

Розроблено і чисельно реалізований в середовищі ABAQUS на основі співвідношень ітераційно-аналитичної теорії восьмиузловий багатошаровий скінченний елемент користувача (USER_IAT_3D) для досліджування процесів нелінійного деформування і руйнування просторових багатошарових систем

Ключові слова: МСЕ, композити, міцність, руйнування, розшарування

Разработан и численно реализован в среде ABAQUS на основе соотношений итерационно - аналитической теории восьмиузловой многослойный конечный элемент пользователя (USER_IAT_FE) для исследования процессов нелинейного деформирования и разрушения пространственных многослойных систем

Ключевые слова: МКЭ, композиты, прочность, разрушение, расслоение

There are developed and numerically implemented in ABAQUS environment based on the iterative- analytical theory relations the 8-node multilayered finite user's element (USER_IAT_3D) for investigate the processes of nonlinear deformation and failure of spatial multi-layer systems

Keywords: MFE, composites, strength, fracture, delamination

УДК 539.3

АДАПТАЦИЯ ИТЕРАЦИОННО - АНАЛИТИЧЕСКОГО МНОГОСЛОЙНОГО КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА В СИСТЕМУ ABAQUS

А. В. Гондляр

Доктор технических наук, профессор
Кафедра химического, полимерного и
силикатного машиностроения
Национальный технический университет
Украины «Киевский политехнический институт»
пр. Победы, 37, г. Киев, 03056
Контактный тел.: (044) 406-85-46, 067-465-53-27
E-mail: avg_ru@mail.ru

Введение

Практика создания систем автоматизированного проектирования и автоматизированных систем научных исследований, связанных с численным анализом в рамках МКЭ напряженно-деформированного состояния пространственных многослойных конструкций из композитов, показала целесообразность разработки для решения сложных физически и геометрически нелинейных задач специальных КЭ, позволяющих эффективно производить анализ прочностных свойств толстых, средней толщины и тонких слоев пакета.

В связи с этим, современные системы математического обеспечения прочностных расчетов МКЭ, как правило, комплектуются обширными библиотеками конечных элементов. Отличие этих элементов состоит не только в особенностях выбора математических моделей деформирования (гипотеза прямой нормали, прямой линии, уточненные модели и т.п.), но также в специфике конечно-элементной дискретизации (треугольные, четырехугольные и т.д.) и в различных полиномиальных законах восполнения функций форм (линейные, квадратичные, кубические и т.п.). Поэтому для решения конкретных прикладных задач используются КЭ различных форм и порядков аппроксимирующих функций, причем, в связи с основными положениями МКЭ, порядок аппроксимации выбирается в соответствии с порядком неизвестных в выражении для функционала полной энергии системы.

Известно, что применение КЭ с высоким порядком аппроксимации позволяет достигать требуемой точности решения задачи при сравнительно редкой расчетной сетке КЭ и в случае линейного расчета напря-

женно-деформированного состояния многослойных композитных конструкций такой подход оказывается наиболее предпочтительным.

Однако, как показывает практика, применение КЭ с высоким порядком аппроксимирующих функций в случае исследования процессов трещинообразования является малоэффективным. Объясняется это тем, что первоначально гладкие функции перемещений и напряжений в процессе образования зон разрушения и расслоения, как правило, становятся кусочно-непрерывными. В связи с этим, для численного моделирования процессов трещинообразования многие авторы рекомендуют использовать КЭ с линейными функциями аппроксимации компонент вектора перемещений.

В настоящей работе на основе соотношений итерационно-аналитической теории [1] разработан уточненный восьмиузловой многослойный конечный элемент с уточненным законом восполнения функций перемещений, ориентированный на решения задач прочности пространственных композитных систем.

1. Уточненный восьмиузловой многослойный КЭ

Отобразим восьмиузловой конечный элемент на куб, длины сторон которого равны 2, а метрика задана в местной системе координат x^i . Начало местной системы координат совместим с центром тяжести КЭ. При этом оси x^1 и x^2 направим вдоль сторон КЭ, а ось x^3 по нормали к его поверхности. В качестве глобальной выберем декартову систему координат x^i , в метрике которой формируются параметры нагрузки и определяется вектор узловых перемещений.

Функцию выполнения координат в пределах КЭ представим в стандартной для восьмиузлового КЭ виде:

$$x^{i'} = \frac{1}{4} \sum_{t=1}^8 x^{i'(t)} \prod_{r=1}^3 (1 + P_{rt} x^r) \quad (1)$$

где $x^{i'(t)}$ - декартовы координаты t -го узла КЭ,

$$\begin{aligned} \{P_{1t}\}^T &= \{-1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1\}; \\ \{P_{2t}\}^T &= \{-1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ 1 \ 1\}; \\ \{P_{3t}\}^T &= \{-1 \ -1 \ -1 \ -1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1\}. \end{aligned} \quad (2)$$

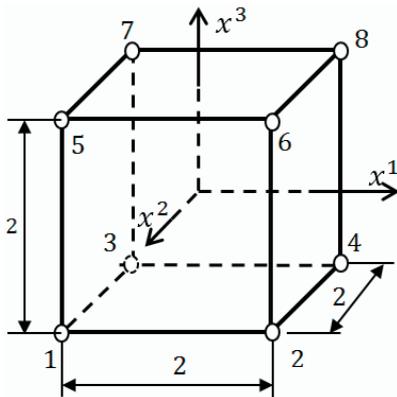


Рис. 1. Местная система координат восьмиузлового многослойного КЭ

В качестве обобщенных неизвестных примем компоненты вектора перемещений узлов КЭ $u_{i'}^{(1)}, u_{i'}^{(2)}, u_{i'}^{(3)}, \dots, u_{i'}^{(8)}$. В этом случае, закон распределения компонент вектора перемещений в объеме КЭ запишем в виде:

$$u_{i'} = \frac{1}{8} \sum_{t=1}^8 u_{i'}^{(t)} \prod_{r=1}^3 (1 + P_{rt} x^r). \quad (3)$$

Составим суммарную функцию распределения компонент вектора перемещений по координате x^3 в соответствии с выражением (3) вдоль грани $\alpha\beta$ местной системы нумерации узлов КЭ. Путем элементарных преобразований получим:

$$\begin{aligned} u_{i'}^{\alpha\beta} &= \frac{1}{8} \left[(u_{i'}^{(\beta)} + u_{i'}^{(\alpha)}) + (P_{1\beta} u_{i'}^{(\beta)} + P_{1\alpha} u_{i'}^{(\alpha)}) x^1 + \right. \\ &+ (P_{2\beta} u_{i'}^{(\beta)} + P_{2\alpha} u_{i'}^{(\alpha)}) x^2 + (P_{3\beta} u_{i'}^{(\beta)} + P_{3\alpha} u_{i'}^{(\alpha)}) x^3 + \\ &+ (P_{1\beta} P_{2\beta} u_{i'}^{(\beta)} + P_{1\alpha} P_{2\alpha} u_{i'}^{(\alpha)}) x^1 x^2 + \\ &+ (P_{1\beta} P_{3\beta} u_{i'}^{(\beta)} + P_{1\alpha} P_{3\alpha} u_{i'}^{(\alpha)}) x^1 x^3 + \\ &+ (P_{2\beta} P_{3\beta} u_{i'}^{(\beta)} + P_{2\alpha} P_{3\alpha} u_{i'}^{(\alpha)}) x^2 x^3 + \\ &\left. + (P_{1\beta} P_{2\beta} P_{3\beta} u_{i'}^{(\beta)} + P_{1\alpha} P_{2\alpha} P_{3\alpha} u_{i'}^{(\alpha)}) x^1 x^2 x^3 \right], \end{aligned} \quad (4)$$

где: $\alpha = 1 \div 4$; $\beta = \alpha + 4$.

С учетом (2), легко видеть, что коэффициенты при функциональных сопровождениях, содержащих x^3 ,

определяют обобщенный сдвиг $\gamma_{i'}^{\beta\alpha} = \frac{(u_{i'}^{(\beta)} - u_{i'}^{(\alpha)})}{2}$ между узлами α и β , а остальные коэффициенты определяют обобщенное среднее смещение $v_{i'}^{\beta\alpha} = \frac{(u_{i'}^{(\beta)} + u_{i'}^{(\alpha)})}{2}$ узлов α и β . Поэтому уравнения (4) можно представить в виде:

$$u_{i'}^{\beta\alpha} = \frac{1}{4} \prod_{r=1}^2 (1 + S_{\alpha r} x^r) (v_{i'}^{\beta\alpha} + x^3 \gamma_{i'}^{\beta\alpha}); \quad \alpha = 1 \div 4; \quad \beta = \alpha + 4. \quad (5)$$

В выражении (5)

$$\{S_{1t}\}^T = \{-1 \ 1 \ -1 \ 1\};$$

$$\{S_{2t}\}^T = \{-1 \ -1 \ 1 \ 1\}; \quad (6)$$

Обобщенное среднее смещение между узлами α и β :

$$v_{i'}^{\beta\alpha} = \frac{(u_{i'}^{(\beta)} + u_{i'}^{(\alpha)})}{2} \quad (7)$$

Обобщенный средний сдвиг ($i' = 1, 2$) или обжатие ($i' = 3$) между узлами α и β :

$$\gamma_{i'}^{\beta\alpha} = \frac{(u_{i'}^{(\beta)} - u_{i'}^{(\alpha)})}{2} \quad (8)$$

Выражение (5) соответствует приведению трехмерных уравнений механики деформированного твердого тела к двумерным соотношениям теории оболочек в рамках теории прямой линии с учетом фактора линейного обжатия по толщине пакета слоев. Однако, использование (5) не позволяет анализировать неоднородный сдвиг, возникающий в процессе расслоения слоев пакета. Поэтому в работах [1-3] для исследования процессов расслоения многослойных оболочек в рамках итерационно-аналитической теории вводятся дополнительные обобщенные неизвестные $f_{i'}(x^3)$ и $\theta_{i'}^{(t)}$, характеризующие неоднородность распределения деформаций поперечного сдвига и обжатия по толщине пакета слоев, а именно:

$$u_{i'} = \frac{1}{4} \sum_{t=1}^4 (v_{i'}^{(t)} + x^3 \gamma_{i'}^{(t)} + f_{i'}(x^3) \theta_{i'}^{(t)}) \prod_{\alpha=1}^2 (1 + S_{\alpha t} x^\alpha); \quad (9)$$

$$\alpha = 1 \div 4; \quad \beta = \alpha + 4.$$

Как показали многочисленные исследования [3], аппроксимация подобного вида обеспечивает достаточную точность расчетов при исследовании напряженно-деформированного состояния многослойных систем и в то же время является более эффективной в отношении затрат времени ЭВМ по сравнению с использованием КЭ с аппроксимирующими функциями более высокого порядка. Практика исследования напряженного состояния многослойных пространственных оболочечных конструкций показала целесообразность использования гипотезы приведения (9) для детального описания возникновения и распространения зон расслоения в многослойных оболочках.

Пусть компоненты вектора узловых перемещений $u_{i'}^{(t)}$ соответствуют действительным перемещениям решения трехмерной задачи теории упругости. В этом случае, полилинейный закон аппроксимации обобщенных неизвестных должен быть пополнен соот-

ветствующими компонентами, учитывающими неоднородность распределения деформаций поперечного сдвига и обжатия.

Формально представим компоненты u_i вектора перемещений в виде:

$$u_i = \sum_{s=1}^S F_s^i(x^3, t) v_i^s(x^1, x^2, t), \tag{10}$$

где v_i^s - компоненты обобщенного вектора перемещений поверхности приведения x^1, x^2 КЭ, определенные из решения краевой задачи в рамках трехмерного оператора теории упругости;

F_s^i - функции приведения;
 t - время.

Для того, чтобы вектор \bar{u} описывал действительное деформированное состояние оболочки необходимо выполнение условия стационарности полной энергии системы.

Сформулируем следующую вариационную задачу: найти такие функции v_i^s и F_s^i , которые бы обеспечили выполнение вариационного принципа Гамильтона-Остроградского, а именно:

$$\begin{aligned} & \delta \int_{t_0}^{t_1} (W-K-A) dt = \\ & = \delta_{v_i^s} \int_{t_0}^{t_1} (W-K-A) dt + \delta_{F_s^i} \int_{t_0}^{t_1} (W-K-A) dt = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь обозначение типа $\delta_{v_i^s}$ и $\delta_{F_s^i}$ означает, что вариирование функционала производится по v_i^s или F_s^i , соответственно.

Учитывая (10) и независимость вариаций δv_j^r и δF_r^i , на основании (11), запишем интегралы, для получения разрешающей системы уравнений

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_V A_j^r \left(v_i^s, \frac{\partial v_i^s}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial^2 v_i^s}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}, \dot{v}_i^s; F_s^i, \frac{dF_s^i}{dx^3}, \frac{d^2 F_s^i}{(dx^3)^2}, \ddot{F}_s^i; p_j^r \right) \delta v_j^r dV \right\} dt = 0; \\ & \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_V B_j^i \left(v_i^s, \frac{\partial v_i^s}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial^2 v_i^s}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}, \dot{v}_i^s; F_s^i, \frac{dF_s^i}{dx^3}, \frac{d^2 F_s^i}{(dx^3)^2}, \ddot{F}_s^i; p_j^r \right) \delta F_s^i dV \right\} dt = 0; \end{aligned} \tag{12}$$

с соответствующими интегралами для получения уравнений, описывающих граничные условия

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_S a_j^r \left(v_i^s, \frac{\partial v_i^s}{\partial x^\alpha}; F_s^i, \frac{dF_s^i}{dx^3}; q_j^r \right) \delta v_j^r dS \right\} dt = 0; \\ & \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_S b_j^i \left(v_i^s, \frac{\partial v_i^s}{\partial x^\alpha}; F_s^i, \frac{dF_s^i}{dx^3}; q_j^r \right) \delta F_s^i dS \right\} dt = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Отличительная особенность выражения (11) от известных из литературных источников выражений функционалов, используемых для построения математических моделей деформирования пространственных конструкций, заключается в том, что решение разрешающей системы уравнений, полученных на основе (12), обеспечивает определение не только вектора обобщенных неизвестных v_i^s , но также и определение физически обоснованных функций приведения F_s^i ,

независимо от физических процессов, протекающих в материале конструкции в любой момент времени, таких как пластическое деформирование, либо разрушение слоев.

Решение системы уравнений (12) прямыми методами может оказаться затруднительным. В то же время, использование итерационных методов, заключающихся в последовательном уточнении компонент v_i^s , либо функций F_s^i , исходя из условия минимизации вектора невязки трехмерного оператора теории упругости (11), позволяет существенным образом упростить получение искомого решения [3].

По аналогии с (9), введем дополнительную аппроксимацию компонент вектора перемещений вдоль координаты x^3 как для однородного, так и для многослойного восьмиузлового КЭ.

Вследствие элементарных преобразований легко видеть, что эти дополнительные функции должны быть пропорциональны обобщенному среднему сдвигу $\gamma_{i'}^{\beta\alpha} = (u_{i'}^{(\beta)} - u_{i'}^{(\alpha)})$; ($i' = 1, 2$) или обжатия $\gamma_{3'}^{\beta\alpha} = (u_{3'}^{(\beta)} - u_{3'}^{(\alpha)})$ между узлами α и β КЭ. Геометрическая интерпретация аппроксимирующих функций между узлами 4 и 8 уточненного восьмиузлового однородного и многослойного конечного элемента в случае сплошного контакта между слоями приведена на рис. 2, 3.

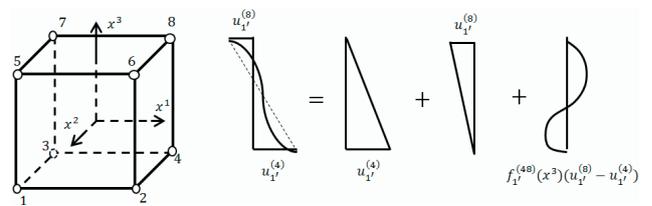


Рис. 2. Аппроксимация компонент вектора перемещений однородного по толщине уточненного восьмиузлового КЭ

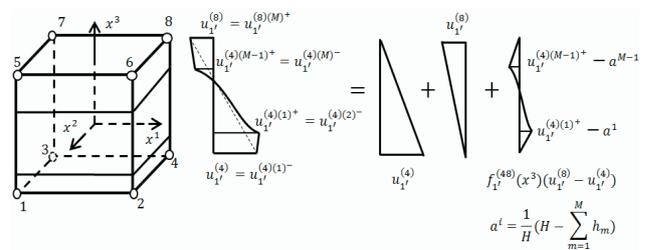


Рис. 3. Аппроксимация компонент вектора перемещений многослойного уточненного восьмиузлового КЭ (h_m – толщина m -го слоя; H – общая толщина пакета слоев)

При нарушении условий сплошного контакта между слоями в случае расслоения с учетом трения или отрыва вид аппроксимирующих функций приведен на рис. 4.

Таким образом, аппроксимацию компонент вектора перемещений в пределах уточненного конечного элемента запишем в виде:

$$\begin{aligned} u_{i'} = & \frac{1}{8} \sum_{t=1}^8 u_{i'}^{(t)} \prod_{r=1}^3 (1 + P_{\pi} x^r) + \\ & + \frac{1}{4} \sum_{s=1}^4 a_r^{(s)} f_r^{(s)}(x^3) (u_{i'}^{(s+4)} - u_{i'}^{(s)}) \prod_{\alpha=1}^2 (1 + S_{\alpha s} x^\alpha). \end{aligned} \tag{20}$$

При определении напряженно-деформированного состояния пространственных систем в рамках итерационно-аналитической теории на итерации n , выражение (20) преобразуется к виду:

$$u_{i'}^{(n)} = \frac{1}{8} \sum_{t=1}^8 u_{i'}^{(t)(n)} \prod_{r=1}^3 (1 + P_{rt} x^r) + \frac{1}{4} \sum_{s=1}^4 a_i^{(s)} f_i^{(s)(n-1)}(x^3, u_{i'}^{(s)(n-1)}) (u_{i'}^{(s+4)(n)} - u_{i'}^{(s)(n)}) \prod_{\alpha=1}^2 (1 + S_{\alpha s} x^\alpha). \quad (21)$$

$$f_{i'}^{(s)(0)} = 0.$$

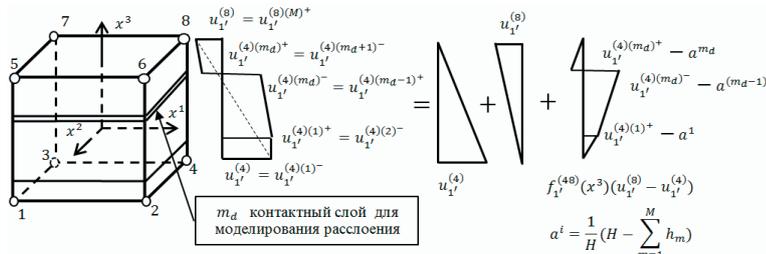


Рис. 4. Аппроксимация компонент вектора перемещений многослойного уточненного восьмиузлового КЭ в случае расслоения с учетом трения (h_m – толщина m -го слоя; H – общая толщина пакета слоев)

При определении напряженно-деформированного состояния многослойных пространственных систем в рамках итерационно-аналитической теории на итерации n , выражение (21) преобразуем к виду:

$$u_{i'}^{(n)} = \frac{1}{8} \sum_{t=1}^8 u_{i'}^{(t)(n)} \prod_{r=1}^3 (1 + P_{rt} x^r) + \frac{1}{4} \sum_{s=1}^4 a_i^{(s)} f_i^{(s)(n-1)}(x^3, u_{i'}^{(s)(n-1)}, u_{i'}^{(s)(n-1)(m)\pm}) (u_{i'}^{(s+4)(n)} - u_{i'}^{(s)(n)}) \prod_{\alpha=1}^2 (1 + S_{\alpha s} x^\alpha). \quad (22)$$

$$f_{i'}^{(s)(0)} = 0.$$

где:

- $u_{i'}^{(t)(n)}$ - компоненты вектора перемещений узла t в направлении i' на итерации n ;
- $u_{i'}^{(s)(n-1)(m)\pm}$ - компоненты вектора перемещений в направлении i' , определенные на верхней (+) и нижней (-) поверхностях слоя m , грани s на итерации $(n-1)$;
- $f_{i'}^{(s)(n-1)}$ - функции приведения, характеризующие степень неоднородность распределения деформаций поперечного сдвига по толщине пакета слоев грани s КЭ в направлении i' на итерации $(n-1)$;
- $a_i^{(s)}$ - коэффициенты штрафа, равные 0 для тех граней, которые являются общими с гранями соседних стандартных восьмиузловых КЭ (для обеспечения условий совместности по перемещениям) и равные 1 во всех других случаях;

$P_{rt}, S_{\alpha s}$ - определяются на основании (2) и (6), соответственно.

Следует отметить, что для улучшения условия линейной независимости функций разложения, после получения функций $f_{i'}^{(s)(n-1)}$ на основании решения уравнений (17), из них следует вычесть постоянную и линейную составляющие так, как эти компоненты функции входят в первое слагаемое

уравнений (20-22). При этом значения функций $f_{i'}^{(s)(n-1)}(x^3, u_{i'}^{(s)(n-1)}, u_{i'}^{(s)(n-1)(m)\pm})$ на лицевых поверхностях по оси x^3 КЭ будут, соответствующим образом, равны нулю, что соответствует виду аппроксимации, приведенной на рис. 2 – рис. 4.

Легко видеть все преимущества представления компонент вектора перемещений в форме (20-22).

Во-первых, при условии, что $f_{i'}^{(s)(n-1)} = 0$, приходим к стандартному восьмиузловому КЭ.

Во-вторых, благодаря введению дополнительных функций $f_{i'}^{(s)(n-1)}(x^3, u_{i'}^{(s)(n-1)}, u_{i'}^{(s)(n-1)(m)\pm})$, появляется возможность исследования факторов неоднородности деформаций поперечного сдвига, зависящих не только от соотношений жесткостных характеристик, но также и от компонент напряженно-деформированного состояния пакета слоев;

В-третьих, зависимость вида функций $f_{i'}^{(s)(n-1)}(x^3, u_{i'}^{(s)(n-1)}, u_{i'}^{(s)(n-1)(m)\pm})$ от компонент напряженно-деформированного состояния КЭ позволяет естественным образом физически обосновано изменять кинематические и статические условия контакта между слоями в процессе пошагового нагружения конструкции, что приводит к возможности естественного моделирования процесса накопления повреждений, развития зон пластичности в слоях и зон расслоения

композиатов.

В-четвертых, порядок разрешающей системы уравнений не зависит от количества слоев в пакете.

В-пятых, при использовании стандартных представлений аппроксимирующих функций в форме степенных рядов

$$\varphi_1^s = 1 - (x^1)^2, \varphi_2^s = 1 - (x^2)^2$$

или $\varphi_3^s = 1 - (x^3)^2$ при $f_{i'}^s(x^3) = 1$, приходим к известным схемам несовместных (incompatible displacement) КЭ.

Построение матрицы жесткости уточненного восьмиузлового КЭ выполняется в соответствии с общей процедурой моментной схемы конечных элементов (МСКЭ), разработанной проф. Сахаровым А.С. [4].

Для получения коэффициентов матрицы жесткости используем основную процедуру МСКЭ, описанную в [5], следуя которой компоненты тензора деформаций раскладываются в ряд Маклорэна и в разложениях удерживаются лишь те члены, функциональные сопровождения при которых, присутствуют в (20-22).

Т.е., используя вариационный принцип (11) и следуя традиционной для МСКЭ процедуре, получаем выражения для вариаций энергии деформаций и кинетической энергии КЭ:

$$\delta W_{КЭ} = \sum_{r=1}^8 \sum_{t=1}^8 [g_{rt}^{t'p'} + \tilde{g}_{rt}^{t'p'}] u_{i'}^{(r)} \delta u_{i'}^{(t)} = \sum_{r=1}^8 \sum_{t=1}^8 [G_{rt}^{t'p'}] u_{i'}^{(r)} \delta u_{i'}^{(t)}; \quad (23)$$

$$\delta K_{КЭ} = \sum_{r=1}^8 \sum_{t=1}^8 [m_{rt}^{t'p'} + \tilde{m}_{rt}^{t'p'}] \ddot{u}_{i'}^{(r)} \delta u_{i'}^{(t)} = \sum_{r=1}^8 \sum_{t=1}^8 [M_{rt}^{t'p'}] \ddot{u}_{i'}^{(r)} \delta u_{i'}^{(t)}; \quad (24)$$

где:

$g_{\pi}^{t'p'}$ - коэффициенты матрицы жесткости КЭ с полилинейным законом распределения функций перемещений с учетом МСКЭ;

$\tilde{g}_{\pi}^{t'p'}$ - дополнительные коэффициенты матрицы жесткости уточненного КЭ, учитывающие влияние неоднородности распределения деформаций поперечного сдвига и обжатия;

$m_{\pi}^{t'p'}$ - коэффициенты матрицы масс КЭ с полилинейным законом распределения функций перемещений, учитывающие инерцию от поступательного движения КЭ и инерцию КЭ от обобщенного сдвига.

$\tilde{m}_{\pi}^{t'p'}$ - коэффициенты матрицы масс КЭ, учитывающие инерцию, вызванную неоднородностью деформаций поперечного сдвига.

$G_{\pi}^{t'p'}$ - коэффициенты матрицы жесткости уточненного КЭ.

$M_{\pi}^{t'p'}$ - коэффициенты матрицы масс уточненного КЭ.

Данный КЭ был разработан в системе Автоматизации Прочностных Расчетов Оболочечных и Комбинированных Систем (АПРОКС). Практика использования этого КЭ при решении большого числа тестовых и прикладных задач показала его эффективность при исследовании процессов нелинейного деформирования и разрушения однородных по толщине и многослойных пространственных конструкций.

В настоящее время на основе приведенных выше соотношений в среде ABAQUS разработан конечный элемент пользователя USER_IAT_3D.

2. Апробация разработанного КЭ путем решения контрольно-тестовых задач

2.1. Тест Тимошенко С.П.

Исследование сходимости решений в зависимости от густоты сеточной области произведено на примере определения прогиба плиты Тимошенко. Размеры и физико-механические характеристики плиты приведены на рис. 5. Плита жестко защемлена по контуру и нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q , действующей по нормали к ее срединной поверхности. Прогиб в центре плиты при $A = 100$; $B = 100$; $t = 1$; $\nu = 0,3$; $E = 12(1 - \nu^2)$; $q = 8/1,266e5$, соответствующий аналитическому решению, равен 8.

Независимо выполнено исследование деформирования плиты Тимошенко с использованием всех восьмиузловых КЭ ABAQUSa (C3D8, C3D8R, C3D8I и их комбинаций). Результаты исследований приведены в табл. 1. Анализ результатов показал полное соот-

ветствие решений, полученных в рамках АПРОКС и USER_IAT_3D в среде ABAQUS.

На рис. 5 приведен график сходимости решений в зависимости от густоты сеточной области КЭ.

Анализ результатов показал, что при использовании разработанного USER_IAT_3D элемента при сети КЭ 5x5 отличие результатов от аналитического решения отличается менее, чем на 3%. В то же время, при использовании элемента C3D8I из библиотеки ABAQUS для достижения аналогичного результата необходима сеть 21x21.

Таблица 1

Mesh	APROKS_IAT_3D	USER_IAT_3D	C3D8	C3D8R	C3D8I
5x5	7,806	7,806477	0,0534662	0,0255285	0,64936
7x7	7,906	7,90629	0,113591	0,10562	2,50277
9x9	7,95	7,950351	0,1964649	0,407629	4,755354
11x11	7,971	7,971285	0,3017026	0,917783	6,264766
15x15	7,99	7,989514	0,575897	3,605869	7,466726
21x21	7,999	7,99954	1,1297	14,33196	7,86921
25x25	8,002	8,00258	1,5784234	28,289815	7,939835
51x51	8,008	8,0073519	5,223919	295,4974	8,0043497
101x101	8,009	8,0086565	10,905854	723,46875	8,0085545

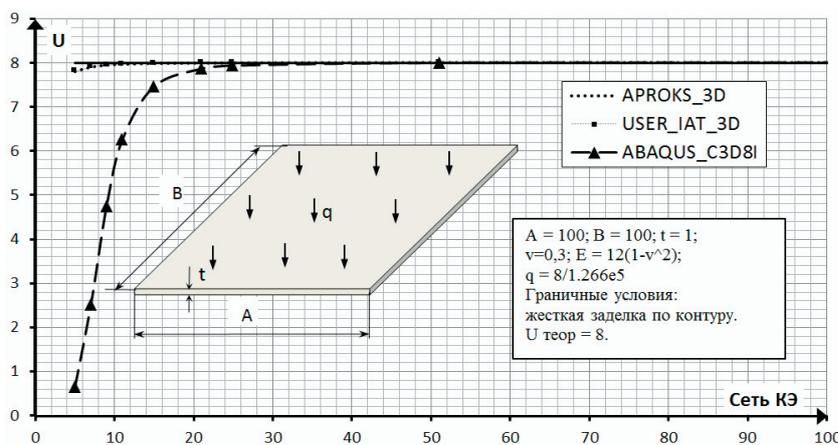


Рис. 5. Плита Тимошенко. Сходимость прогиба центральной точки плиты в зависимости от густоты сетки КЭ (U теор = 8)

При исследовании деформированного состояния плиты на базе элементов типа C3D8 и C3D8R сходимость результатов к аналитическому решению не наблюдается.

На примере этой же задачи исследован процесс возникновения численной неустойчивости решений в зависимости от отношения длины КЭ к толщине плиты ($L_{кэ}/t$). За эталонные решения приняты перемещения, полученные на основе оболочечных элементов. Анализ результатов исследований, приведенных на рис. 6, свидетельствует о том, что для элемента ABAQUS C3D8I погрешность решения составляет более 10% уже при $L_{кэ}/t = 7$. В то же время при использовании разработанного USER_IAT_3D элемента погрешность более, чем в 10% достигается при отношении длины элемента к его толщине более, чем в 500 раз ($L_{кэ}/t > 500$).

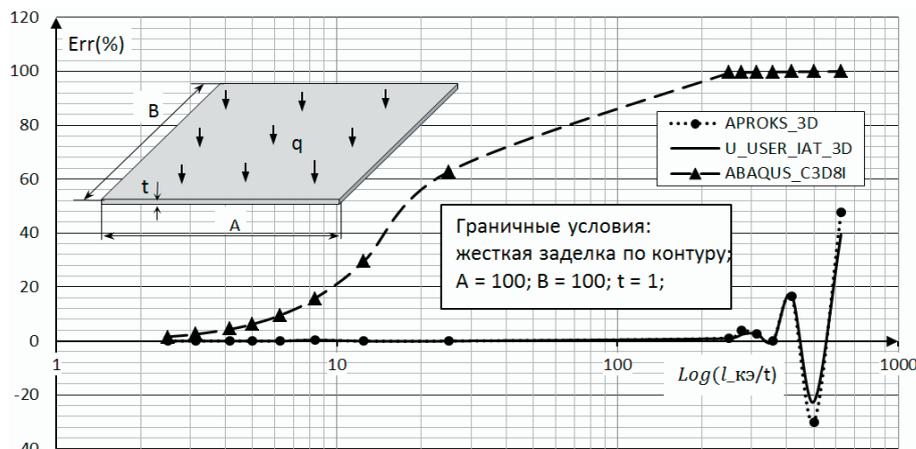


Рис. 6. Плита Тимошенко. Накопление погрешности перемещений в зависимости от отношения длины КЭ к толщине плиты ($L_{кэ}/t$). За эталонные решения приняты перемещения, полученные на основе оболочечных элементов

2.2. Цилиндр с жесткими диафрагмами под действием двух сосредоточенных сил.

Аналогичные исследования проведены на примере решения задачи об исследовании деформирования цилиндра с жесткими торцевыми диафрагмами под действием двух сосредоточенных сил, приложенных в центре пролета. С учетом всех плоскостей симметрии, в качестве расчетной схемы выбрана 1/8 часть цилиндра (рис. 7).

Геометрические параметры цилиндра: толщина - $h=0,3$ см; диаметр - $d=60$ см; длина - $B=60$ см.

Физико-механические характеристики:
 $E=3.0e5$ МПа; $\nu=0.3$.

Теоретическое решение этой задачи, соответствующее прогибу цилиндра в точке приложения сосредоточенной силы, равно $U_{теор} = 1,825e-4$ см.

Деформирование цилиндра моделировалось на основе разработанного USER_IAT_3D элемента, и элементов ABAQUS C3D8I и S4R.

На рис. 7. представлены результаты сходимости решений по прогибу цилиндра в точке приложения сосредоточенной силы в зависимости от параметра плотности сеточной области.

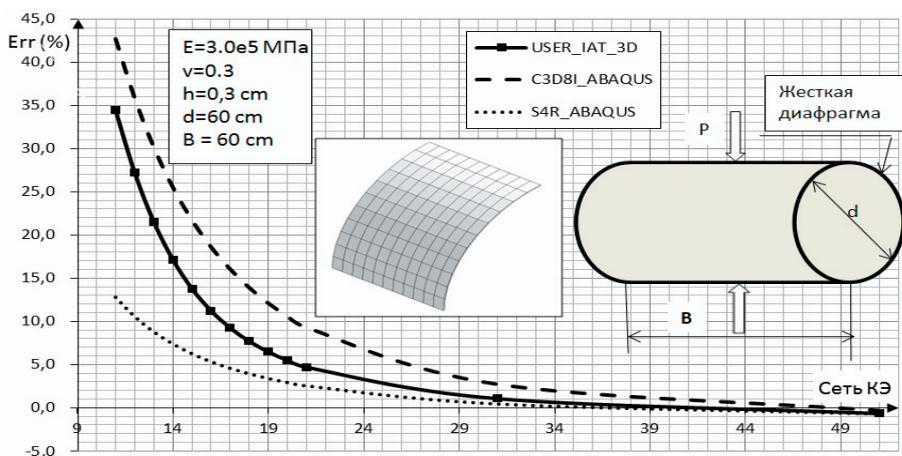


Рис. 7. Сходимость решения в зависимости от размеров сеточной области сектора баллона с учетом всех плоскостей симметрии ($U_{теор} = 1,825e-4$ см)

Анализ результатов свидетельствует, что для достижения отклонения численного решения от теоретического для данной задачи менее, чем 5%, необходимо 21x21 элементов USER_IAT_3D, 27x27 элементов C3D8I и 17x17 элементов S4R.

3. Апробация возможности моделирования расслоения на основе USER_IAT_3D КЭ

Возможность моделирования процесса расслоения многослойных конструкций на базе разработанного уточненного USER_IAT_3D элемента рассмотрена на примере модельной задачи об исследовании деформирования трехслойной свободно опертой балки с тонким средним слоем.

Геометрические параметры балки: длина - $L=20$; общая высота - $H=1$; ширина - $B=1$; толщина нижнего слоя - $t_1=0,499$; толщина среднего слоя - $t_2=0,002$; толщина верхнего слоя - $t_3=0,499$;

Физико-механические характеристики верхнего и нижнего слоев: $E_1=E_3=1.e6$; $\nu=0$;

Модуль упругости среднего слоя варьировался в диапазоне: $E_2=1.e6 \div 1.e-4$; $\nu=0$.

Балка нагружена сосредоточенной силой $P=1$, приложенной в середине пролета балки.

Для оценки достоверности результатов, полученных на основе разработанного уточненного USER_IAT_3D элемента, параллельно была проведена серия численных экспериментов по расчету этой конструкции на основании трехмерных КЭ в рамках системы АПРОКС.

Независимо выполнены расчеты балки на базе использования, многослойного оболочечного КЭ ABAQUS Multilayer_S4R и трехмерного многослойного элемента ABAQUS Multilayer_C3D8I.

На рис. 8 приведены результаты исследований, отражающие зависимость изменения прогиба центральной точки балки в зависимости от уровня модуля упругости среднего слоя.

В результате расчетов установлено, что при изменении жесткости среднего слоя на два порядка по отношению к жесткости внешних слоев, определение напряженно-деформированного состояния подобного рода конструкций необходимо производить с учетом фактора неоднородного распределения деформаций поперечного сдвига по толщине пакета слоев.

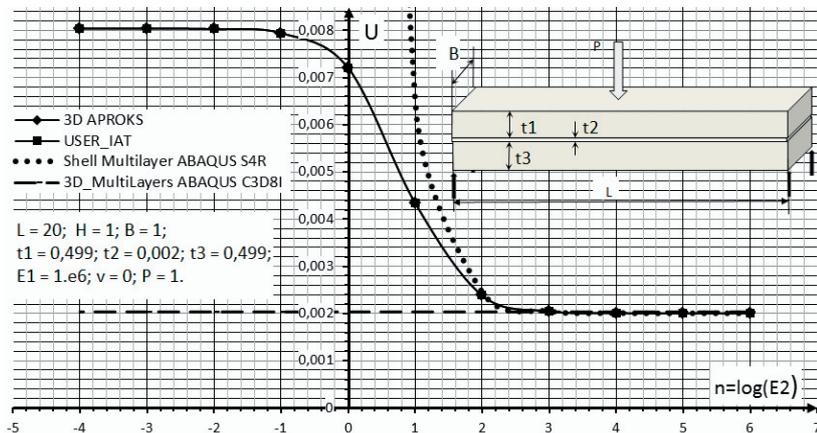


Рис. 8. Изменение прогиба в центре свободно опертой балки в зависимости от уровня модуля упругости среднего тонкого слоя

При изменении жесткости среднего слоя на шесть порядков и более внешние слои начинают работать независимо друг от друга. Данные расчета напряженно-деформированного состояния балки, полученные по предлагаемому уточненному USER_IAT_3D элементу, теории полностью согласуются с результатами трехмерного и теоретического расчетов, в то время, как применение многослойных оболочечных и трехмерных элементов из библиотеки ABAQUS отражают правильную схему деформирования балки только в диапазоне малых значений параметра неоднородности деформаций поперечного сдвига.

Аналогичные результаты получены при исследовании процесса деформирования трехслойной балки с толстым средним слоем (рис. 9).

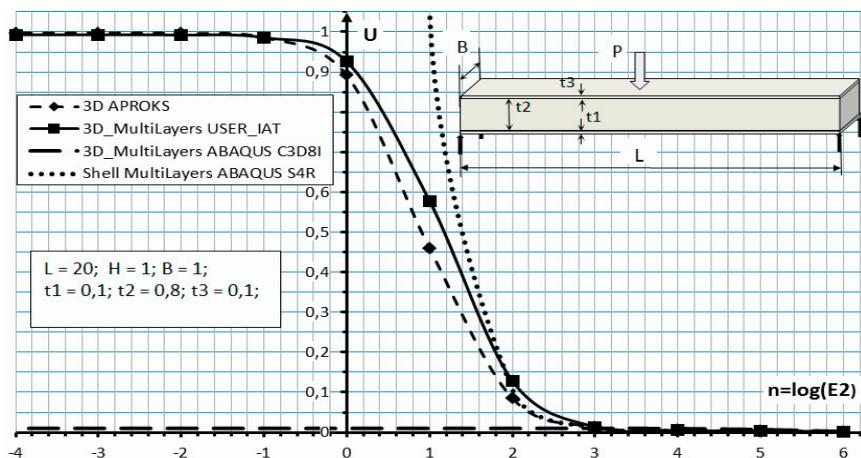


Рис. 9. Изменение прогиба в центре свободно опертой балки в зависимости от уровня модуля упругости среднего слоя конечной толщины

Выводы

Таким образом, анализ решения тестовых задач позволяет сделать вывод о том, что КЭ модели, построенные на базе разработанного уточненного восьмиузлового многослойного USER_IAT_3D, обладают

делирования на его основе процессов расслоения.

Использование многослойного USER_IAT_3D КЭ не приводит к повышению порядка систем разрешающих уравнений по сравнению с использованием стандартных восьмиузловых КЭ.

Внутренняя итерационная процедура по определению компонент функций неоднородности деформаций поперечного сдвига и обжатия, в данном случае являются той данью, которую необходимо заплатить за возможность последовательного уточнения решения.

Литература

1. Гондляр, А. В. Уточненная модель деформирования многослойных конструкций для исследования процессов прогрессирующего разрушения [Текст] / А. В. Гондляр // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2012. – № 2/7 (56). С. 52-57.
2. Гондляр, А. В. Итерационно-аналитическая теория деформирования многослойных оболочек [Текст] / А. В. Гондляр // Сопротивление материалов и теория сооружений. - К.: Будівельник.-1988.-N53. С.33-37.
3. Нелинейные задачи механики многослойных оболочек. / В. А. Баженов, А. С. Сахаров, А. В. Гондляр, С. Л. Мельников. - К.: НД Будмеханіки, 1994. - 264 с.
4. Сахаров, А. С. Модификация метода Рунге для расчета массивных тел на основе полиномиальных разложений с учетом жестких смещений [Текст] / А. С. Сахаров // Сопротивление материалов и теория сооружений. - К.: Будівельник.-1974.-N23. С. 47-52.
5. Метод конечных элементов в механике твердых тел [Текст]. / под ред. А. С. Сахарова и И. Альтенбаха. - К.: Вища школа, 1982. – 480 с.