

*Сучасні методи розрахунку перехідних процесів є наближеними, що призводить до значних похибок регулювання. Показано, що підвищити точність систем автоматичного регулювання, їх швидкодію та забезпечити оптимальний режим роботи можна шляхом використання для розрахунку перехідних процесів методу квадратур. Досліджується система четвертого порядку і показано вплив сталих часу на характер перехідних процесів. Описані методи визначення сталих часу ідентифікованої системи*

*Ключові слова: метод, перехідний процес, система, регулювання, квадратура, рівняння, точність, швидкодія*

*Современные методы расчета переходных процессов являются приближенными, что приводит к существенным погрешностям регулирования. Показано, что увеличить точность систем автоматического регулирования, их быстродействие и обеспечить оптимальный режим работы можно путем использования для расчета переходных процессов метода квадратур. Исследуется система четвертого порядка и показано влияние постоянных времени на характер переходных процессов. Описаны методы определения постоянных времени идентифицированной системы*

*Ключевые слова: метод, переходный процесс, система, регулирование, квадратура, уравнение, точность, быстродействие*

# ДОСЛІДЖЕННЯ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО РЕГУЛЮВАННЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ МЕТОДОМ КВАДРАТУР

**Й. І. Стенцель**

Доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри\*

E-mail: stencel@sti.lg.ua

**О. І. Проказа**

Кандидат технічних наук, доцент\*

E-mail: kafKISU.Elena@gmail.com

**К. А. Літвінов**

Аспірант\*

E-mail: LitvinovK@yandex.ru

\*Кафедра комп'ютерно-інтегрованих систем управління Східноукраїнський національний університет ім. Володимира Даля пр. Радянський, 59-а, м. Сєвєродонецьк, Україна, 93400

## 1. Вступ

Перехідні процеси відносяться до основних характеристик кожної системи автоматичного регулювання (САР), за якими оцінюється не тільки стійкість її роботи, але й точність і швидкодія. Перехідні процеси широко використовуються для розрахунку оптимальних налагоджень регуляторів, компенсаторів, фільтрів тощо, а також для визначення швидкості руху динамічних систем, особливо в сучасних комп'ютерно-інтегрованих системах управління (КІСУ) як при їх проектуванні, так і експлуатації. Розрахунок перехідних процесів відноситься до основних алгоритмів програмного забезпечення роботи кожної КІСУ технологічним процесом. Методи розрахунку перехідних процесів розділяються на алгебраїчні та частотні [1–3]. Перші засновані на визначенні коренів характеристичного рівняння, а другі – на використанні дійсної (ДЧХ) або уявної (УЧХ) частотних характеристик. Точність розрахунку перехідних процесів відомими методами є недостатньо високою, особливо для динамічних систем високого порядку. З підвищенням порядку САР суттєво збільшується розрахунковий час перехідного процесу. Оскільки для сучасних КІСУ одним із важливих параметрів є їх швидкодія, то з метою

зменшення розрахункового часу перехідних процесів їх математичні моделі спрощуються або використовуються наближені методи, до яких відноситься метод зворотного перетворення Лапласа. Цей метод відноситься до алгебраїчних, суть якого полягає у визначенні коренів характеристичного рівняння динамічного об'єкту, за котрими розраховується перехідний процес. Так як при розрахунку перехідного процесу методом зворотного перетворення Лапласа кількість коренів є обмеженою, то його точність є не достатньо високою, а за рахунок складності розрахунку – значно зменшується його швидкодія. Окрім того при використанні цього методу виникають суттєві проблеми у тому випадку, коли об'єкт керування має значний час чистого запізнення або характеристичне рівняння має декілька комплексних коренів.

## 2. Аналіз літературних даних і постановка проблеми

Особливістю кожної САР є наявність у них технологічного об'єкта керування (ТОК), засобу вимірювального контролю (ЗВК), регулятора, виконавчого механізму (ВМ), нормуючих і проміжних вимірювальних перетворювачів та інших додаткових елементів,

наприклад, підсилювачів, суматорів сигналів тощо. До основних інерційних елементів кожної САР відноситься ТОК, ЗВК, регулятор і ВМ. У залежності від складності ТОК описуються лінійними диференціальними рівняннями як першого, так і вищого порядку [4, 5], регулятори – нульового, першого та другого порядку, ЗВК - нульового, першого, другого та більш високого порядку. Виконавчі механізми у більшості випадків описуються диференціальним рівнянням першого порядку. Таким чином, характеристичне диференціальне рівняння, котре описує САР, як правило, є високого порядку. Як відомо [6], якість регулювання оцінюється за характером перехідного процесу. Причому час регулювання та перерегулювання кожної САР повинні бути мінімальними. До позитивних якостей алгебраїчних методів слід віднести можливість розрахунку перехідного процесу за визначеними коренями з наступним підсумовуванням часткових перехідних процесів [7–11]. До основних недоліків таких методів є необхідність визначення коренів. Особливо це стосується САР, котрі описуються диференціальними рівняннями високого порядку. Тому, як правило, алгебраїчні методи використовуються для достатньо простих систем. Частотні методи достатньо повно описані в [12–15]. Їх суть полягає в інтегруванні ДЧХ або УЧХ системи регулювання. Через складність неперервного інтегрування рівнянь, котрі описують ДЧХ чи УЧХ, приходять до дискретного принципу інтегрування за рахунок поділу площі під цими кривими на відповідні трапеції з подальшим розрахунком часткових перехідних процесів для кожної трапеції та їх підсумовуванням. Ці методи є достатньо складними, відзначаються достатньо низькою точністю розрахунку та малою швидкістю і не знайшли практичного використання як при проектуванні систем регулювання та їх параметричному синтезі, так і в експлуатації КІСУ технологічними процесами. Тому проблема розробки нових методів розрахунку перехідних процесів, котрі характеризуються високою точністю та швидкістю, є актуальною. У даній роботі пропонується новий частотний метод розрахунку перехідного процесу, котрий базується на уведенні в рівняння ДЧХ додаткового поліному, що приводить його до ДЧХ другого порядку (квадратур) зі сталими часу, залежними від частоти  $\omega$ .

### 3. Мета статті і задачі досліджень

Метою статті є дослідження перехідних процесів САР, котра описується лінійним диференціальним рівнянням четвертого порядку, методом квадратур. Для досягнення поставленої мети вирішувалися наступні задачі:

- за частотними характеристиками САР визначити додатковий поліном системи, що дозволило привести її ДЧХ до рівняння квадратур;
- визначити сталі часу квадратур і привести порівняння ДЧХ квадратур з ДЧХ реальної системи, що дозволяє в аналітичній формі розрахувати перехідний процес системи;
- виконати дослідження частотних характеристик замкненої САР за каналом регулювання методом квадратур;

– розрахувати перехідні процеси замкненої САР методом квадратур.

### 4. Динамічні моделі об'єкта четвертого порядку

Як правило, до таких ТОК відносяться порівняно складні технологічні апарати, наприклад, реактори, абсорбери, випарні установки, ректифікаційні колони тощо. Такі ТОК характеризуються не тільки інерційністю, але й значним часом чистого запізнення, котрим звичайно нехтувати не можна. Якщо до складу САР входить ТОК, ЗВК, ВМ першого порядку та ПІ-регулятор, то розімкнена САР за каналом регулювання описуватиметься наступним рівнянням:

$$\tau_4^4 \frac{d^4 y}{dt^4} + \tau_3^3 \frac{d^3 y}{dt^3} + \tau_2^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + \tau_1 \frac{dy}{dt} + y = kx, \tag{1}$$

де  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$  – сталі часу;  $y, x$  – вихідна та вхідна координати відповідно;  $k$  – коефіцієнт передачі;  $t$  – час перехідного процесу.

Прийmemo, що САР є стійкою, а її характеристичне рівняння може мати як дійсні так і комплексні корені. Якщо всі корені рівняння (1) є дійсними та від'ємними, то перехідний процес матиме аперіодичний характер, котрий оцінюється часом регулювання. При наявності комплексних коренів перехідний процес буде коливальним та оцінюється не тільки часом регулювання, але й перерегулюванням [7, 8]. САР, яка описується рівнянням (1) має 4 корені, серед яких можуть бути й комплексні. Оскільки визначення коренів, особливо при наявності комплексних, є іноді достатньо складною задачею, то при розробці програмного прикладного забезпечення роботи КІСУ кількість коренів обмежується, що приводить до суттєвих похибок при розрахунку налагоджувальних параметрів та кривих перехідного процесу. Частотні методи через їх складність, як правило, не використовуються для таких цілей, незважаючи на те, що їх відносять до найбільш точних. До частотних методів можна віднести й метод квадратур, який вперше був описаний в [9, 10]. Виконаємо дослідження системи регулювання четвертого порядку методом квадратур та зробимо його оцінку щодо його придатності до використання в КІСУ технологічними процесами.

Виходячи з рівняння (1), передавальна функція такої системи має вигляд:

$$W_o(s) = \frac{k_o}{(\tau_4^4 s^4 + \tau_3^3 s^3 + \tau_2^2 s^2 + \tau_1 s + 1)}, \tag{2}$$

де  $s$  – оператор Лапласа;  $k_o$  – коефіцієнт передачі об'єкта.

Уводячи заміну  $s = j\omega$ , де  $\omega$  – кругова частота, рівняння (2) приводиться до такого вигляду:

$$W_o(j\omega) = k_o \frac{(1 - \tau_2^2 \omega^2 + \tau_4^2 \omega^4)}{(1 - \tau_2^2 \omega^2 + \tau_4^2 \omega^4)^2 + \omega^2 (\tau_1 - \tau_3^2 \omega^2)^2} - j\omega k_o \frac{(\tau_1 - \tau_3^2 \omega^2)}{(1 - \tau_2^2 \omega^2 + \tau_4^2 \omega^4)^2 + \omega^2 (\tau_1 - \tau_3^2 \omega^2)^2}. \tag{3}$$

Позначимо в (3):

$$\operatorname{Re}_o(\omega) = k_o \frac{(1 - \tau_2^2 \omega^2 + \tau_4^4 \omega^4)}{(1 - \tau_2^2 \omega^2 + \tau_4^4 \omega^4)^2 + \omega^2 (\tau_1 - \tau_3^3 \omega^2)^2} \quad (4)$$

– дійсна частотна характеристика (ДЧХ);

$$\operatorname{Im}_o(\omega) = \omega \frac{k_o (\tau_1 - \tau_3^3 \omega^2)}{(1 - \tau_2^2 \omega^2 + \tau_4^4 \omega^4)^2 + \omega^2 (\tau_1 - \tau_3^3 \omega^2)^2} \quad (5)$$

– уявна частотна характеристика (УЧХ).

У рівняння (3) уведемо наступні позначення:

$$C(\omega) = 1 - \tau_2^2 \omega^2 + \tau_4^4 \omega^4;$$

$$B(\omega) = (1 - \tau_2^2 \omega^2 + \tau_4^4 \omega^4)^2 + \omega^2 (\tau_1 - \tau_3^3 \omega^2)^2;$$

$$D(\omega) = \omega k_o (\tau_1 - \tau_3^3 \omega^2).$$

Тоді рівняння (3) у формі відношення поліномів приймає такий вигляд:

$$W_o(j\omega) = \frac{C(\omega)}{B(\omega)} - j \frac{D(\omega)}{B(\omega)}. \quad (6)$$

Позначимо  $K(\omega) = B(\omega) - C(\omega)$  звідки

$$C(\omega) = B(\omega) - K(\omega),$$

де  $K(\omega)$  – додатковий поліном. З врахуванням цього рівняння (6) набуває вигляду:

$$W_o(j\omega) = \frac{B(\omega) - K(\omega)}{B(\omega)} - j \frac{D(\omega)}{B(\omega)} = \left( 1 - \frac{K(\omega)}{B(\omega)} \right) - j \frac{D(\omega)}{B(\omega)}. \quad (7)$$

Покажемо, що поліном  $K(\omega)$  має множником квадрат частоти:

$$K(\omega) = -\omega^2 \tau_2^2 (3 - 4\omega^2 \tau_2^2 + \omega^4 \tau_4^4). \quad (8)$$

Знайдемо відношення поліномів:

$$\begin{aligned} \frac{K(\omega)}{B(\omega)} &= \\ &= -\omega^2 \frac{\tau_2^2 (3 - 4\omega^2 \tau_2^2 + \omega^4 \tau_4^4)}{(1 - \tau_2^2 \omega^2 + \tau_4^4 \omega^4)^2 + \omega^2 (\tau_1 - \tau_3^3 \omega^2)^2} = \omega^2 N_{O2}(\omega), \end{aligned}$$

де

$$N_{O2}(\omega) = -\frac{\tau_2^2 (3 - 4\omega^2 \tau_2^2 + \omega^4 \tau_4^4)}{(1 - \tau_2^2 \omega^2 + \tau_4^4 \omega^4)^2 + \omega^2 (\tau_1 - \tau_3^3 \omega^2)^2}. \quad (9)$$

Для УЧХ відношення поліномів дорівнює:

$$\frac{D(\omega)}{B(\omega)} = \omega \frac{(\tau_1 - \tau_3^3 \omega^2)}{(1 - \tau_2^2 \omega^2 + \tau_4^4 \omega^4)^2 + \omega^2 (\tau_1 - \tau_3^3 \omega^2)^2} = \omega N_{O1}(\omega),$$

де

$$N_{O1}(\omega) = \frac{(\tau_1 - \tau_3^3 \omega^2)}{(1 - \tau_2^2 \omega^2 + \tau_4^4 \omega^4)^2 + \omega^2 (\tau_1 - \tau_3^3 \omega^2)^2}. \quad (10)$$

Враховуючи (9) і (10), рівняння (7) приймає наступну форму:

$$W_o(j\omega) = [1 - \omega^2 N_{O2}(\omega)] - j\omega N_{O1}(\omega). \quad (11)$$

Аналіз рівняння (11) показує, що функція  $N_{O1}(\omega)$  для системи регулювання має розмірність часу і для диференціального рівняння другого порядку  $N_{O1}(\omega) = \xi_{O1}$ , тобто дорівнює множнику біля першої похідної цього рівняння, а  $N_{O2}(\omega)$  має розмірність квадрату часу тобто  $N_{O2}(\omega) = \xi_{O2}^2$  і дорівнює множнику біля другої його похідної. Тобто рівняння (1) приводиться до наступного ідентифікованого рівняння другого порядку:

$$\xi_{O2i}^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + \xi_{O1i} \frac{dy}{dt} + y = k_o x, \quad (12)$$

де  $\xi_{O1i}, \xi_{O2i}$  – сталі часу і-ої квадратури ідентифікованої системи.

Так як змінною є частота  $\omega$ , то з (11) випливає, що передавальна функція САР є сукупністю квадратичних передавальних функцій, які називатимемо квадратурами. З рівняння (11) видно, що ДЧХ  $\operatorname{Re}_o(\omega) = 1 - \omega^2 N_{O2}(\omega)$ , а УЧХ –  $\operatorname{Im}_o(\omega) = \omega N_{O1}(\omega)$ . Звідси випливає наступний висновок: сталі часу при першій похідній квадратур повністю визначаються УЧХ при деякій частоті  $\omega_{jk}$ , а сталі часу при другій похідній квадратур – ДЧХ при деякій частоті  $\omega_{jk}$ , де  $i, j$  – відповідно номер перших і других похідних квадратур. Так система четвертого порядку має дві квадратури, тобто  $i=1,2$  і  $j=1,2$ , то, приймаючи до уваги, що  $\operatorname{Re}_o(\omega) = 0$  при  $\omega = \omega_{pi}$ , де  $\omega_{pi}$  частота переходу, маємо:  $1 - \omega^2 N_{O2}(\omega_{pi}) = 0$  або  $N_{O2}(\omega_{pi}) = 1/\omega_{pi}^2$ . Як показано в [10], при частоті переходу для першої квадратури  $N_{O2}(\omega_{pi}) = \tau_{12}^2$ , де  $\tau_{12}$  – стала часу при другій похідній першої квадратури. Подальша задача полягає в тому, яким чином визначити сталу часу  $\tau_{11}$  при першій похідній першої квадратури. Її можна знайти в діалоговому режимі, спочатку прийнявши  $\tau_{11} = 2\tau_{12}$ , що відповідає критичному перехідному процесу. Далі, розрахувавши ДЧХ реального об'єкта за рівнянням (4) та ідентифікованої для першої квадратури за рівнянням  $\operatorname{Re}_{O1}(\omega) = k(1 - \tau_{12}^2 \omega^2) / [(1 - \tau_{12}^2 \omega^2)^2 + \omega^2 (\tau_{11})^2]$ , та змінюючи сталу часу  $\tau_{11}$  добиваються того, щоби площа між цими кривими була мінімальною. При цьому потрібно враховувати, що криві ДЧХ реального та ідентифікованого об'єктів при  $\omega = 0$  і  $\omega = \omega_{pi}$  повинні співпадати. Підставивши знайдене значення сталої часу в рівняння (11), можна визначити частоту, характерну для першої квадратури.

## 5. Динамічні моделі одноконтурної САР за каналом регулювання

Розглянемо одноконтурну САР, котра за каналом регулювання описується наступною передавальною функцією:

$$W_C(s) = \frac{W_1(s)W_2(s)W_3(s)}{1+W_1(s)W_2(s)W_3(s)W_4(s)}, \quad (13)$$

де

$$W_1(s) = k_1 + \frac{1}{\tau_1 s}, \quad W_2(s) = \frac{k_2}{\tau_2 s + 1},$$

$$W_3(s) = \frac{k_3}{\tau_3 s + 1}, \quad W_4(s) = \frac{k_5}{\tau_4 s + 1}$$

– передавальні функції регулятора, ВМ, ТОК, і ЗВК відповідно.

Враховуючи передавальні функції елементарних динамічних ланок, отримуємо:

$$W_C(s) = \frac{W_1(s)W_2(s)W_3(s)}{1+W_1(s)W_2(s)W_3(s)W_4(s)} =$$

$$k_C \frac{T_5^2 s^2 + T_6 s + 1}{T_4^4 s^4 + T_3^3 s^3 + T_2^2 s^2 + T_1 s + 1}, \quad (14)$$

де

$$k_C = 1/k_4; \quad T_1 = (k_{1-4}\tau_1)/k_{2-4};$$

$$T_2 = (\tau_1\tau_2 + \tau_1\tau_3 + \tau_1\tau_4)/k_{2-4};$$

$$T_3^3 = (\tau_1\tau_2\tau_3 + \tau_1\tau_2\tau_4 + \tau_1\tau_3\tau_4)/k_{2-4}; \quad T_4^4 = \tau_1\tau_2\tau_3\tau_4/k_{2-4};$$

$$T_5 = k_1\tau_1\tau_4; \quad T_6 = k_1\tau_1 + \tau_4; \quad k_{2-4} = k_2k_3k_4, \quad k_{1-4} = k_1k_2k_3k_4.$$

Частотна передавальна функція САР має вигляд:

$$W_C(j\omega) = k_C \frac{(1-T_5^2\omega^2) + j\omega T_6}{(1-T_2^2\omega^2 + T_4^4\omega^4) + j\omega(T_1 - T_3^3\omega^2)} =$$

$$= \text{Re}_C(\omega) - j\text{Im}_C(\omega), \quad (15)$$

де

$$\text{Re}_C(\omega) =$$

$$= k_C \frac{(1-T_5^2\omega^2)(1-T_2^2\omega^2 + T_4^4\omega^4) + \omega^2 T_6(T_1 - T_3^3\omega^2)}{(1-T_2^2\omega^2 + T_4^4\omega^4)^2 + \omega^2(T_1 - T_3^3\omega^2)^2} \quad (16)$$

– дійсна частотна характеристика системи;

$$\text{Im}_C(\omega) =$$

$$= \omega k_C \frac{(1-T_5^2\omega^2)(T_1 - T_3^3\omega^2) + T_6(1-T_2^2\omega^2 + T_4^4\omega^4)}{(1-T_2^2\omega^2 + T_4^4\omega^4)^2 + \omega^2(T_1 - T_3^3\omega^2)^2} \quad (17)$$

– уявна частотна характеристика системи.

Рівняння (15) для передавальної функції запишемо таким чином:

$$W_C(j\omega) = k_C \left[ \frac{C(\omega)}{B(\omega)} - j \frac{D(\omega)}{B(\omega)} \right] =$$

$$= k_C \left[ \left( 1 - \frac{K(\omega)}{B(\omega)} \right) - j \frac{D(\omega)}{B(\omega)} \right], \quad (18)$$

де

$$C(\omega) = (1-T_5^2\omega^2)(1-T_2^2\omega^2 + T_4^4\omega^4) + \omega^2 T_6(T_1 - T_3^3\omega^2);$$

$$B(\omega) = (1-T_2^2\omega^2 + T_4^4\omega^4)^2 + \omega^2(T_1 - T_3^3\omega^2)^2;$$

$$D(\omega) = \omega \left[ (1-T_5^2\omega^2)(T_1 - T_3^3\omega^2) + T_6(1-T_2^2\omega^2 + T_4^4\omega^4) \right].$$

$$K(\omega) = B(\omega) - C(\omega) =$$

$$= \omega^2 \left[ \begin{aligned} & (T_1^2 - T_2^2 + T_5^2 + T_1 T_6) + \\ & + \omega^2 (T_2^4 - 2T_1 T_3^3 - T_4^4 - T_5^2 T_2^2 - T_3^3 T_6) + \\ & + \omega^4 (2T_3^6 - T_4^4 T_2^2 + T_5^2 T_4^4) + T_4^8 \omega^6 \end{aligned} \right].$$

З останнього рівняння видно, що поліном  $K(\omega)$  має множником квадрат частоти  $\omega$ . Підставивши цей поліном в рівняння (18), отримуємо:

$$\text{Re}_C(\omega) = k_C \left[ 1 - \frac{K(\omega)}{B(\omega)} \right] = k_C [1 - \omega^2 N_{C2}(\omega)], \quad (19)$$

Поліном у рівнянні (19) дорівнює:

$$N_{C2}(\omega) = \frac{\Omega_0 + \omega^2 \Omega_1 + \omega^4 \Omega_2 + T_4^8 \omega^6}{(1-T_2^2\omega^2 + T_4^4\omega^4)^2 + \omega^2(T_1 - T_3^3\omega^2)^2}, \quad (20)$$

де

$$\Omega_0 = T_1^2 - T_2^2 + T_5^2 + T_1 T_6;$$

$$\Omega_1 = T_2^4 - 2T_1 T_3^3 - T_4^4 - T_5^2 T_2^2 - T_3^3 T_6;$$

$$\Omega_2 = 2T_3^6 - T_4^4 T_2^2 + T_5^2 T_4^4.$$

Як видно з (18), УЧХ має множником частоту  $\omega$ . Позначивши  $\text{Im}_C(\omega) = D(\omega)/B(\omega) = \omega N_{C1}(\omega)$ , де:

$$N_{C1}(\omega) =$$

$$= \frac{\left[ (1-T_5^2\omega^2)(T_1 - T_3^3\omega^2) + T_6(1-T_2^2\omega^2 + T_4^4\omega^4) \right]}{(1-T_2^2\omega^2 + T_4^4\omega^4)^2 + \omega^2(T_1 - T_3^3\omega^2)^2}, \quad (21)$$

рівняння (18) приймає наступну форму:

$$W_C(j\omega) = k_C \left[ (1 - \omega^2 N_{C2}(\omega)) - j \omega N_{C1}(\omega) \right]. \quad (22)$$

Порівнюючи рівняння (11) і (22) приходимо до висновку, що динамічні моделі системи регулювання приводяться до квадратур з різними функціями  $N_1(\omega)$  і  $N_2(\omega)$ , котрі характеризують відповідні сталі часу ідентифікованих систем. Таким чином можна стверджувати, що САР можна описати динамічною моделлю у формі квадратур:

$$\xi_{c2i}^2 \frac{d^2y}{dt^2} + \xi_{c1i} \frac{dy}{dt} + y = k_{cx}, \quad (23)$$

де  $\xi_{c1i}, \xi_{c2i}$  – сталі часу і-ої квадратури ідентифікованої системи регулювання.

Як показують дослідження для стійких об'єктів та систем регулювання, котрі не мають резонансних частот, у більшості випадків достатньо обмежитися тільки першою квадратурою. При цьому похибка розрахунку перехідного процесу не перевищує 5 відсотків за різницею площин між ДЧХ реальної та ідентифікованої системи регулювання в області зміни частоти  $\omega$  від 0 до  $\omega_{\Pi}$ . Як видно з (11) і (22) характер перехідного процесу визначається відношенням сталих часу відповідних квадратур, а розрахунок кривих перехідного процесу виконується за відомими аналітичними рівняннями [9, 11, 12]. Передавальна функція ідентифікованої системи

$$W_{1c}(j\omega) = k_{1c} \frac{1}{(1 - \omega^2 \xi_{c2}^2) + j\omega \xi_{c1}}. \quad (24)$$

З рівняння (24) для ідентифікованої системи отримуємо:

– дійсну частотну характеристику:

$$Re_{1c}(\omega) = \frac{(1 - \omega^2 \xi_{c2}^2)}{(1 - \omega^2 \xi_{c2}^2)^2 + \omega^2 \xi_{c1}^2}; \quad (25)$$

– уявну частотну характеристику:

$$Im_{1c}(\omega) = \frac{\omega \xi_{c1}}{(1 - \omega^2 \xi_{c2}^2)^2 + \omega^2 \xi_{c1}^2}. \quad (26)$$

Розглянемо систему, динамічні ланки якої описуються такими передавальними функціями:

– регулятор пропорційно-інтегральний

$$W_1(s) = k_1 + 1/\tau_1 s = 0,5 + 1/(0,15s).$$

– виконавчий механізм

$$W_2(s) = k_2 / (\tau_2 s + 1) = 0,9 / (15s + 1);$$

– технологічний об'єкт керування

$$W_3(s) = k_3 / (\tau_3 s + 1) = 0,95 / (150s + 1);$$

– засіб вимірювального контролю

$$W_4(s) = k_4 / (\tau_4 s + 1) = 1,2 / (25s + 1).$$

ДЧХ та УЧХ реальної (криві 1) та ідентифікованої (криві 2) системи регулювання приведені на рис. 1.

З рис. 1, а видно, що різниця площин під ДЧХ у діапазоні частот від  $\omega = 0$  до  $\omega = \omega_{\Pi}$  реальної та ідентифікованої САР незначна, якою можна знехтувати. Для досліджуваної САР сталі часу першої квадратури дорівнюють:  $\xi_2 = 12,62$  і  $\xi_1 = 13,15$ . Так як відношення  $\xi_1 / \xi_2 = 0,96$ , то перехідний процес є коливальним. Проявність коливального процесу свідчить й характер

ДЧХ. На рис. 2, а приведені графіки залежностей  $N_{2c}(\omega) = f(\omega)$  (крива 1) і  $N_{1c}(\omega) = f(\omega)$  (крива 2), а на рис. 2, б графіки залежності сталих часу ідентифікованої системи:  $\xi_2 = f(\omega)$  (крива 1),  $\xi_1 = f(\omega)$  (крива 2) та їх відношення  $K(\omega) = \xi_1 / \xi_2 = f(\omega)$  (крива 3). З графіків рис. 2, а видно, що зі збільшенням частоти від  $\omega = \omega_{\Pi}$  і вище значення параметрів реальної системи  $N_{2c}(\omega)$  і  $N_{1c}(\omega)$  зменшуються. З графіків залежності сталих часу для ідентифікованої системи та їх відношення (рис. 2, б) можна зробити висновок, що перехідні процеси квадратур є коливальними. Якщо точність розрахунку перехідного процесу є недостатньою, то можна використати другу квадратуру. Дослідження показують, що ДЧХ другої квадратури описується наступним рівнянням:

$$Re_{22c}(\omega) = 1980\omega^4 Re_{21c}(\omega), \quad (27)$$

де  $Re_{22c}(\omega) = \frac{1 - \omega^2 \xi_{21}^2}{(1 - \omega^2 \xi_{21}^2)^2 + \omega^2 \xi_{11}^2}$  – ДЧХ першої квадратури;  $\xi_{11}, \xi_{21}$  – сталі часу першої квадратури.

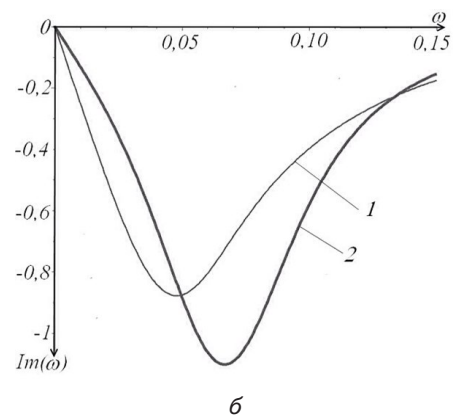
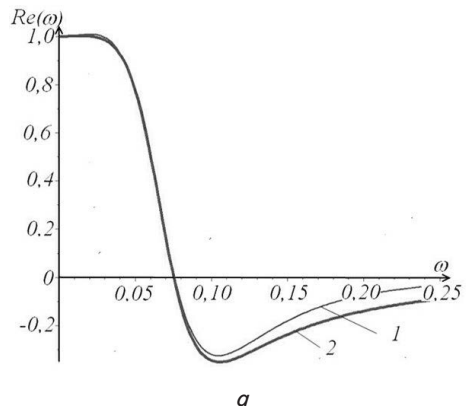


Рис. 1. Частотні характеристики реальної (криві 1) та ідентифікованої (криві 2) САР: а – ДЧХ; б – УЧХ

Для УЧХ другої квадратури маємо:

$$Im_{21c}(\omega) = - \left[ \frac{\omega \xi_{11}}{(1 - (\omega/k)^2 \xi_{21}^2) + (\omega/k)^2 \xi_{11}} \right]^k. \quad (28)$$

Графіки ДЧХ ідентифікованої САР двома квадратурами приведені на рис. 3, а, а УЧХ – на рис. 3, б.

Коефіцієнт  $k$  визначається як відношення частот максимумів реальної та ідентифікованої УЧХ першою квадратурою. З рис. 3, а видно, що ДЧХ другої квадратури (крива 3) є незначною, якою в багатьох практичних випадках можна знехтувати. На рис. 3, б приведені УЧХ реальної (крива 1) та ідентифікованої (крива 2) САР двома квадратурами, а також їх різниця (крива 3). Таким чином, можна зробити висновок, що при ідентифікації САР двома квадратурами похибка розрахунку перехідного процесу є незначною, тобто зменшується приблизно в 5 разів у порівнянні з ідентифікацією тільки першою квадратурою, яка не перевищує 5–7 відсотків. Як правило [13, 14], розрахунок перехідних процесів виконується за характеристичним рівнянням САР при умові дії на неї одиничної ступінчастої функції.

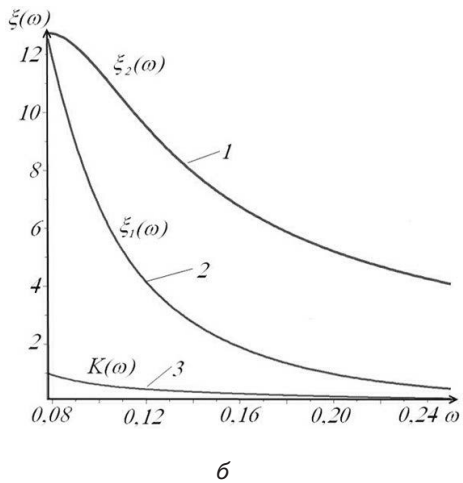
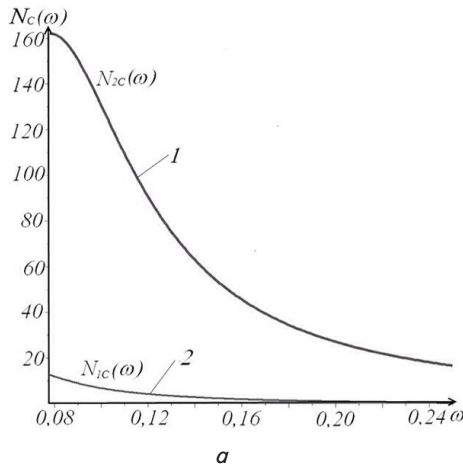


Рис. 2. Графіки функцій сталих часу: а –  $N_{1c}(\omega) = f(\omega)$  (крива 1) і  $N_{2c}(\omega) = f(\omega)$  (крива 2) реальної САР; б –  $\xi_1(\omega) = f(\omega)$  (крива 1),  $\xi_2(\omega) = f(\omega)$  (крива 2) і  $K(\omega) = f(\omega)$  (крива 3) ідентифікованої системи

Згідно з (13) диференціальне рівняння САР четвертого порядку має вигляд:

$$T_4 \frac{d^4 y}{dt^4} + T_3 \frac{d^3 y}{dt^3} + T_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + T_1 \frac{dy}{dt} + y = k \left[ T_5 \frac{d^2 x}{dt^2} + T_6 \frac{dx}{dt} + 1 \right], \quad (29)$$

де сталі часу:

$$T_1 = k_1 \tau_1, \quad T_2 = \tau_1 (\tau_2 + \tau_3 + \tau_4) / k_2 k_3 k_4,$$

$$T_3 = \tau_1 (\tau_2 \tau_3 + \tau_2 \tau_4 + \tau_3 \tau_4) / k_2 k_3 k_4,$$

$$T_4 = \tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4 / k_2 k_3 k_4,$$

$T_5 = k_1 \tau_1 \tau_4$ ,  $T_6 = k_1 \tau_1 + \tau_4$  – еквівалентні сталі часу;  $k_1, \dots, k_4$  – коефіцієнти перетворення динамічних ланок;  $\tau_1, \dots, \tau_6$  – сталі часу динамічних ланок.

Характеристичне рівняння такої системи має вигляд:

$$T_4 \frac{d^4 y}{dt^4} + T_3 \frac{d^3 y}{dt^3} + T_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + T_1 \frac{dy}{dt} + y = 0. \quad (30)$$

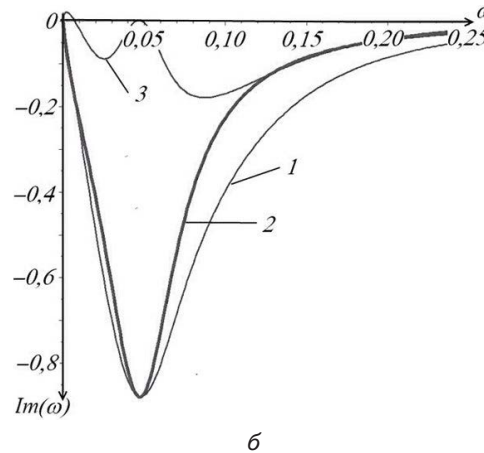
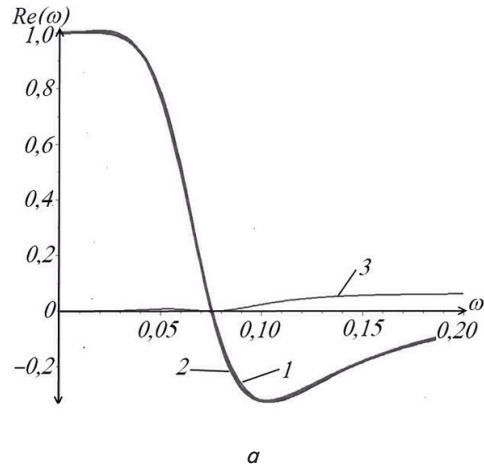


Рис. 3. Частотні характеристики реальної САР (криві 1), та ідентифікованої для першої (криві 2) і другої квадратури (криві 3): а – ДЧХ; б – УЧХ

Передавальні і частотні характеристики мають вигляд:

$$W_2(s) = k \frac{(1 - T_2^2 \omega^2 + T_4^4 \omega^4) + \omega(T_1 - T_3^3 \omega^2)}{(1 - T_2^2 \omega^2 + T_4^4 \omega^4)^2 + \omega^2 (T_1 - T_3^3 \omega^2)^2} - jk \frac{\omega(T_1 - T_3^3 \omega^2)}{(1 - T_2^2 \omega^2 + T_4^4 \omega^4)^2 + \omega^2 (T_1 - T_3^3 \omega^2)^2} = \text{Re}_1(\omega) - j\text{Im}_1(\omega); \quad (31)$$

$$\operatorname{Re}_2(\omega) = k \frac{(1 - T_2^2 \omega^2 + T_4^4 \omega^4)}{(1 - T_2^2 \omega^2 + T_4^4 \omega^4)^2 + \omega^2 (T_1 - T_3^3 \omega^2)^2}; \quad (32)$$

$$\operatorname{Im}_2(\omega) = k \frac{\omega (T_1 - T_3^3 \omega^2)}{(1 - T_2^2 \omega^2 + T_4^4 \omega^4)^2 + \omega^2 (T_1 - T_3^3 \omega^2)^2}. \quad (33)$$

Графіки ДЧХ (розраховані за рівняннями (16) і (32)) та УЧХ (розраховані за рівняннями (17) і (33)) приведені на рис. 4, а і б відповідно. З рис. 4, а видно, що ДЧХ замкненої САР (крива 1) та її характеристичного рівняння (крива 2) суттєво відрізняються поміж собою. Якщо замкнена САР має одну характерну точку, то для кривої 2 характеристичного рівняння можна виділити дві таких точки: «а» і «б». Як показують дослідження, точка «а» є точкою максимальної швидкості зміни ДЧХ:  $d\operatorname{Re}(\omega)/d\omega = \max$ . Дотична в цій точці відрізає на частотній осі частоту  $\omega_{\text{ХР1}}$ , яка є сталою часу при другій похідній першої квадратури, тобто  $\tau_{21} = 1/\omega_{\text{ХР1}}$ .

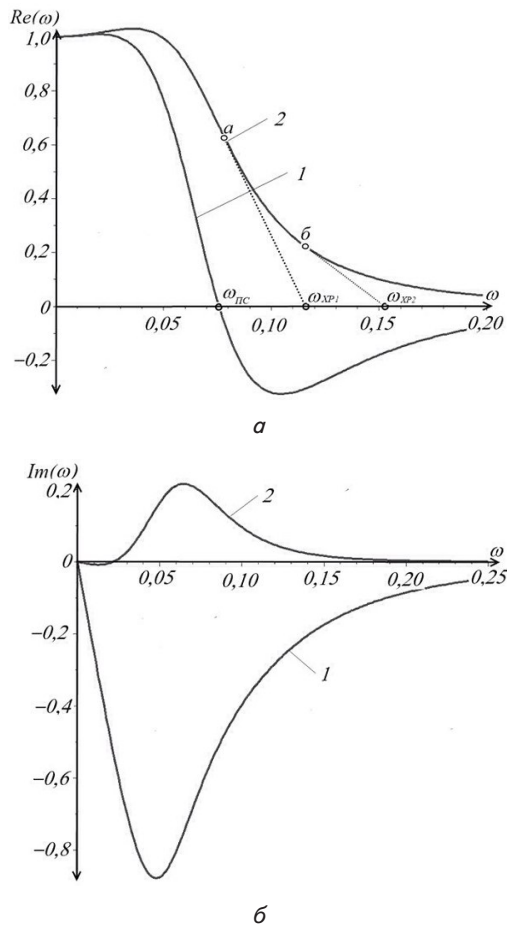


Рис. 4. Частотні характеристики розімкненої (криві 1) і замкненої (криві 2) САР: а – ДЧХ; б – УЧХ

Точка «б» визначає рівномірність зміни швидкості руху ДЧХ за частотою  $\omega$ , а дотична в цій точці відрізає на частотній осі частоту  $\omega_{\text{ХР2}}$ , котра є сталою часу при другій похідній другої квадратури, тобто  $\tau_{22} = 1/\omega_{\text{ХР2}}$ . ДЧХ першої квадратури описується наступним рівнянням:

$$\operatorname{Re}_1(\omega) = k \frac{1 - \omega^2 \tau_{21}^2}{(1 - \omega^2 \tau_{21}^2)^2 + \omega^2 \tau_{11}^2}, \quad (34)$$

де  $\tau_{11} = 8,75$ ;  $\tau_{21} = 8,52$  – сталі часу першої квадратури. Рівняння УЧХ першої квадратури має вигляд

$$\operatorname{Im}_1(\omega) = k \frac{\omega \tau_{11}}{(1 - \omega^2 \tau_{21}^2)^2 + \omega^2 \tau_{11}^2}. \quad (35)$$

Відповідно для другої квадратури маємо наступні наближені рівняння:

$$\operatorname{Re}_2(\omega) = k \frac{\omega^2 \tau_{22}^2}{(1 - \omega^2 \tau_{22}^2)^2 + \omega^2 \tau_{12}^2}; \quad (36)$$

$$\operatorname{Im}_2(\omega) = k \frac{\omega \tau_{12}}{(1 - \omega^2 \tau_{22}^2)^2 + \omega^2 \tau_{12}^2}, \quad (37)$$

де  $\tau_{12} = 4,075$ ;  $\tau_{22} = 6,575$  – сталі часу другої квадратури.

На рис. 5 приведені ДЧХ та УЧХ характеристичного рівняння четвертого порядку ідентифікованої (крива 1) і реальної (крива 2) САР. З рисунка видно, що похибки розрахунку ДЧХ (крива 3) та УЧХ (крива 3) є незначними, що свідчить про можливість з достатньою для практики точністю обмежуватися тільки першою квадратурою для розрахунку переходного процесу навіть у тих випадках, коли ДЧХ не перетинає частотну вісь.

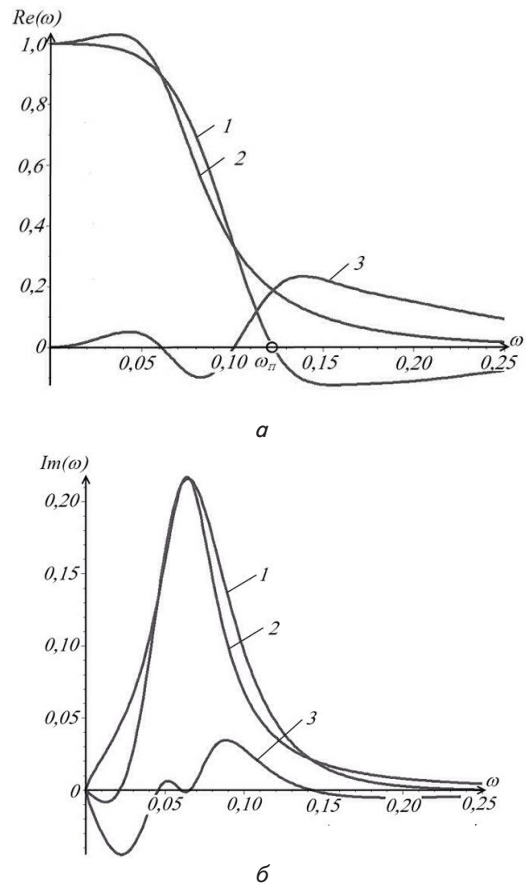


Рис. 5. Частотні характеристики ідентифікованої другим порядком (криві 1), реальної (криві 2) замкненої САР та їх різниця (криві 3): а – ДЧХ; б – УЧХ

Як вказується в [14, 15], характер перехідного процесу, як правило, визначається площиною під кривою ДЧХ, котра обмежується частотами від  $\omega=0$  до  $\omega=\omega_p$ . Так як друга квадратура визначається різницею між ДЧХ реального об'єкта і першої квадратури (крива 3 на рис. 5, а), то в області частот від 0 до  $\omega_p$  амплітуда ДЧХ цієї амплітуди є достатньо малою. На рис. 6 приведені ДЧХ САР з ПІ-регулятором ( $W_1(s)=0,5+1/125s$ , яка описується диференціальним рівнянням четвертого порядку. На рис. 6 позначено: крива 1 – ДЧХ реальної САР; крива 2 – ДЧХ першої квадратури; крива 3 – різниця ДЧХ реальної САР та її першої квадратури; крива 4 – ДЧХ другої квадратури. На рис. 7 приведені криві перехідних процесів: крива 1 – першої квадратури; крива 3 – другої квадратури і крива 2 – сумарна крива перехідного процесу.

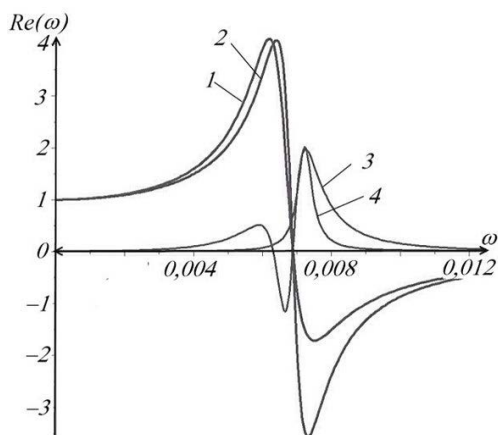


Рис. 6. ДЧХ реальної (крива 1), першої квадратури (крива 2), їх різниця (крива 3) і другої квадратури (крива 4) замкненої САР з ПІ-регулятором

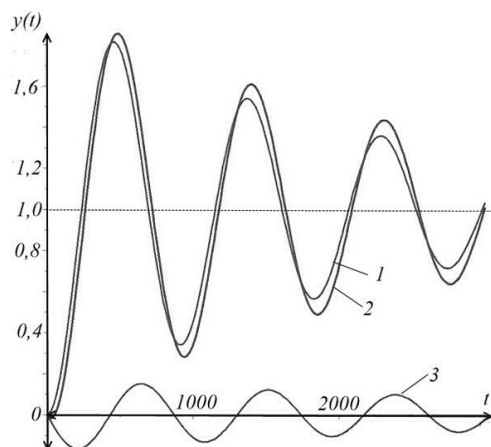


Рис. 7. Перехідні процеси першої квадратури (крива 1), другої квадратури (крива 3) та їх сума (крива 2) замкненої САР з ПІ-регулятором

Дослідження показують, що частоти переходу через вісь  $\omega$  для ДЧХ реальних систем, котрі описуються диференціальними рівняннями парного порядку, і ДЧХ квадратур, як правило, є одними й тими ж. Якщо САР описується диференціальними рівняннями не парного порядку, то має місце зміщення частот переходу.

## 5. Висновки

Показано, що перехідний процес складної САР, яка складається з лінійних динамічних елементів і ПІ-регулятора та описується диференціальним рівнянням четвертого порядку, можна розрахувати методом квадратур. Цей метод відноситься до частотних, так як для розрахунку перехідних процесів використовується дійсна та уявна частотні характеристики. Суть методу квадратур полягає в тому, що за рахунок уведення в частотну передавальну функцію складної динамічної системи додаткового поліному її передавальна функція приводиться до квадратур, які мають форму передавальної функції другого порядку зі сталими часу, котрі залежать від сталих часу динамічних ланок і кругової частоти. Указується, що стала часу, яка є множником біля другої похідної першої квадратури, повністю визначається частотою переходу ДЧХ через частотну вісь. Стала часу, яка є множником біля першої похідної першої квадратури можна визначити за мінімумом площі між реальною ДЧХ системи та ДЧХ першої квадратури. Другу квадратуру можна визначити за різницею між реальною та ідентифікованою першою квадратурою ДЧХ. Показано, що для САР четвертого порядку частота переходу ДЧХ другої квадратури дорівнює такій же частоті першої квадратури. Так як друга квадратура є незначною, то в багатьох практичних задачах нею можна знехтувати. До основних позитивних якостей методу квадратур є розрахунок перехідних процесів за аналітичними формулами, котрі використовуються для диференціальних рівнянь другого порядку. Особливо цінним є використання методу квадратур для програмного забезпечення сучасних комп'ютерно-інтегрованих систем управління технологічними процесами, у котрих, як правило, використовується наближений і складний метод зворотного перетворення Лапласа. Важливим для практики є дослідження систем регулювання високого порядку з запізненням, а також використання методу для розрахунку оптимальних налагоджень регуляторів.

## Література

1. Перов, В. Л. Управление химико-технологическими системами [Текст] / В. Л. Перов, А. Ф. Егоров, А. Ю. Хабарин. – М.: МХТИ им. Д.И.Менделеева, 1981. – 52 с.
2. Обновленський, П. А. Основы автоматизации химических производств [Текст] / П. А. Обновленский, П. А. Коротков, А. Л. Гуревич, Б. В. Ильин. – М.-Л.: Химия, 1965. – 608 с.
3. Анисимов, И. В. Основы автоматического управления технологическими процессами нефтехимической и нефтеперерабатывающей промышленности [Текст] / И. В. Анисимов. – Л.: Химия, 1967. – 123 с.
4. Таганов, И. Н. Моделирование процессов массо- и энергопереноса [Текст] / И. Н. Таганов. – Л.: Химия, 1979. – 203 с.
5. Стенцель, Й. І. Математичне моделювання технологічних об'єктів керування [Текст] / Й. І. Стенцель. – К.: ІСДО, 1993. – 328 с.



6. Стенцель, Й. І. Автоматизація технологічних процесів хімічних виробництв [Текст] / Й. І. Стенцель, О. В. Поркунян. – Луганськ: вид-во Східноукр. нац. ун-ту ім. В. Даля, 2010. – 300 с.
7. Макаров, И. М. Линейные автоматические системы [Текст] / И. М. Макаров, Б. М. Менский. – М.: Машиностроение, 1982. – 504 с.
8. Бесекерский, В. А. Теория систем автоматического регулирования [Текст] / В. А. Бесекерский, Е. П. Попов. – М.: Наука, 1972. – 768 с.
9. Стенцель Й. І. Автоматизація технологічних процесів хімічних виробництв [Текст] / Й. І. Стенцель. – К.: ІСДО, 1995. – 360 с.
10. Стенцель, Й. І. Розрахунок перехідних процесів складних систем регулювання методом квадратур [Текст] / Й. І. Стенцель, І. Є. Киричук, О. В. Савельєва // Наук.-техн. збірник «Автоматизація технологічних процесів та промислова екологія». – 1997. – Вип. 1. – С. 2–5.
11. Воронов, А. А. Основы теории автоматического управления. Т. 1 [Текст] / А. А. Воронов. – М.: Энергия, 1980. – 312 с.
12. Фельбаум, А. А. Методы теории автоматического управления [Текст] / А. А. Фельбаум, А. Г. Бутковский. – М.: Наука, 1971. – 743 с.
13. Нетушила, А. В. Теория автоматического управления [Текст] / под ред. А. В. Нетушила. – М.: Высшая шк., 1983. – 488 с.
14. Солодовников, В. В. Частотный метод построения переходных процессов [Текст] / В. В. Солодовников, Ю. И. Толчеев, Г. В. Крутикова. – М.: ГИТТЛ, 1955. – 196 с.
15. Крутов, В. И. Основы теории автоматического регулирования [Текст] / В. И. Крутов, Ф. М. Данилов, П. К. Кузьмик и др. – М.: Машиностроение, 1984. – 368 с.

*Розроблені математичні моделі грудкування шихти у барабанних і тарілчастих грануляторах. Запропоновані системи управління, що використовують у якості керуючих дій кут нахилу та швидкість обертання гранулятора. Представлені результати моделювання, які показують, що застосування систем забезпечить стабілізацію гранулометричного складу шихти і призведе до зниження витрат палива для процесу спікання*

*Ключові слова: грудкування, шихта, автоматизована система управління, математична модель, балансний метод*

*Разработаны математические модели окомкования шихты в барабанных и тарельчатых грануляторах. Предложены системы, которые используют в качестве управляющих воздействий угол наклона и скорость вращения гранулятора. Представлены результаты моделирования, которые показывают, что применение систем обеспечит стабилизацию гранулометрического состава шихты и приведёт к снижению расхода топлива для процесса спекания*

*Ключевые слова: окомкование, шихта, автоматизирована система управления, математическая модель, балансный метод*

УДК 622.788.34:519.876.2

DOI: 10.15587/1729-4061.2015.39035

# МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ УПРАВЛІННЯ БАРАБАННИМИ І ТАРІЛЧАСТИМИ ГРАНУЛЯТОРАМИ СИПКИХ МАТЕРІАЛІВ

**В. О. Рахуба**

Кандидат технічних наук, доцент  
Кафедра автоматизованого управління технологічними процесами  
Запорізька державна інженерна академія  
пр. Леніна, 226, м Запоріжжя, Україна, 69006  
E-mail: victoriya.teacher@gmail.com

## 1. Вступ

Серед сучасних задач розвитку гірничо-металургійної промисловості України перше місце посідають питання енерго- та ресурсозбереження. Одними з найбільш енергоємних технологій є виробництво агломерату та залізородних окатків. Поряд із цим недосконалість підготовки матеріалу до спікання призводить до виходу великої долі продукту зворотного циклу та коливань продуктивності агломераційних машин. Відомо, що продуктивність агломашини пропорційна газопроникності шару шихтового матеріалу, яка де-

термінується якістю грудкування [1]. Також результат процесу випалу залежить від міцності та фракційного складу сирих окатків. Отже, одними з найважливіших чинників, що впливають на результат процесів спікання та випалу, є гранулометричний склад шихти та міцність гранул. Формування цих характеристик відбувається в ході грудкування сипкої залізородної маси; після чого вони зазнають певних змін під час транспортування і завантаження грудкованої шихти на агломераційні та випалювальні машини. Тому підвищення рівня автоматизованого управління цими процесами забезпечить зниження витрати енергосі-