4. Давідіч, Ю. О. Проектування автотранспортних технологічних процесів з урахуванням психофізіології водія / Ю. О. Давідіч. - Харків : ХНАДУ, 2006. - 292 с.
5. Гюлев, Н.У. К вопросу о зависимости функционального состояния водителя от его индивидуально – типологических свойств / Н.У. Гюлев // Комунальне господарство міст: науково-технічний сборник. - Х.: ХНАМГ, 2011. - Вип. 97. - с. 314–319.
6. Гюлев, Н.У. Влияние темперамента на функциональное состояние водителя в транспортном заторе / Н. У. Гюлев, В.К. Доля // Восточно-европейский журнал передовых технологий. - 2012. - Т.2/3(56). - С. 39–41.
7. Лобанов, Е. М. Проектирование дорог и организация движения с учетом психофизиологии водителя / Е. М. Лобанов. - М. : Транспорт, 1980. - 311 с.
8. Френкель, А. А. Многофакторные корреляционные модели производительности труда / А. А. Френкель. - М. : Экономика, 1966. - 96 с.
9. Баевский, Р. М. Математический анализ изменений сердечного ритма при стрессе / Р. М. Баевский, О. Н. Кириллов, С. З. Клецкин. - М. : Наука, 1984. - 222 с.

Виконано аналіз еволюційних методів розв'язання задач з обмеженнями. Визначено особливості їх застосування та недоліки як елементів технологій глобальної оптимізації

Ключові слова: задачі з обмеженнями, оптимізація, методи умовної оптимізації

Выполнен анализ эволюционных методов решения задач с ограничениями. Определены особенности их применения и недостатки как элементов технологий глобальной оптимизации

Ключевые слова: задачи с ограничениями, оптимизация, методы условной оптимизации

The analysis of evolutionary techniques for constraint satisfaction problem solving is executed.Their advantages and disadvantages have been defined

Keywords: constraint satisfaction problems, optimization, constrained optimization methods

УДК 004.94

ЕВОЛЮЦІЙНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ З ОБМЕЖЕННЯМИ. АНАЛІЗ І ЗАСТОСУВАННЯ

О.В. Єгорова
Аспірант
Кафедра інформаційних технологій проектування
Черкаський державний технологічний університет
бул. Шевченко, 460, м. Черкаси, Україна, 18006
Контактний тел.: (0472) 73-02-35, 066-443-44-68
E-mail: yegorovaov@gmail.com

1. Вступ

Невід'ємною складовою людської діяльності є прийняття рішень, які супроводжуються необхідністю врахування суб'єктивних впливів і застосування математичних формалізмів. При цьому розв'язуються задачі умовної оптимізації. В економіці, техніці та науці актуальною є проблема пошуку глобальних екстремумів полімодальних цільових функції у багатовимірному просторі керованих змінних. Розв'язання таких задач ускладнює ландшафт дійсного простору пошуку, який сприяє передчасній збіжності алгоритмів. Кількість вчених, які спрямовували свої зусилля на розробку оптимальних і ефективних методів умовної оптимізації, у порівнянні з дослідниками методів безумовної оптимізації, є незначною.

Метою статті є аналітичний огляд еволюційних методів розв'язання задач з обмеженнями, узагальнення існуючих підходів, визначення напрямів майбутніх досліджень.

2. Постановка задачі

Задача оптимізації з обмеженнями (задача умовної оптимізації) (constraint optimization problem) має таку формалізовану постановку [1]:

$$f(\mathbf{x}) \to \text{opt}, \quad \mathbf{x} \in F \subseteq S \subseteq R^N,$$

при обмеженнях

$$g_i(\mathbf{x}) \le 0, \; i = 1, \ldots, n,$$

$$h_j(\mathbf{x}) = 0, \; j = 1, \ldots, p, \qquad (1)$$

$$a(l) \le \mathbf{x}_l \le b(l),\ 1 \le l \le t,$$

де $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in R^N$ – вектор-розв'язок, що належить N-вимірному евклідовому простору R^N, F – область допустимих розв'язків, S – простір пошуку, $f(\mathbf{x})$ – цільова функція, $g_i(\mathbf{x})$ – обмеження-нерівності, $h_j(\mathbf{x})$ – обмеження-рівності, $a(l)$ – нижня границя області визначення змінної, $b(l)$ – верхня границя області визначення змінної.

3. Напрями розв'язання оптимізаційних задач

При розв'язанні задач з обмеженнями ключовою є проблема коректного вибору методу. Різні аспекти класифікації методів оптимізації розглядалася в [2,3, 4]. Як правило, виділяють два основні класи глобальних алгоритмів: детерміновані та стохастичні (рис. 1).

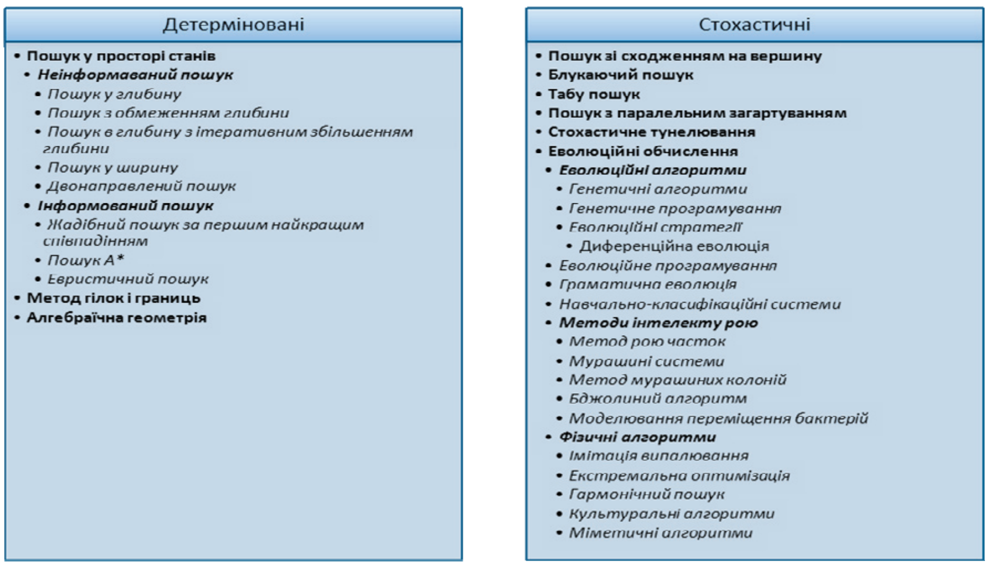

Рис. 1. Методи умовної оптимізації

4. Еволюційні методи розв'язання оптимізаційних задач з обмеженнями

Розроблені зарубіжними вченими еволюційні методи умовної оптимізації ґрунтуються на п'яти підходах [1,5]:

• використання штрафних функцій;
• спеціальне подання параметрів та розробка відповідних операторів;
• регенерування;
• відокремлене опрацювання цільових функцій та обмежень;
• опрацювання кожного обмеження як об'єкту;
• поєднанні еволюційних алгоритмів з методами чисельної оптимізації.

У методах штрафних функцій передбачено перетворення задачі умовної оптимізації на еквівалентну задачу безумовної оптимізації введенням зовнішніх штрафних функцій виду:

$$\phi(x) = f(x) \pm \left[\sum_{i=1}^{n} r_i \times G_i + \sum_{j=1}^{p} c_j \times L_j \right],$$

де $\phi(x)$ – очікуване значення цільової функції, оптимум якої треба знайти, G_i – функції обмежень-нерівностей $g_i(x)$, L_j – функції обмежень-рівностей $h_j(x)$, r_i і c_j – додатні константи, які називаються штрафними коефіцієнтами.

Функції обмежень у вигляді нерівностей G_i і рівностей L_j обчислюються за формулами:

$$G_i = \max\left[0, g_i(x)\right]^{\beta},$$

$$L_j = \left|h_j(x)\right|^{\gamma},$$

де β і γ найчастіше набувають значень 1 або 2.

Надання переваги зовнішнім штрафним функціям перед внутрішніми штрафними функціями, зумовлено тим, що вони не потребують оптимального вибору початкової точки пошуку. Відомо, що такі задачі є NP-складними.

Штрафні функції бувають статичними, динамічними, випалюючими, адаптивними, ко-еволюційними, сегрегаційними і летальними.

Статичними штрафними функціями є такі, у яких штрафні коефіцієнти не залежать від номера поточного покоління, тому є постійними протягом усього еволюційного процесу. Зокрема, Хомайфар А. (Homaifar A.), Лай С. (Lai S.H.Y.) і Кюай Кс. (Qi X.) пропонують спочатку сформувати для кожного обмеження декілька штрафних рівнів, а потім генерувати штрафні коефіцієнти для кожного обмеження і для кожного штрафного рівня таким чином, щоб найвищому штрафному рівню відповідало найбільше значення цього коефіцієнта [6]. Додатково попередньо визначають вибіркову сукупність потенційних розв'язків. Обчислюють значення функції у точках вибіркової сукупності за формулою [7]:

$$\text{fitness}(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \left(R_{k,i} \times \max\left[0, g_i(x)\right]^2 \right),$$

де $R_{k,i}$ – штрафні коефіцієнти, m – загальна кількість обмежень (у [6] переходять від обмежень-рівностей до обмежень-нерівностей), $f(x)$ – цільова функція без штрафів, $k = 1, 2, \dots, l$, l – кількість штрафних рівнів, визначена дослідником. Недоліком методу є його залежність від значної кількості параметрів: для управління m обмеженнями метод потребує $m(2l+1)$ параметрів.

Моралес А. (Morales A.K.) і Кюезада С. (Quezada C.V.) [8] пристосованість індивідів визначають за правилом:

$$fitness(x)=\begin{cases}f(x), \text{якщо розв'язок допустимий},\\ K-\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{K}{m}\right), \text{ в іншому випадку},\end{cases}$$

де s – кількість виконуваних обмежень, m – загальна кількість обмежень (рівностей і нерівностей), K – константа, яка набуває великих значень, зокрема, 10^9 і більших. Очевидним недоліком методу є однорідність генерованої популяції, що ускладнює застосування методу в обмеженому просторі пошуку.

Хофмейстер Ф.(Hofrmeister F.) і Спрейв Дж.(Sprave J.) використовують наступну штрафну функцію [9]:

$$fitness(x)=f(x)\pm\sqrt{\sum_{i=0}^{m}H(-g_i(x))g_i(x)^2},$$

де $H:\Re\to\{0,1\}$ є функцією Хевісайда (Heavyside):

$$H(y)=\begin{cases}1: y>0,\\ 0: y\le 0.\end{cases}$$

Даний підхід еквівалентний до технологій із використанням часткових штрафних функцій [10].

Динамічними штрафними функціями називаються такі штрафні функції, штрафні параметри яких залежать від номера поточної покоління. Так, Джоінс Дж. (Joines J.) і Хук К. (Houck C.) пристосованість індивідів на ітерації t пропонують обчислювати за формулою [11]:

$$fitness(x)=f(x)+(C\times t)^{\alpha}\times SVC(\beta,x),$$

де $C=0,5$, $\alpha=1\,01>2$, $\beta=1\,01>2$ – константи (дослідник може використати власні значення), функція $SVC(\beta,x)$ розраховується за виразом:

$$SVC(\beta,x)=\sum_{i=1}^{n}D_i^{\beta}(x)+\sum_{j=1}^{p}D_j(x),$$

де

$$D_i(x)=\begin{cases}0, & g_i(x)\le 0,\\ |g_i(x)|, & \text{інакше},\end{cases}\quad 1\le i\le n,$$

$$D_j(x)=\begin{cases}0, & -\varepsilon\le h_j(x)\le\varepsilon,\\ |h_j(x)|, & \text{інакше},\end{cases}\quad 1\le j\le p,$$

Недоліками такого підходу є чутливість якості розв'язку до вибору α і β, відкрита проблема чутливості методу до різних значень C.

Казарліс С. (Kazarlis S.) і Петрідіс В. (Petridis V.) детально дослідили штрафні функцій вигляду [12]:

$$fitness(x)=f(x)+V(g)\times\left(A\sum_{i=1}^{m}\left(\delta_i\cdot w_i\cdot\Phi(d_i(S))\right)+B\right)\times\delta_s,$$

де A – важливість коефіцієнта, m – загальна кількість обмежень,

$$\delta_i=\begin{cases}1, \text{якщо виконується } i-\text{те обмеження},\\ 0, \text{в іншому випадку},\end{cases}$$

w_i – ваговий коефіцієнт i-го обмеження, $d_i(S)$ – величина, яка характеризує ступінь порушення i-го обмеження, представлена розв'язком S, $\Phi_i(.)$ – функція величини $d_i(S)$, B – штрафний граничний коефіцієнт,

$$\delta_s=\begin{cases}1, S-\text{недопустимий розв'язок},\\ 0, \text{в іншому випадку},\end{cases}$$ – бінарний коефіцієнт, $V(g)$ – функція приросту g (поточне покоління), що набуває значення з інтервалу (0...1), яку автори рекомендують розраховувати за формулою

$$V(g)=\left(\frac{g}{G}\right)^2,$$

де G – загальна кількість поколінь. Недоліком методу є його залежність від декількох проблемно-орієнтованих параметрів, спосіб обчислення яких залишається нез'ясованим.

Запропоновані Міхайлевічем З. (Michalewicz Z.) і Аттіа Н. (Attia N.F.) *штрафні функції, базуються на ідеї імітації випалювання* [13]: штрафні коефіцієнти змінюються один раз на декілька поколінь (після того, як алгоритм «влучить» у локальний оптимум). Метод передбачає поділ обмежень на чотири групи: лінійні рівності, лінійні нерівності, нелінійні рівності, нелінійні нерівності. Усі нелінійні рівності і невиконані нелінійні обмеження утворюють множину активних обмежень A. Пристосованість індивідів обчислюють за формулою:

$$fitness(x)=f(x)+\frac{1}{2\tau}\sum_{i\in A}\phi_i^2(x),$$

де τ – температура,

$$\phi_i(x)=\begin{cases}\max[0,g_i(x)], & 1\le i\le n,\\ |h_i(x)|, & n+1\le i\le m,\end{cases}$$ m – загальна кількість обмежень,

$$\tau_0=1,\ \ \tau_f=0.000001,\ \ \tau_{i+1}=0.1\cdot\tau_i.$$

Такий підхід має три недоліки: по-перше, оптимуми чутливі до значень параметрів методу, зокрема, температури, обрати яку досить складно; по-друге, дослідник має визначити оптимальну початкову точку пошуку, як правило, за допомогою іншої програми, яка б задовольнила усі лінійні обмеження (рівності та нерівності); по-третє, необхідні спеціальні оператори, що завжди продукуватимуть потенційні розв'язки-нащадки із потенційних розв'язків-батьків.

У роботі [14] із аналогічним попередньому підходу формула функції пристосованості є такою:

$$fitness(x)=A\cdot f(x),$$

де $A=e^{-M/T}$, M – величина порушення обмеження, $T=1/\sqrt{t}$ – температура, t – температура, що використовувалася на попередній ітерації. Головною проблемою підходу є емпіричне визначення значень параметрів.

В *адаптивних штрафних функціях* штрафні параметри оновлюються на кожній ітерації відповідно до стану популяції. Розроблений метод [15, 16] використовує штрафні функції із зворотними зв'язками. Фітнес-функцію індивідів визначають за правилом:

$$\mathrm{fitness}(x)=f(x)+\lambda(t)\left[\sum_{i=1}^{n}g_i^2(x)+\sum_{j=1}^{p}\left|h_j(x)\right|\right],$$

де $\lambda(t)$ оновлюється на кожній ітерації t одним із способів:

$$\lambda(t+1)=\begin{cases}(1/\beta_1)\cdot\lambda(t), & \text{випадок 1},\\ \beta_2\cdot\lambda(t), & \text{випадок 2},\\ \lambda(t), & \end{cases}$$

де β_1,β_2 – справедливі штрафи. Випадок 1 має місце тоді, коли найкращий індивід на останній k-й ітерації бувзавждипотенційнимрозв'язком, $\beta_1,\beta_2>1$, $\beta_1>\beta_2$, $\beta_1\neq\beta_2$; випадок 2 має місце тоді, коли найкращий індивід на останній k-й ітерації ніколи не був потенційним розв'язком, $\beta_1,\beta_2>1$, $\beta_1>\beta_2$, $\beta_1\neq\beta_2$. Метод супроводжують проблеми визначення розриву між поколіннями, який вказує оптимальний напрям пошуку, та визначення значень справедливих штрафів.

Змінювати величину штрафу у динаміці відповідно до пристосованості найкращого індивіда на інтервалі часу пропонують у [17, 18, 19]. Обчислюють значення функції у точках вибіркової сукупності за формулою (розглядають лише нерівності):

$$\mathrm{fitness}(x)=f(x)+\left(B_{\mathrm{feasible}}-B_{\mathrm{all}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{g_i(x)}{NFT(t)}\right)^k,$$

де B_{feasible} – найкраще потенційне значення цільової функції на ітерації t, B_{all} – найкраще «не штрафоване» значення цільової функції на ітерації t, $g_i(x)$ – величина порушення i-го обмеження, k – константа, що визначає «жорсткість» штрафу (автори вважали, що $k=2$), $NFT(t)$ – «границя наближеної допустимості», яка є граничною відстанню від околу допустимих розв'язків, у якому користувач вважає доцільним здійснення пошуку, до області допустимих розв'язків. Компоненту NFT знаходять за виразом:

$$NFT=\frac{NFT_0}{1+\lambda\cdot t},$$

де NFT_0 – верхня межа NFT, t – номер ітерації, λ – константа, яка гарантує пошук у області обмежень NFT_0 і нулем.

Досліджуючи метод [20], вчені [21] показали, що він є особливим випадком технології [17], у якій $NFT=b_i$, за умови, що при $g_i(x)\leq b_i$ розв'язок є допустимим.

Пізніше [21, 22] запропонували свій підхід із більш «жорсткими» штрафами для недопустимих розв'язків. У новій версій алгоритму

$$P(x)=1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\Delta b_i(x)}{\Delta b_i^{\max}}\right)^k,$$

$$\Delta b_i(x)=\max\left[0,g_i(x)-b_i\right],$$

$$\Delta b_i^{\max}=\max\left[e,\Delta b_i(x);x\in P(t)\right],$$

де $\Delta b_i(x)$ – величина порушення i-го обмеження у n-й хромосомі, $\Delta b_i^{\max}$ – максимальна величина порушення i-го обмеження поточної популяції, 5 – мале додатне число, що використовується для запобігання діленню на нуль.

Технологія Рашида К. (Rasheed K.) базується на ідеї пошуку околів, суміжних із допустимими множинами обмежень [23]. Складним атрибутом технології є розрахунок значення початкового штрафного коефіцієнта. Крім того, необхідно визначати інтервал коливання значень штрафного елемента для запобігання його різким змінам.

Ко-еволюційні штрафні функції розробив Коело К. (Coello C.A.C.) [24]:

$$\mathrm{fitness}(x)=f(x)-\left(\mathrm{coef}\times w_1+\mathrm{viol}\times w_2\right),$$

де $f(x)$ – значення цільової функції, подане хромосомою заданого набору значень змінної; w_1, w_2 – штрафні коефіцієнти (цілі числа); coef – величина, що є сумою усіх порушених обмежень (враховуються лише обмеження-нерівності):

$$\mathrm{coef}=\sum_{i=1}^{n}g_i(x),\ \forall g_i(x)>0,$$

viol – множник, що набуває цілих значень, обнулений і збільшений на одиницю для кожного невиконаного обмеження задачі незалежно від величини порушення (враховується кількість невиконаних обмежень).

Технологія передбачає формування двох різних популяцій $P1$ і $P2$ відповідних розмірів – $M1$ і $M2$. Популяція $P1$ використовується для обчислення пристосованості індивідів, а $P2$ – для створення штрафних коефіцієнтів w_1 і w_2. Кожному елементу $A_j(1\leq j\leq M2)$ популяції $P2$ відповідає елемент популяції $P1$. Крім того, $P1$ багаторазово застосовується для усіх нових елементів A_j сформованих $P2$.

Метод має три недоліки: по-перше, необхідно вводити додаткові емпіричні параметри; по-друге, відкрита проблема визначення параметрів популяцій; по-третє, неправильний підбір параметрів алгоритму сприяє зростанню обчислювальної складності в рази.

Нечіткі штрафні функції Вю Б. і Ю Х. [25] базуються на ідеї перетворення задачі з обмеженнями в задачу безумовної оптимізації за правилом:

$$F(x)=\begin{cases}f(x), 0\leq G(x)\leq 1;\\ f(x)+r_F G(x),\ G(x)>1;\end{cases}$$

де $f(x)$ – нечітка функція пристосованості, $G(x)$ – нечітка функція обмежень $G(x)=\sum_{i=1}^{n}g_i(x)+\sum_{j=1}^{p}\left|h_j(x)\right|$, r_F визначається за правилом:

$$r=\frac{\sum_{k=1}^{u}\omega^k r^k}{\sum_{k=1}^{u}\omega^k},$$

де $\omega^k=T\left(A_l\left(f(x)\right),B_h\left(G(x)\right)\right)$, $l=h=1\ldots m$, $A_l\left(f(x)\right)$ – функція належності A_l, $B_h\left(G(x)\right)$ – функція належності B_h, A_l – нечітка множина змінних $f(x)$, B_h – нечітка множина змінних $G(x)$, r_k – сінглтон для r_F, $k = 1...u$.

Відокремлений генетичний алгоритм наведено в [26]. Технологія використовує два штрафні параметри для кожного обмеження замість одного. Ці два значення повинні балансувати високий і помірний штрафи, зберігаючи дві субпопуляції індивідів замість однієї. З позиції задоволення певних обмежень схрещуванні індивіди двох популяцій є відокремленими. Застосування підходу супроводжує проблема визначення штрафів для двох субпопуляцій.

Найпростішим способом подолання обмежень є *летальні штрафні функції*, які передбачають відмову від недопустимих розв'язків. Подальші розрахунки зводяться до оцінки ступеня недопустимості такого розв'язку. Ітерація підходу передбачає рекурсивний перебір із створенням нової точки, доки не буде знайдено розв'язок [9].

Дослідники констатують, що коли йдеться про пошук найкращого результату за мінімальну кількість поколінь, краще адаптивних штрафних елементів є лише проблемно-орієнтовані.

Використання традиційних схем представлення змінних часто є неможливим через природу задач. Подолати проблему дозволяє розробка нових **способів кодування параметрів і спеціальних генетичних операторів.** Відомими прикладами такого підходу є:

• додатки Девіса [27];

• кодування випадковими ключами – це подання, яке передбачає використання спеціальних операторів кроссоверу і мутації у довільній послідовності завдяки постійним перестановкам [28, 29];

• GENOCOP – знищення обмежень у вигляді рівностей і таку ж кількість змінних [7];

• узгоджуючі умови [30];

• визначення границь області допустимих розв'язків [31];

• декодуючі функції – це схеми перетворення фенотипів у генотипи, які гарантовано будуть допустимими розв'язками [32]. Декодери будують відображення між областю допустимих розв'язків і штучним простором розв'язків [1, 33, 34].

Зазначимо, що спеціальні подання і оператори корисні у прикладних задачах, для яких вони були розроблені, але їх не можна пристосувати для розв'язування інших задач.

Регенеруючі алгоритми передбачають або заміну недопустимих розв'язків, або «регенерування» на їх основі допустимих розв'язків [35-38]. Згідно теорії Балдвіна М. (Baldwin M.J.) пристосованість корегованого розв'язку доцільно замінювати пристосованістю початкового, а за концепцією Ламарка Ж. (Lamarck J.B.) – допустимі розв'язки недопустимими. Технології цього класу вважають методами локального пошуку, які дозволяють зменшити величину порушення обмежень. Реалізація алгоритму регенерації може виявитися складнішою розв'язання самої задачі.

Деякі оптимізаційні **методи опрацьовують цільові функції та обмеження відокремлено.** Так, коеволюційний алгоритм Паредіса Дж. (Paredis J.) [39] містить дві різні популяції: перша популяція складається із невиконаних обмежень, а друга – потенційних розв'язків. Пауел Д. (Powell D.) і Сколнік М. (Skolnick M.M.) для обробки недопустимих розв'язків використовують характеристичні правила Річардсона [40]:

$$\text{fitness}(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \text{розв'язок потенційний}, \\ 1 + r\left(\sum_{i=1}^{n} g_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{p} h_j(\mathbf{x})\right), & \text{інакше}, \end{cases}$$

де $f(\mathbf{x})$ визначають на інтервалі $(-\infty, 1)$, $g_i(\mathbf{x})$ і $h_j(\mathbf{x})$ визначають на інтервалі $(1, \infty)$, r – константа.

Іншу формулу функціонування індивідів пропонує Деб [41]:

$$\text{де fitness}(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), \ g_i(\mathbf{x}) \geq 0, \ \forall i = 1, 2, ..., n, \\ f(\mathbf{x})_{\text{worst}} + \sum_{i=1}^{n} g_i(\mathbf{x}), \ \text{інакше}, \end{cases}$$

де $f(\mathbf{x})_{\text{worst}}$ – найгірше значення цільової функції у популяції, $g_i(\mathbf{x})$ – обмеження-нерівності (автор приводить усі обмеження до вигляду нерівностей). Алгоритм супроводжує проблема однорідності популяції.

Технології багатокритеріальної оптимізації базуються на ідеї опрацювання кожного обмеження як об'єкту. Підхід використано у [42, 43, 44, 45]. Метод біхевіористичної пам'яті [46] орієнтований на мінімізацію порушення кожного обмеження у заданому порядку та оптимізації цільової функції на останньому кроці.

Гібридні технології є поєднанням методів чисельної оптимізації і еволюційних алгоритмів. Наприклад, *метод множників Лагранжа* [47]. Метод грунтується на послідовній мінімізації методом множників Лагранжа і використовує функцію пристосованості вигляду:

$$\text{fitness} = f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} \gamma_j \left\{\left[g_j(\mathbf{x}) + \mu_j\right]^+\right\}^2,$$

де $\gamma_j > 0, \mu_j$ – параметри i -го обмеження, m – загальна кількість обмежень. Також

$$\left[g_j(\mathbf{x}) + \mu_j\right]^+ = \max\left[0, g_j(\mathbf{x}) + \mu_j\right].$$

Аналогічний підхід наведено в [48] з тієї відмінністю, що пропонують використовувати зовнішній цикл для автоматичного оновлення множника Лагранжа $\lambda_i = \gamma_i \mu_i$ відповідно інформації, отриманій на попередній ітерації.

Еволюційний метод оптимізації у поєднанні з доповненою функцією Лагранжа розроблено у [49, 50]. Така деталізована система Evolian базується на еволюційному програмуванні з багаторівневою оптимізаційною процедурою для масштабування обмежень. На першій фазі алгоритму цільова функція оптимізується за виразом:

$$\text{fitness}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \frac{C}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\max\left[0, g_i\right]\right)^2(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{p}\left|h_j(\mathbf{x})\right|^2\right),$$

де C – константа.

Під час другої фази застосовується оптимізаційний алгоритм Маа К. (Maa K.) і Шанблатта (Shanblatt M.) для визначення оптимумів першої фази [51].

Технологія *умовної оптимізації з випадковою еволюцією* наведена в [52]. Головна ідея підходу полягає у використанні випадкового еволюційного пошуку, поєднаного з методом математичного програмування розв'язання задач безумовної оптимізації. Для недопустимих розв'язків мінімізується наступне обмеження

$$C = \sum_{i\in C_1} h_i^2(\mathbf{x}) - \sum_{i\in C_2} g_j(\mathbf{x}),$$

де

$$C_1 = \{i = 1,...,n / |h_i(\mathbf{x}) > \varepsilon_C\},$$

$$C_2 = \{j = 1,...,q / |g_j(\mathbf{x}) < 0\},$$

ε_C – дозволена похибка обмеження-рівність $h_i(\mathbf{x})$.

Поєднати нечітку логіку та еволюційне програмування пропонують у роботі [53]. Головна ідея підходу полягає у заміні обмежень виду $g_j(\mathbf{x}) \le b_i$ множиною нечітких змінних $C_1,...,C_m$, $i = 1,...,m$:

$$\mu C_i(\mathbf{x}) = \mu_{\sigma(b_i, e_i)}(g_i(\mathbf{x})),\ i = 1,...,m,$$

де e_i – додатне дійсне число, як визначає дозволену похибку порушення обмеження:

$$\mu_{\sigma(a,s)}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1,\ x \le a, \\ \dfrac{e^{-p\left(\frac{\infty - a}{s}\right)^2} - e^{-p}}{1 - e^{-p}},\ a < x \le a + s, \\ 0,\ x > a + s, \end{cases}$$

Функція пристосованості обчислюється за формулою:

$$\text{fitness}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \times \min(\mu C_1(\mathbf{x}),...,\mu C_m(\mathbf{x})).$$

Головним недоліком гібридних технологій є відкрита проблема визначення параметрів.

Висновок

Проаналізовано сучасні еволюційні технології розв'язання задач умовної оптимізації. Визначено особливості їх застосування, переваги і недоліки. Встановлено, що найчастіше дослідники використовують штрафні функції.

Показано, що, якщо здійснюється пошук найкращого результату за мінімальну кількість поколінь, то краще адаптивних штрафних елементів є лише використання проблемно-орієнтованих. Спеціальні подання і оператори корисні у прикладних задачах, для яких вони були розроблені, але їх не можна пристосувати для розв'язання інших задач. Реалізація регенеруючих алгоритмів може виявитися складнішою розв'язання самої задачі. Загальною проблемою наведених підходів є відкрита проблема визначення параметрів.

Література

1. Coello Coello, C. A. Theoretical and numerical constraint-handling techniques used with evolutionary algorithms: A survey of the state of the art [Text] / C. A. Coello Coello // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – Vol. 191, № 11-12. – 2002. – P. 1245-1287.
2. Субботін, С. О. Подання й обробка знань у системах штучного інтелекту та підтримки прийняття рішень [Текст] : навчальний посібник / С. О. Субботін. – Запоріжжя : ЗНТУ, 2008. – 341 с.
3. Weise, T. Global optimization algorithms – Theory and application [Electronic resource] / T. Weise. – Available at : \www/ URL: http://it-weise.de/projects/book.pdf/ – 26.06.2009 р. – Title on a display.
4. Brownlee, J. Clever algorithms: Nature-inspired programming recipes [Text] / J. Brownlee. – Melbourne : LuLu, 2011. – 436 p.
5. Kramer, O. A review of constraint-handling techniques for evolution strategies [Text] / O. Kramer // Applied computational Intelligence and Soft Computing. – Vol. 2010. – 2010. – 11 p.
6. Homaifar, S. Constrained optimization via genetic algorithms [Text] / H. Y. Lai, X. Qi // Simulation. –1994. – Vol. 62, № 4. – P. 242-254.
7. Michalewicz, Z. Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs. – New York : Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1996. – 391 p.
8. Morales, A. K. A universal eclectic genetic algorithm for constrained optimization [Text] / A. K. Morales, C. V. Quezada // Proceedings 6th European Congress on Intelligent Techniques & Soft Computing (EUFIT'98), September 1998 Aachen. – Aachen : Verlag Mainz, 1998. – P. 518-522.
9. Hofrmeister, F. Problem-independent handling of constraints by use of metric penalty functions [Text] / F. Hofrmeister, J. Sprave // Proceedings of the Fifth Annual Conference on Evolutionary Programming (EP'96), February 1996 San Diego, California / editors: L. J. Fogel, P. J. Angeline, T. Bäck. – San Diego, California : The MIT Press, 1996. – P. 289-294.
10. Schütz, M. Application of partially mixed-integer evolution strategies with mutation rate pooling [Text] / M. Schütz, J. Sprave // Proceedings of the Fifth Annual Conference on Evolutionary Programming (EP'96), February 1996 San Diego, California / editors : L. J. Fogel, P. J. Angeline T. Bäck. – San Diego : The MIT Press, 1996. – P. 345-354.
11. Joines, J. On the use of non-stationary penalty functions to solve nonlinear constrained optimization problems with GAs [Text] / J. Joines, C. Houck // Proceedings of the first IEEE Conference on Evolutionary Computation, 27-29 June 1994 Orlando, Florida / editor D. Fogel. – Orlando: IEEE Press, 1994. – P. 579-584.
12. Kazarlis, S. Varying fitness functions in genetic algorithms: studying the rate of increase of the dynamic penalty terms [Text] / S. Kazarlis, V. Petridis // Parallel problem solving from nature V–PPSN V, 1998 Amsterdam / editors: A. E. Eiben, T. Bäck, M. Schoenauer, H.-P. Schwefel. – Amsterdam : Springer-Verlag, 1998. – P. 211-220.

13. Michalewicz, Z. Evolutionary optimization of constrained problems [Text] / Z. Michalewicz, N. F. Attia // Proceedings of the 3rd Annual Conference on Evolutionary Programming, 1994 / editor : A. V. Sebald, L. J. Fogel. – World Scientific Publishing, River Edge, NJ, 1994. – P. 98-108.
14. Skalak, S. C. Annealing a genetic algorithm over constraints [Electronic resource] / S. C. Skalak, R. Shonkwiler, S. Babar, M. Aral. – Available at : \www/ URL: http://vlead.mech.virginia.edu/publications/shenkpaper /shenkpaper.htinl/ – 24.04.2012 p. – Title on a display.
15. Bean, J. C. A dual genetic algorithm for bounded integer programs [Electronic resource] / J. C. Bean, A. B. Hadj-Alouane. – Available at : \www/ URL: http://ioe.engin.umich.edu/techrprt/pdf/TR92-53.pdf/ – 24.04.2012 p. – Title on a display.
16. Hadj-Alouane, A. B. A genetic algorithm for the multiple-choice integer program [Text] / A. B. Hadj-Alouane, J. C. Bean // Operations research. – 1997. – № 45. – P. 92-101.
17. Smith, A. E. Genetic optimization using a penalty function [Text] / A. E. Smith, D. M. Tate // Proceedings of the Fifth International Conference on Genetic Algorithms, July 1993 San Mateo, California / editor : S. Forrest. – San Mateo : Morgan Kaufmann Publishers, 1993. – P. 499-503.
18. Coit, D. W. Penalty guided genetic search for reliability design optimization [Text] / D.W. Coit, A. E. Smith // Computers and Industrial Engineering. – 1996. – Vol. 30, № 4. – P. 895-904.
19. Coit, D. W. Adaptive penalty methods for genetic optimization of constrained combinatorial problems [Text] / D. W. Coit, A. E. Smith, D. M. Tate // INFORMS Journal on Computing. – 1996. – Vol. 8, № 2. – P.173-182.
20. Yokota, T. Optimal design of system reliability by an improved genetic algorithm [Text] / T. Yokota, M. Gen, K. Ida, T. Taguchi // Transactions of Institute of Electronics, Information and Computer Engineering. – 1995. – J78-A(6). – P. 702-709.
21. Gen, M. A Survey of penalty techniques in genetic algorithms [Text] / M. Gen, R. Cheng // Proceedings of 1996 the International Conference on Evolutionary Computation, 20-22 May 1996 Nagoya / editors : T. Fukuda, T, Furuhashi. – Nagoya : IEEE, 1996. – P. 804-809.
22. Gen, M. Optimal design of system reliability using interval programming and genetic algorithms [Text] / M. Gen, R. Cheng // Computers and Industrial Engineering. – 1996. – Vol. 31, № 1. – P. 237-240.
23. Rasheed, K. An adaptive penalty approach for constrained genetic-algorithm optimization [Text] / K. Rasheed // Proceedings of the Third Annual Genetic Programming Conference, 1998 San Francisco, California / editors : J. R. Koza, W. Banzhaf, K. Chellapilla, K. Deb, M. Dorigo, D. B. Fogel, M. H. Garzon, D. E. Goldberg, H. Iba, R. L. Riolo. – San Francisco : Morgan Kaufmann Publishers, 1998. – P. 584-590.
24. Coello Coello, C. A. Use of a self-adaptive penalty approach for engineering optimization problems [Text] / C. A. Coello Coello //Computers in Industry. – 2000. – Vol. 41, № 2. – P. 113-127.
25. Wu, B. Fuzzy penalty approach for constrained function optimization with evolutionary algorithms [Electronic resource] / B. Wu, X. Yu. – Available at : \www/ URL: http://cs.cinvestav.mx/~constraint/papers/wu-b01.pdf/ – 24.04.2012 p. – Title on a display.
26. Le Riche, R. G. A segregated genetic algorithm for constrained structural optimization [Text] / R. G. Le Riche, C. Knopf-Lenoir, R. T. Haftka // Proceedings of the Sixth International Conference on Genetic Algorithms, July 1995 San Mateo, California / editor : L. J. Eshelman. – San Mateo : Morgan Kaufmann Publishers, 1995. – P. 558-565.
27. Davis, L. Handbook of genetic algorithms [Text] / L. Davis. – New York : Van Nostrand Reinhold, 1991. – 385 p.
28. Bean, J. C. Genetics and random keys for sequencing and optimization [Electronic resource] / J. C. Bean. – Available at : \www/ URL: http://deepblue.lib.umich.edu/bitstream/2027.42/3481/5/ban1152.0001.001.pdf/ – 24.04.2012 p. – Title on a display.
29. Bean, J. C. Genetics and random keys for sequencing and optimization [Text] / J. C. Bean // ORSA Journal on Computing. – 1994. – Vol. 6, № 2. – P. 154-160.
30. Kowalczyk, R. Constraint consistent genetic algorithms [Text] / R. Kowalczyk // Proceedings of the 1997 IEEE Conference on Evolutionary Computation, April 1997 Indianapolis. – Indianapolis : IEEE, 1997. – P. 343-348.
31. Schoenauer, M. Evolutionary computation at the edge of feasibility [Text] / M. Schoenauer, Z. Michalewicz // Proceedings of the Fourth Conference on Parallel Problem Solving from Nature, September 1996 Berlin / editors : H.-M. Voigt, W. Ebeling, I. Rechenberg, H.-P. Schwefel. – Berlin : Springer-Verlag, 1996. – P. 245-254.
32. Palmer, C. C. Representing trees in genetic algorithms [Text] / C. C. Palmer, A. Kershenbaum // Proceedings of the First IEEE Conference on Evolutionary Computation, 27-29 June 1994 Orlando. – Piscataway : IEEE Press, 1994. – P. 379-384.
33. Koziel, S. Evolution algorithms, homomorphous mapping, and constrained parameter optimization [Text] / S. Koziel, Z. Michalewicz // Evolution Computation. – 1999. – Vol. 7, № 1. – P. 19-44.
34. Michalewicz, Z. How to solve it: Modern Heuristics [Text] / Z. Michalewicz, D. B. Fogel. – Berlin : Springer, 2000. – 467 p.
35. Michalewicz, Z. Genocop III: A co-evolutionary algorithm for numerical optimization with nonlinear constraints [Text] / Z. Michalewicz, G. Nazhiyath // Proceedings of the Second IEEE International Conference on Evolutionary Computation, 29 November – 01 Decenber 1995 Perth / editor : D. B. Fogel. – Piscataway : IEEE Press, 1995. – P. 647-651.
36. Michalewicz, Z. Evaluation of paths in evolutionary planner/navigator [Text] / Z. Michalewicz, J. Xiao // Proceedings of the 1995 International Workshop on Biologically Inspired Evolutionary Systems, May 1995 Tokyo. – Tokyo, 1995. – P.45-52.
37. Orvosh, D. Using a genetic algorithm to optimize problems with feasibility contraints [Text] / D. Orvosh, L. Davis // Proceedings of the First IEEE Conference on Evolutionary Computation, June 1994 Orlando. – Orlando : IEEE Press, 1994. – P. 548-553.

38. Mühlenbein, H. Parallel genetic algorithms in combinatorial optimization [Text] / H. Mühlenbein // Computer Science and Operations Research / editors : O. Balci, R. Sharda, S. Zenios. – New York : Pergamon Press, 1992. – P. 441-456.
39. Paredis, J. Co-evolutionary constraint satisfaction [Text] / J. Paredis // Proceedings of the 3rd Conference on Parallel Problem Solving from Nature. – London : Springer Verlag, 1994. – Vol. 866, № 2. – P. 46-55.
40. Powell, D. Using genetic algorithms in engineering design optimization with nonlinear constraints [Text] / D. Powell, M. M. Skolnick // Proceedings of the Fifth International Conference on Genetic Algorithms, July 1993 San Mateo, California / editor : S. Forrest. – San Mateo : University of Illinois at Urbana-Champaign, Morgan Kaufmann Publishers. – P. 424-431.
41. Deb, K. An efficient constraint handling method for genetic algorithms [Text] / K. Deb // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2000. – Vol. 186, № 2-4. – P. 311-338.
42. Parmee, I. C. The development of a directed genetic search technique for heavily constrained design spaces [Text] / I. C. Parmee, G. Purchase // Adaptive Computing in Engineering Design and Control-'94, 21-22 September 1994 Plymouth / editor : C. Parme. – Plymouth : University of Plymouth, 1994. – P. 97-102.
43. Surry, P. D. The COMOGA method: constrained optimisation by multi-objective genetic algorithms [Text] / P. D. Surry, N. J. Radcliffe // Control and Cybernetics. – 1997. – Vol. 26, № 3. – P. 391-412.
44. Coello Coello, C. A. Treating constraints as objectives for single-objective evolutionary optimization [Text] / Carlos A. Coello Coello // Engineering Optimization. – 2000. – Vol. 32, № 3. – P. 275-308.
45. Camponogara, E. A genetic algorithm for constrained and multiobjective optimization [Text] / E. Camponogara, S. N. Talukdar // 3rd Nordic Workshop on Genetic Algorithms and Their Applications (3NWGA), August 1997 Vaasa / editor : J. T. Alander. – Vaasa : University of Vaasa, 1997. – P. 49-62.
46. Schoenauer, M. Constrained GA optimization [Text] / M. Schoenauer, S. Xanthakis // Proceedings of the Fifth International Conference on Genetic Algorithms, July 1993 San Mateo, California / editor : S. Forrest. – San Mateo : Morgan Kauffman Publishers, 1993. – P. 573-580.
47. Adeli, H. Augmented Lagrangian genetic algorithm for structural optimization [Text] / H. Adeli, N.-T. Cheng // Journal of Aerospace Engineering.–1994. – Vol. 7, № 1. – P. 104-118.
48. Powell, M. J. D. A method for nonlinear constraints in minimization problems [Text] / M. J. D. Powell // Optimization / editor : R. Fletcher. – New York : Academic Press, 1969. – P. 283-298.
49. Kim, J.-H. Evolutionary programming techniques for constrained optimization problems [Text] / J.-H. Kim, H. Myung // IEEE Transactions on Evolutionary Computation. – 1997. – № 1. – P.129-140.
50. Myung, H. Hybrid interior-lagrangian penalty based evolutionary optimization [Text] / H. Myung, J.-H. Kim // Proceedings of the Seventh Anual Conference on Evolutionary Programming, 25-27 March 1998 San Diego / editors : V. W. Porto, N. Saravanan, D. Waagen, A.E. Eiben. – San Diego : Springer, 1998. – P. 85-94.
51. Maa, C. A two-phase optimization neural network / C. Maa, M. Shanblatt // IEEE Transactions on Neural Networks. – 1992. – Vol. 3, № 6. – P.1003-1009.
52. Belur,S. V. CORE: Constrained optimization by random evolution [Text] / S. V. Belur// Late Breaking Papers at the Genetic Programming Conference, July 1997 Stanford University, California / editor : J. R. Koza. – Stanford University: Stanford Bookstore, 1997. – P. 280-286.
53. Le, T. V. A Fuzzy evolutionary approach to constrained optimization problems [Text] /T. V. Le // Proceedings of the Second IEEE Conference on Evolutionary Computation, November 1995 Perth. – Perth : IEEE, 1995. – P. 274-278.