция Грина определяется выражением:

$$\lambda_{imlk}\frac{\partial^2 G_{ki}}{\partial x_m \partial x_l} + \omega^2 G_{ij} = -\delta(\vec{r} - \vec{r}')\delta_{ij} \qquad (5)$$

δ_{ij} – символ Кроникера, $\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{-i\vec{\xi}(\vec{r}-\vec{r}')}\partial\vec{\xi}$.

Будем искать функцию Грина в виде:

$$G_{kj} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int g_{kj}(\vec{\xi})e^{-i\vec{\xi}(\vec{r}-\vec{r}')}\partial\vec{\xi} \qquad (6)$$

Для величин g_{kj} найдем соответствующую систему линейных алгебраических уравнений

$$(\lambda_{imlk}\xi_m\xi_k - \omega^2\delta_{ik})g_{kj} = \delta_{ij}.$$

Откуда следует, что величина g_{kj} есть матрица обратная $a_{ik} = (\lambda_{imlk}\xi_m\xi_k - \omega^2\delta_{ik})$ и поэтому выражение (6) приобретает вид:

$$G_{kj}(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{\Delta_{kj}(\omega,\vec{\xi})}{\Delta(\omega,\vec{\xi})}e^{-i\vec{\xi}(\vec{r}-\vec{r}')}\partial\vec{\xi} \qquad (7)$$

здесь $\Delta(\omega,\vec{\xi})$ – детерминант матрицы a_{ik}, $\Delta_{kj}(\omega,\vec{\xi})$ – алгебраическое дополнение элемента a_{kj}. Известно, что $\Delta_{kj}(\omega,\vec{\xi})=(-1)^{k+j}\sum\limits_{p\neq k,q\neq j}A_{pqsr}a_{pq}a_{sr}$, суммирование идет по всем символам $p\neq k,q\neq j,$ и $k,j=1,2,3$. Символ $A_{pqsr}=\pm 1$ в зависимости от того, четным или нечетным числом перестановок из 1, 2, 3 получаем последовательность значений k,p,s. Индекс j отвечает за показатель $(-1)^{k+j}$. Учтя все это, запишем $\Delta_{kj}(\omega,\vec{\xi})$ как выражение:

$$\begin{aligned}\Delta_{kj}(\omega,\vec{\xi})=(-1)^{k+j}\sum_{p\neq k,q\neq j}A_{pqsr}[\lambda_{pmnq}\lambda_{silr}\xi_m\xi_n\xi_l\xi_i-\\ -\omega^2(\lambda_{silr}\xi_i\xi_e\delta_{pq}+\lambda_{pmnq}\xi_m\xi_n\delta_{sr})+\omega^4\delta_{pq}\delta_{sr}]\end{aligned} \quad (8)$$

Последующее вычисление функции Грина сводится к проведению интегрирования по переменной ξ в интегралах:

$$J_0(\vec{r}-\vec{r}')=\int\frac{1}{\Delta(\omega,\vec{\xi})}e^{-i\vec{\xi}(\vec{r}-\vec{r}')}\partial\vec{\xi}$$

$$J_{mn}(\vec{r}-\vec{r}')=\int\frac{\xi_m\xi_n}{\Delta(\omega,\vec{\xi})}e^{-i\vec{\xi}(\vec{r}-\vec{r}')}\partial\vec{\xi}$$

$$J_{mnli}(\vec{r}-\vec{r}')=\int\frac{\xi_m\xi_n\xi_l\xi_i}{\Delta(\omega,\vec{\xi})}e^{-i\vec{\xi}(\vec{r}-\vec{r}')}\partial\vec{\xi} \quad (9)$$

Интегралы J_{mn} и J_{mnli} представляют собой 2-ю и 4-ю производные по x от J_0. Следовательно, выражение для функции Грина приобретет такой вид:

$$\begin{aligned}G_{kj}(\vec{r}-\vec{r}')=(-1)^{k+j}\sum_{p\neq k,q\neq j}A_{pqsr}[\lambda_{pmnq}\lambda_{silr}\frac{\partial^4}{\partial x_m\partial x_n\partial x_i\partial x_l}-\\ -\omega^2(\lambda_{silr}\delta_{pq}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_l}+\lambda_{pmnq}\delta_{sr}\frac{\partial^2}{\partial x_m\partial x_n})+\omega^4\delta_{pq}\delta_{sr}\}J_0(\vec{r}-\vec{r}')\end{aligned} \quad (10)$$

Из выражения (10) следует, что для построения функции Грина необходимо найти зависимость J_0 от $\vec{r}$. Для перехода к статике следует положить $\omega\to 0$. Для статического случая можно вычислить функцию Грина и по другой схеме.

Применим единичные векторы в виде $\vec{\xi}_1=\frac{\vec{\xi}}{|\xi|}$ и $\vec{n}=\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$, таким образом, чтобы $\vec{\xi}_1=\vec{n}x+\vec{e}\sqrt{1-x^2}$, тогда $d\vec{\xi}=\xi^2 d\xi d\Omega_1(\vec{\xi}_1)$. В выражении (7), как числитель так и знаменатель представляют собой полиномы 6-й степени по ξ. Преобразовав в (7) полиномы получаем выражения для функции Грина:

$$G_{kj}(\vec{r}-\vec{r}')=G^{st}_{kj}(\vec{r}-\vec{r}')+\omega^2 J_{1kj}+\omega^4 J_{2kj}+\omega^6 J_{3kj}$$

$$J_{nkj}(\vec{r}-\vec{r}')=\int\frac{\Delta_{nkj}(\vec{\xi})}{\Delta(\omega,\vec{\xi})}e^{-i\vec{\xi}(\vec{r}-\vec{r}')}\xi^2 d\xi d\Omega_1(\vec{\xi}_1) \quad (11)$$

$$\Delta(\vec{\xi},\omega)=\Delta(\vec{\xi},0)+\omega^2 Sp_2\Delta(\vec{\xi},0)+\omega^4 Sp_1\Delta(\vec{\xi},0)+\omega^6 \quad (12)$$

в этих выражениях

$G^{st}_{kj}(\vec{r}-\vec{r}')$ – статическая часть функции Грина,

$Sp_1\Delta(\vec{\xi},0)=a_{11}+a_{22}+a_{33}$ – сумма диагональных элементов детерминанта второго порядка,

$$\begin{aligned}Sp_2\Delta(\vec{\xi},0)=(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})+\\ +(a_{11}a_{33}-a_{31}a_{13})+(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})\end{aligned}.$$

Уравнение (12) в теории упругости называется уравнением Кристофеля[3]. Выражение (11) по сравнению с (10) более наглядна, так как в ней явно выделена статическая часть функции Грина в виде:

$$\begin{aligned}G^{st}_{kj}(\vec{r}-\vec{r}')=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{\Delta_{kj}(\omega,\vec{\xi}_1)}{\Delta(\omega,\vec{\xi}_1)}d\Omega(\vec{\xi}_1)\int_0^\infty d\xi e^{-ix\vec{\xi}(\vec{r}-\vec{r}')}=\\ \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\int\frac{\Delta_{kj}(\vec{\xi}_1)}{\Delta(\vec{\xi}_1)}\delta(x)d\Omega(\vec{\xi}_1)\end{aligned} \quad (13)$$

Величина x является проекцией единичного вектора на ось $\vec{n}$, поэтому $d\Omega(\vec{\xi}_1)=dxd\varphi_e$, где φ_e – угол в плоскости, перпендикулярной $\vec{n}$ и отсчитываемой от произвольно выбранного напрвления на этой плоскости. Поэтому:

$$G^{st}_{kj}(\vec{r}-\vec{r}')=\frac{1}{(8\pi)^2}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\int_0^{2\pi}\frac{\Delta_{kj}(\vec{e})}{\Delta(\vec{e})}d\varphi_e \quad (14)$$

где $\Delta(\vec{e})$ и $\Delta_{kj}(\vec{e})$ однородные функции компонент вектора $\vec{e}$. Отсюда следует, что статическая часть функции Грина при любых значениях компонент тензора модулей упругости всегда имеет вид представленный в выражении (14) или в общем виде:

$$G^{st}_{kj}(\vec{r}-\vec{r}')=\frac{1}{(8\pi)^2}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|_e}F^{st}_{kj}(\vartheta,\varphi) \quad (15)$$

где ϑ и φ полярные углы радиус-вектора $\vec{r}-\vec{r}'$.

Данная методика может быть применима для вычисления интегралов типа (9). Рассматриваем интеграл $J_0(\vec{r}-\vec{r}')$, который является основой для остальных интегралов, применяемых в построении функции Грина. Перейдя к переменным $\vec{\xi}_1$,запишем $J_0(\vec{r}-\vec{r}')$ в виде:

$$J_0(\vec{r}-\vec{r}')=\int d\Omega(\vec{\xi}_1)\int_0^\infty\frac{e^{-i\xi x|\vec{r}-\vec{r}'|}}{\Delta(\vec{\xi}_1)(\xi^2-\theta_1^2)(\xi^2-\theta_2^2)(\xi^2-\theta_3^2)}\xi^2 d\xi \quad (15a)$$

где $\theta_1(\xi_1)$, $\theta_2(\xi_1)$, $\theta_3(\xi_1)$ – корни алгебраического уравнения (12). Интегрирование по ξ выполняется на основании теории вычетов. Анализ решений для изотропной и анизотропной сред проводится по разному. Для изотропной среды нули знаменателя в подинтегральном уравнении функции Грина, определяют дисперсионные соотношения для упругих волн в среде. Три значения корней соответствуют тому, что в ней распространяются одна продольная и две поперечные волны.

В случае анизотропной среды явного разделения на различные волны нет. Для дальнейшего анализа, проинтегрируем (15а) по ξ в бесконечных пределах, по x в пределах от 0 до 1. Выбор бесконечных пределов интегрирования, требует бесконечных размеров монокристалла. Для оценки протяженности кристалла (параметр бесконечности) учтем, что требование неограниченности принимается по отношению к размерам нарушенной области. Учитывая, что размер ядра кластера нарушений составляет не более нескольких десятков периодов кристаллической решетки, получим применимость данной теории к реальным монокристаллам. Это интегрирование позволяет выбрать решение в форме запаздывающих потенциалов.

Если $\theta_i = \theta_i(\vec{e})$ не зависит от x, решение представляется в виде:

$$J_0(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{1}{8\pi^2}\cdot\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\cdot\int_0^{2\pi}\frac{d\phi_e}{\Delta(\vec{e})}\cdot\left\{\frac{e^{-i\theta_1|\vec{r}-\vec{r}'|}}{(\theta_1^2-\theta_2^2)\cdot(\theta_1^2-\theta_3^2)}+\right.$$
$$\left.+\frac{e^{-i\theta_2|\vec{r}-\vec{r}'|}}{(\theta_2^2-\theta_1^2)\cdot(\theta_2^2-\theta_3^2)}+\frac{e^{-i\theta_3|\vec{r}-\vec{r}'|}}{(\theta_3^2-\theta_1^2)\cdot(\theta_3^2-\theta_2^2)}\right\} \quad (16)$$

где θ_i – некоторые функции компонент вектора $\vec{e}$.

Вычисления в случае (16) как и в (15а) возможны лишь для конкретных структур, так как необходима привязка к конкретным кристаллографическим осям.

Выражение для $J_0(\vec{r}-\vec{r}')$ в виде (16) в общем случае решает задачу описания рассеяния упругих волн на неоднородностях в безграничных средах. Среды могут быть как изотропными, так и анизотропными.

Задача нахождения полей смещения сводится к поэтапному нахождению:

а) поля смещений для области внутри неоднородности;

б) для точек вне неоднородности. Поле смещений внутри области неоднородности определяется через поле смещений, существовавшее в кристалле до появления нарушенной области.

Для точек вне зоны нарушений поле смещения определяется как сумма поля смещений внутри неоднородности, найденного на предыдущем этапе, и первоначального поля смещений (без неоднородности).

Выводы

Выведены интегральные уравнения, которые описывают рассеяние упругих волн на неоднородностях в безграничных анизотропных средах. Получена функция Грина в представлении удобном для расчетов. Исследован статический случай и дано сравнение с уже известным выражением функции Грина.

Литература

1. Хижняк, Н.А. Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. / Н. А. Хижняк. – Київ: Наукова думка, 1986. – 280с.
2. Чапля, Є. Я. Математичне моделювання дифузійних процесів у випадкових і регулярних структурах. / Є. Я. Чапля, О. Ю. Чернуха. – Київ: Наукова думка, 2009. – 303с.
3. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики. / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский – М.: Наука, 1972. – 735с.