Розглянуто сімейство алгоритмів обчислювальної теорії потенціалу з точкою коллокації всередині області розв'язку. Отримано прямі формулювання регулярних граничних інтегральних рівнянь другого роду. Сімейство чисельних алгоритмів включає в себе нові регулярні алгоритми методу граничних елементів та новий прямий алгоритм методу дискретних особливостей. Точність запропонованих алгоритмів підтверджена тестовими розрахунками

Ключові слова: регулярні граничні інтегральні рівняння, метод граничних елементів, метод дискретних особливостей

Рассмотрено семейство алгоритмов вычислительной теории потенциала с точкой коллокации внутри области решения. Получены прямые формулировки граничных интегральных уравнений второго рода. Семейство численных алгоритмов включает новые регулярные алгоритмы метода граничных элементов и новый прямой алгоритм метода дискретных особенностей. Точность предложенных алгоритмов подтверждена тестовыми расчетами

Ключевые слова: регулярные граничные интегральные уравнения, метод граничных элементов, метод дискретных особенностей

УДК 519.6

DOI: 10.15587/1729-4061.2015.40777

РАЗРАБОТКА ПРЯМЫХ РЕГУЛЯРНЫХ АЛГОРИТМОВ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА С ТОЧКАМИ КОЛЛОКАЦИИ ВНУТРИ ОБЛАСТИ РЕШЕНИЯ

Д. В. Евдокимов
Старший преподаватель
Кафедра аэрогидромеханики и энергомассопереноса
Днепропетровский национальный университет им. О. Гончара
пр. Гагарина, 72, г. Днепропетровск, Украина, 49010
E-mail: devd@ukr.net

1. Введение

В настоящее время среди методов вычислительной механики все большую роль играют методы вычислительной теории потенциала. Практически всю относительно непродолжительную историю вычислительной теории потенциала продолжаются активные дискуссии о применении прямых и непрямых подходов, коллокационных или галеркинских формулировок, а внутри каждой из этих групп алгоритмов не менее активно обсуждаются порядки аппроксимаций, применяемые при расчетах, а для коллокационных алгоритмов оптимальное расположение точек коллокации. Отсутствие единой точки зрения препятствует классификации и систематизации алгоритмов вычислительной теории потенциала и, в определенной мере, затрудняет развитие таковой. Попытки классификации указанных методов, предпринятые в обзорных монографиях [1, 2], нельзя назвать успешными. Однако оценка любого нового алгоритма вне определенной классификации алгоритмов соответствующего класса представляется весьма непростой, если вообще разрешимой, задачей. Интересы автора настоящей работы сосредоточены, в первую очередь, на прямых коллокационных формулировках, применяемых в вычислительной теории потенциала, чему и посвящена эта работа.

Любая попытка классификации прямых коллокационных алгоритмов вычислительной теории потенциала очевидно приводит к вопросам: возможны ли эффективные коллокационные алгоритмы с точками наблюдения (коллокации) внутри области и возможен ли прямой аналог метода дискретных особенностей? Следует отметить, что ни тот, ни другой алгоритм до настоящего времени в вычислительной практике не использовались. Ответы на поставленные вопросы представляются весьма важными с методологической точки зрения, что и стало одним из стимулирующих моментов написания настоящей работы.

Рассмотрим другие обстоятельства, определяющие актуальность настоящей работы. Бурный рост информационных технологий, инсталляционной базы и мощности вычислительной техники, имевший место в последние десятилетия и продолжающийся в настоящее время, способствовал интенсивному развитию методов математического и численного моделирования, созданию на их основе пакетов и комплексов прикладных программ, обеспечивающих научно-техническую и производственную деятельность в самых разнообразных отраслях. Однако, что удивительно, основной прогресс в численном решении краевых задач математической физики – фактически основном и наиболее сложном разделе математического и численного моделирования – был достигнут на основании достаточно ограниченной алгоритмической базы, состоящей всего из двух численных методов – конечных разностей и конечных элементов. Простота и высокая алгоритмичность двух указанных основных подходов обеспечили их чрезвычайно широкое применение, но, тем не менее, узость алгоритмической базы оставляла нерешенными достаточно большое число задач, что заставляло предлагать и разрабатывать альтернативные численные подходы, наиболее успешными и быстропрогрессирующими из которых являются методы вычислительной теории потенциала, в частности, метод граничных элементов.

В течение уже достаточно долгого времени продолжается дискуссия о правильном позиционировании вычислительной теории потенциала в современной вычислительной математике, а также в математическом и численном моделировании в естественных и технических науках. Не останавливаясь подробно на этом спорном вопросе, хотелось бы подчеркнуть, что прогресс вычислительной теории потенциала является принципиально важным для развития всей вычислительной математики. В первую очередь, актуальность развития вычислительной теории потенциала объясняется тем, что, несмотря на существенные ограничения в применении соответствующих методов и их ресурсоемкости, что зачастую приводит к их недостаточной эффективности, определенные методы вычислительной теории потенциала обладают исключительно высокой точностью. Высокая точность методов вычислительной теории потенциала по сравнению с другими численными методами достигается заменой в рассматриваемых алгоритмах численного дифференцирования численным интегрированием.

Если систематизация и классификация методов конечных разностей и конечных элементов прошли достаточно давно, относительно легко и естественно и стали основой структуризации соответствующих областей вычислительной математики, то систематизация и классификация метода граничных элементов, а, тем более, вычислительной теории потенциала в целом, все еще остается, скорее, предметом предварительных обсуждений. Причиной такого неудовлетворительного состояния вопроса является сложность математических представлений теории потенциала и свойств граничных интегральных уравнений, разнообразие подходов к построению интегральных представлений, в частности разнообразие фундаментальных решений и функций Грина, а также многочисленные попытки перенести на метод граничных элементов классификацию близкого ему метода конечных элементов. Кроме того, несмотря на многочисленные попытки К. А. Бреббия обобщить и систематизировать хотя бы алгоритмы метода граничных элементов, теория потенциала в целом развивалась в виде отдельных направлений, мало связанных между собой. Примером чему могут служить методы дискретных вихрей и дискретных особенностей, которые традиционно не связывались ни с методом граничных элементов, ни с методом функций Грина.

Таким образом, систематизация и классификация алгоритмов вычислительной теории потенциала представляется весьма актуальным и давно назревшим этапом развития рассматриваемой теории. В свою очередь, систематизация и классификация алгоритмов позволяет выделить не только внутренние связи между алгоритмами, но и определить ранее не разработанные перспективные алгоритмы, что и будет проделано ниже и послужит еще одним подтверждением актуальности выбранной проблематики.

Поскольку определенные в процессе систематизации и классификации ранее не разработанные алгоритмы существенно отличаются от уже реализованных численных подходов, естественно ожидать, что они обладают возможностями и достоинствами, которых у традиционных алгоритмов нет. Традиционно в численных методах прибегали к классификации на основе порядка аппроксимации, но в прямых коллокационных алгоритмах вычислительной теории потенциала классифицирующим признаком может служить расположение точки коллокации. В частности, алгоритмы вычислительной теории потенциала с точкой коллокации внутри области решения ранее не использовались в вычислительной практике. Однако разработка таких алгоритмов оказалась достаточно нетривиальной задачей, но в ходе изучения их свойств удалось выявить специфические достоинства этих методов.

2. Анализ литературных данных и постановка проблемы

Первые попытки систематизации и классификации алгоритмов метода граничных элементов относятся ко второй половине 70-х годов прошлого века. Итогом первых таких попыток стали обзорные монографии [1, 2]. К сожалению, в этих монографиях явная классификация алгоритмов была опущена, а неявно в обеих книгах классификация проводилась по типу рассматриваемой краевой задачи и области ее применения, алгоритмическая классификация же отсутствовала, хотя в монографии [1] было дано разделение методов на прямые и непрямые. Другим подходом к вопросу была используемая в работе Мусто [3] классификация по порядку аппроксимации, но, как известно, порядок аппроксимации в методе граничных элементов не основной критерий эффективности алгоритма. В отечественной литературе подобная классификация была сделана в книге Ю. В. Верюжского [4], где впервые в классификацию были включены регулярные алгоритмы, то есть, учитывалась возможность расположить точку коллокации внутри или вне области решения, а не только на границе. И хотя по-отдельности все элементы классификации были указаны, ни в одной работе они не были собраны воедино, и классификация не была построена. Такая классификация может иметь не только методологическое, но и прикладное значение, поскольку при проведении классификации может обнаружиться, что алгоритмы с определенными сочетаниями классифицирующих параметров еще не были предложены, то есть, классификация может оказаться стимулом к разработке новых алгоритмов. Поскольку автором настоящей работы при попытке провести весьма ограниченную и неполную классификацию прямых коллокационных алгоритмов было обнаружено два таких ранее не изученных алгоритма, остановимся подробнее на разделах вычислительной теории потенциала, к которым эти алгоритмы относятся.

Регулярные алгоритмы метода граничных элементов получили в последние годы значительное распространение благодаря их большей алгоритмичности по сравнению с сингулярными вариантами метода. Основным преимуществом регулярных алгоритмов, конечно, является отсутствие в них сингулярных интегралов, что, в свою очередь, дает возможность, строить расчетные схемы высокого порядка с интегрированием по реальной границе, значительно увеличивающие точность соответствующего численного решения. С другой стороны, классические регулярные алгоритмы в трактовке, данной В. Д. Купрадзе [5] приводят к граничным интегральным уравнениям первого рода, которые, вообще говоря, некорректны. Хотя близость ядра к сингулярному и обеспечивает явление саморегуляризации, теоретическое обоснование которого было дано В. Д. Купрадзе [5], применение регулярного метода в трактовке В. Д. Купрадзе, то есть, с точками наблюдения, вынесенными вне области решения, следует проводить с известной осмотрительностью. Хотя многолетний опыт автора данной работы в использовании в практических расчетах регулярных методов граничных элементов в трактовке В. Д. Купрадзе свидетельствует о том, что этот метод ничем не уступает ни в точности, ни в эффективности сингулярному методу, было бы желательно разработать регулярный алгоритм, который бы сводился к решению регулярного граничного интегрального уравнения второго рода. Долгое время это считалось невозможным, однако далее будут предложены такие алгоритмы, но в некоторых из них регулярное граничное интегральное уравнение является не точным, а приближенным.

Указание на то, что в регулярном методе граничных элементов контрольные точки (точки коллокации) можно размещать не вне области решения, а внутри нее, содержится во многих работах по регулярным методам граничных элементов, в частности в книге [4], однако из-за сложности удовлетворения граничных условий в точке внутри области разработать эффективный алгоритм на основе этой идеи до настоящего времени не удалось.

Что касается методов дискретных особенностей, то этому подходу посвящена обширная литература [6–8], поэтому освещать здесь историю этого метода нет никакой необходимости. Отметим только, что, как правило, методы дискретных особенностей основаны на непрямых постановках, и автору настоящей работы не известны примеры применения данной группы методов в прямых формулировках, хотя, как будет показано ниже, никаких специальных ограничений на применение прямых формулировок для этих методов нет.

Как следует из вышеизложенного, в настоящий момент ни для вычислительной теории потенциала в целом, ни для отдельных ее частей, не предложены достаточно универсальные систематизация и классификация алгоритмов. По мнению автора настоящей работы, это обстоятельство существенно сдерживает развитие вычислительной теории потенциала, поскольку создает определенные методологические и терминологические сложности, а также ограничивает возможности разработки высокоэффективных алгоритмов. Ограниченные рамки настоящей работы не позволяют рассмотреть еще и терминологические аспекты вычислительной теории потенциала, хотя необходимость подобного обсуждения, безусловно, давно назрела, а существование в одном разделе вычислительной математики нескольких альтернативных терминологий затрудняет как изучение, так и развитие рассматриваемого направления.

Ни в коем случае не претендуя на построение сколько-нибудь полной системы систематизации и классификации алгоритмов вычислительной теории потенциала, которое требует отдельного и весьма обширного исследования, которое далеко выходит за рамки данной статьи, ограничимся лишь некоторыми замечаниями, иллюстрирующими данный вопрос.

Следующие особенности конкретных алгоритмов вычислительной теории потенциала были выбраны в качестве классифицирующих признаков (в порядке убывания общности):

– по способу формирования интегрального представления: прямые и непрямые;

– по свойствам рассматриваемой краевой задачи: линейные и нелинейные;

– по типу краевой задачи: эллиптическая, параболическая, гиперболическая, смешанная (примером смешанной задачи может служить математическая модель нестационарного течения вязкой несжимаемой жидкости, в которой одно уравнение эллиптическое, а второе параболическое);

– по виду дифференциального уравнения в частных производных: например, уравнения Лапласа, Пуассона, теплопроводности, бигармоническое, волновое, Ляме, Стокса и другие уравнения, для решения которых применима теория потенциала;

– по области интегрирования: по полной границе, по части границы, по границе и области решения, по границе и части области решения;

– по виду функций влияния (ядру интегрального уравнения): фундаментальное решение, функция Грина, приближенное фундаментальное решение, локализованное фундаментальное решение, ядро Коши и т. д.;

– по способу формирования интегральных соотношений: традиционные граничные интегральные уравнения теории потенциала, вариационные, комплексные, полученные в результате интегральных преобразований;

– по способу формирования дискретного аналога: коллокационные, галеркинские, полученные методами применения теории функций комплексного переменного, квадратурные и т. д.;

– для коллокацонных методов по расположению точек коллокации: вне области, на границе области; внутри области;

– по порядку аппроксимации: по порядку полиномиальной аппроксимации, метод дискретных особенностей, специальные аппроксимации.

Разумеется, различные классифицирующие признаки встречаются в вычислительной практике отнюдь не одинаково часто, например, вариационные формулировки или специальные аппроксимации считаются определенного рода «экзотикой». Однако, даже при первом анализе наиболее распространенной группы прямых коллокационных алгоритмов, легко видеть, что, как это уже отмечалось выше, до настоящего времени не было предложено регулярного прямого метода граничных элементов с точками коллокации внутри области решения и прямого метода дискретных особенностей, что и составит предмет дальнейшего рассмотрения настоящей работы. Приведенные выше критерии систематизации и классификации алгоритмов вычислительной теории потенциала могут быть дополнены, расширены и усовершенствованы в соответствии с новыми тенденциями развития данной области, что откроет дополнительные возможности для разработки новых алгоритмов.

В результате многолетнего развития современная вычислительная теория потенциала стала мощным инструментом проведения прикладных расчетов. В современной вычислительной практике метод граничных элементов позиционируется как высокоточное и высокоэффективное средство решения линейных краевых задач эллиптического типа в областях сложной геометрической формы. В частности, метод граничных элементов широко применяется для решения линейных задач гидромеханики, стационарной теплопроводности, статических задач теории упругости и термоупругости. Что касается линейных краевых задач параболического типа, то метод граничных элементов не столь эффективен в этом случае, однако его высокая точность и возможность проведения расчетов в областях сложной формы делают его полезным и для этого класса задач. В отличие от начальных этапов развития вычислительной теории потенциала, начиная с монографий [1, 2], при применении метода граничных элементов полностью преобладают прямые формулировки, что предполагает возможность эффективного численного решения граничных интегральных уравнений первого рода наряду с граничными интегральными уравнениями второго рода. Поскольку уравнения первого рода, вообще говоря, некорректны, возникает вопрос об обоснованности такого подхода, который, к сожалению, до сих пор не решен надлежащим образом ни в регулярном, ни в сингулярном случае. Регулярные алгоритмы метода граничных элементов используются наряду с традиционными сингулярными элементами, однако значительно реже, поскольку существовавшие ранее традиционные регулярные алгоритмы с точкой коллокации вне области решения всегда приводят к регулярным граничным интегральным уравнениям первого рода. Выход монографий [1, 2] ознаменовал собой завершение начального этапа развития метода граничных элементов и формирование его алгоритмической базы. С тех пор основной тенденцией развития метода граничных элементов является применение его к новым задачам вычислительной механики, например, течению Стокса [9–11], бигармоническому уравнению [12], течению сверхтекучей жидкости [13] и многим другим. Другим направлением применения метода граничных элементов в настоящее время являются краевые задачи, сформулированные в областях сложной геометрической формы [14, 15].

Метод дискретных особенностей применяется в вычислительной практике не столь часто, как метод граничных элементов. Исторически метод дискретных особенностей развивался как естественное обобщение популярного в вычислительной гидромеханике метода дискретных вихрей, и до сих пор в значительной части работ, использующих метод дискретных особенностей, выбраны алгоритмы метода дискретных вихрей [16, 17], что однозначно ориентирует данный подход на вычислительную гидродинамику. Однако тенденция распространения метода дискретных особенностей на новые задачи вычислительной механики проявляется достаточно явно [18, 19].

Поскольку, как отмечалось выше, прямые алгоритмы вычислительной теории потенциала недостаточно обоснованы теоретически, существенное значение приобретает разработка методик их тестирования [20]. Хотя, конечно, тестирование алгоритма ни в коем случае не может служить строгим доказательством тех или иных свойств алгоритма, в вычислительной практике процедура тестирования считается обязательной.

3. Цель и задачи исследования

На основании вышеизложенного цель настоящей работы можно сформулировать следующим образом: разработка и исследование семейства алгоритмов вычислительной теории потенциала с точками коллокации внутри области решения, в частности, прямого метода дискретных особенностей и прямого коллокационного метода граничных элементов с точками коллокации внутри области решения.

Помимо уже неоднократно упоминавшейся выше задачи систематизации и классификации прямых коллокационных алгоритмов, настоящая работа предполагает также решение задач, свойственных разработке и тестированию новых численных алгоритмов решения краевых задач математической физики, а именно задача построения граничноэлементных сеток, задача аппроксимации известных и неизвестных значений на границе области решения, задача решения системы линейных алгебраических уравнений с полностью заполненной матрицей большой размерности, выбор релевантных тестовых задач и других традиционных задач численного анализа.

Для достижения поставленной цели были поставлены следующие задачи:

1. Проведение классификации и систематизации прямых коллокационных алгоритмов вычислительной теории потенциала.
2. Выделение семейств алгоритмов, малоисследованных и неиспользуемых в вычислительной практике, в частности, алгоритмов с точкой коллокации внутри области решения. Анализ причин подобной ситуации.
3. Модификация рассматриваемых алгоритмов с целью улучшения их вычислительных возможностей.
4. Тестирование предложенных алгоритмов на специально подобранных тестовых задачах, имеющих известное аналитическое решение в квадратурах.
5. Сравнение результатов численного решения тестовых задач с численными решениями тех же задач при помощи традиционных методов вычислительной теории потенциала.

4. Регулярные граничные интегральные уравнения с точкой колокации внутри области решения

Рассмотрение предлагаемых подходов проведем на примере плоского интегрального аналога уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0, \tag{1}$$

где u – искомая функция. Уравнение (1) будем рассматривать в области D, ограниченной ляпуновской кривой Γ (во всех последующих тестовых расчетах граница выбралась кусочно-гладкой). Для простоты предположим, что в каждой точке границы Γ поставлены граничные условия Дирихле

$$u\big|_{\Gamma_D} = f_D, \qquad (2)$$

или Неймана:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_N} = f_N. \qquad (3)$$

Граничноинтегральный аналог уравнения (1) имеет вид [1, 2]:

$$C(X_0)u(X_0) = \int_\Gamma \phi(X,X_0)\frac{\partial u}{\partial n}ds(X) - \\ -\int_\Gamma u(X)\frac{\partial \phi(X,X_0)}{\partial n}ds(X), \qquad (4)$$

где X – точка источника, X_0 – точка наблюдения, ϕ – фундаментальное решение уравнения Лапласа в плоском случае:

$$\phi(X,X_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}, \qquad (5)$$

коэффициент формы C:

$$C(X_0) = \begin{cases} 1, & X_0 \in D, \\ \frac{1}{2}, & X_0 \in \Gamma, \\ 0, & X_0 \notin D,\ X_0 \notin \Gamma. \end{cases} \qquad (6)$$

Возьмем на границе Γ некоторую контрольную точку X_0' (в данном алгоритме контрольная точка не совпадает с точкой коллокации $X_0' \neq X_0$, как это бывает обычно). Построим в точке X_0' перпендикуляр n к кривой Γ, направленный внутрь области D, (предполагаем кривую Γ гладкой в точке X_0', благодаря чему такой перпендикуляр может быть однозначно определен). Введем локальную систему координат с началом X_0' и осью, направленной вдоль перпендикуляра n. На этой оси выберем точку X_0 с координатой в локальной системе координат η. В дальнейшем будем рассматривать точку X_0 в качестве точки коллокации и перенесем в нее начало локальной системы координат, сохранив при этом масштабы и оси использованной выше локальной системы координат. В точке X_0 интегральное соотношение (4) может быть сколь угодно большое число раз продифференцировано по координатам точки X_0 как по параметрам. Тогда вдоль оси n искомая функция u может быть разложена в ряд Тейлора в окрестности точки X_0

$$u(\xi) = u(X_0) - \xi\frac{\partial u}{\partial n}(X_0) + \frac{\xi^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}(X_0) + \ldots \\ +(-1)^k\frac{\xi^k}{k!}\frac{\partial^k u}{\partial n^k}(X_0) + \ldots, \qquad (7)$$

где ξ – координата, отсчитываемая от точки X_0 в направлении точки X_0'. Очевидно, что при $\xi = \eta$ ряд (7) дает значение функции u в точке X_0':

$$u(X_0') = u(X_0) - \eta\frac{\partial u}{\partial n}(X_0) + \frac{\eta^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}(X_0) + \ldots \\ +(-1)^k\frac{\eta^k}{k!}\frac{\partial^k u}{\partial n^k}(X_0) + \ldots, \qquad (8)$$

Аналогично

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}(X_0') = -\frac{\partial u}{\partial n}(X_0) + \eta\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}(X_0) + \ldots \\ +(-1)^k\frac{\eta^{k-1}}{(k-1)!}\frac{\partial^k u}{\partial n^k}(X_0) + \ldots . \qquad (9)$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial^i u(X_0)}{\partial n^i} = \int_\Gamma \frac{\partial^i \phi(X,X_0)}{\partial n^i}\frac{\partial u}{\partial n}ds(X) - \\ -\int_\Gamma u(X)\frac{\partial^{i+1}\phi(X,X_0)}{\partial n^{i+1}}ds(X), \qquad (10)$$

соотношения (8) и (9) можно трактовать как граничные интегральные уравнения с ядрами, определенными в точке X_0. Уравнение (8) после подстановки в правую часть выражений для производных из (10) для граничных условий Дирихле представляет собой регулярное граничное интегральное уравнение первого рода, а для граничных условий Неймана – второго рода. В то же время уравнение (9) после подстановки в правую часть выражений для производных из (10) для граничных условий Дирихле представляет собой регулярное граничное интегральное уравнение второго рода, а для граничных условий Неймана – первого рода. Таким образом, используя уравнение (8) для точки X_0', когда в этой точке заданы условия Неймана, и уравнение (9) для случая условий Дирихле, можно получить формулировку задачи в виде граничных интегральных уравнений второго рода, что обеспечивает известные преимущества такому подходу.

Естественно, что в практических расчетах ряды (8) и (9) приходится обрывать на некотором члене, в результате получим уравнения вида

$$u(X_0') = \int_\Gamma \Phi(X,X_0)\frac{\partial u}{\partial n}ds(X) - \\ -\int_\Gamma u(X)\frac{\partial \Phi(X,X_0)}{\partial n}ds(X) \qquad (11)$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial n}(X_0') = \int_\Gamma \Phi_1(X,X_0)\frac{\partial u}{\partial n}ds(X) - \\ -\int_\Gamma u(X)\frac{\partial \Phi_1(X,X_0)}{\partial n}ds(X), \qquad (12)$$

где

$$\frac{\partial u}{\partial n}(X_0') = \int_\Gamma \Phi_1(X,X_0)\frac{\partial u}{\partial n}ds(X) - \\ -\int_\Gamma u(X)\frac{\partial \Phi_1(X,X_0)}{\partial n}ds(X), \qquad (13)$$

$$\Phi_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial n}. \qquad (14)$$

Решение граничных интегральных уравнений (11), (12) может быть выполнено любым численным методом решения уравнений такого класса, например, методом граничных элементов. Не останавливаясь подробно на подробностях алгоритма численного решения, отметим только, что к рассматриваемым уравнениям применимы как традиционные методы граничных элементов, описанные в монографиях [1, 2], так и методы граничных элементов с интегрированием по реальной границе, предложенные в работах [21, 22]. Последняя возможность является безусловным достоинством предложенного подхода, проистекающим из регулярного характера формулировки и обеспечивающим повышенную точность численного решения, особенно вблизи границы области решения. Поясним последний тезис. При применении метода граничных элементов граница области решения разбивается некоторым образом на части, называемые граничными элементами. При этом интегралы, входящие в правую часть граничных интегральных уравнений (4), (11), (12) и других, им подобных, представляются в виде суммы интегралов по граничным элементам, имеющих в локальной системе координат следующий вид:

$$\int_{t_1}^{t_2} U(t)K(t,X_0)h(t)dt, \tag{15}$$

где t – внутренняя переменная, определенная в локальной системе координат, связанной с данным граничным элементом; t_1, t_2 – координаты концов данного граничного элемента в локальной системе координат; U –неизвестная или известная функция, называемая плотностью потенциала и определенная на границе в локальной системе координат, связанной с данным граничным элементом; K – некоторое ядро, определяемое структурой интегрального уравнения; h – функция, отражающая форму данного граничного элемента, в сингулярных алгоритмах также неизбежно подлежит аппроксимации, но в регулярных алгоритмах нет, что и породило название «методы с интегрированием по реальной границе».

Плотности потенциала U могут быть известны из граничных условий или неизвестны и подлежать определению, в чем и состоит решение граничного интегрального уравнения. В первом случае аппроксимация плотности потенциала нужна только для облегчения вычисления интеграла, и для сингулярных алгоритмов такая аппроксимация практически неизбежна, но для регулярных алгоритмов может быть исключена. Аппроксимация неизвестной плотности потенциала является обязательным этапом метода граничных элементов. Напомним, что для корректной по Адамару краевой задачи в каждой точке границы одна из плотностей потенциала является известной, а вторая неизвестной. Понятно, что исключение двух дополнительных аппроксимаций в регулярных алгоритмах с интегрированием по реальной границе обеспечивает большую точность расчета. Как правило, при определении интегралов (15) используются полиномиальные аппроксимации, но, как показывает опыт применения метода граничных элементов, в подавляющем большинстве случаев функции U и h на граничном элементе аппроксимируются постоянными (прямолинейные граничные элементы нулевого порядка точности).

5. Простейший граничноэлементный алгоритм

Рассмотрим простейший алгоритм метода граничных элементов, относящийся к данному семейству. Случай, когда граничные условия с границы (из точки X_0') сносятся внутрь области (в точку X_0), здесь рассматриваться не будет вообще из-за низкой точности. Ограничим разложения (8), (9) первыми двумя членами ряда Тейлора. Однако в этом случае удобнее строить разложение в ряд Тейлора не в окрестности точки X_0, а в окрестности точки X_0', тогда для точки X_0

$$u(X_0) = u(X_0') + \eta\frac{\partial u}{\partial n}(X_0') + \frac{1}{2}\eta^2\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}(X_0') + \ldots. \tag{16}$$

Пренебрегая в разложении (16) членами вплоть до второго порядка малости включительно, получим следующее приближенное соотношение:

$$u(X_0) \approx u(X_0') + \eta\frac{\partial u}{\partial n}(X_0'), \tag{17}$$

которое и подставим в интегральное соотношение (4)

$$u(X_0') + \eta\frac{\partial u}{\partial n}(X_0') = \int_\Gamma \phi(X,X_0)\frac{\partial u}{\partial n}(X)ds(X) - \\ -\int_\Gamma u(X)\frac{\partial \phi(X,X_0)}{\partial n}ds(X). \tag{18}$$

Полученное соотношение (18) также является регулярным граничным интегральным уравнением с точкой коллокации, расположенной внутри области решения. Структура левой части уравнения (18) обеспечивает искомое свойство – при любых граничных условиях интегральное уравнение (18) является интегральным уравнением второго рода. В случае решения задачи Дирихле при неизвестной величине $\frac{\partial u}{\partial n}$ в левой части уравнения (18) стоит малый коэффициент η, по мнению автора такая ситуация соответствует некоторой регуляризации для граничных интегральных уравнений первого рода.

Поскольку формально граничное интегральное уравнение (18) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода с регулярным ядром, для его численного решения могут быть применены как методы решения граничных интегральных уравнений, так и традиционные методы решения интегральных уравнений. К первым относятся методы граничных элементов и методы дискретных особенностей, правда, галеркинская формулировка для регулярных граничных интегральных уравнений в данной работе не рассматривалась, поскольку требует отдельного исследования. Примером традиционных численных методов решения интегральных уравнений второго рода может служить метод механических квадратур.

6. Прямой метод дискретных особенностей

Приведенный выше подход легко распространяется и на другой численный метод вычислительной теории потенциала – метод дискретных особенностей. Рассмотрим исходную постановку граничного интегрального уравнения (4), которая после разбиения границы области решения на граничные элементы включает интегралы вида (15). Поскольку предполагается, что точка X_0 лежит внутри области решения, то ядра K всегда являются регулярными, необходимое число раз дифференцируемыми функциями. Тогда разложим ядро K в ряд Тейлора вдоль граничного элемента в окрестности точки X_0' и, удержав только первый член разложения, получим

$$\int_{t_1}^{t_2} U(t)K(t,X_0)h(t)dt =$$

$$= K(X_0',X_0)\int_{t_1}^{t_2} U(t)h(t)dt = K(X_0',X_0)W(X_0'), \qquad (19)$$

где $W(X_0')$ – интенсивность дискретной особенности. Тогда, например, для уравнения (18), заменяя в его правой части интегралы при помощи аппроксимации (19) и опуская промежуточные преобразования, получим дискретный аналог:

$$u(X_{0i}') + \eta_i \frac{\partial u}{\partial n}(X_{0i}') = \sum_{k=1}^{M} \phi(X_{0k}',X_{0i})W_2(X_{0k}') -$$

$$-\sum_{k=1}^{M} \frac{\partial \phi(X_{0k}',X_{0i})}{\partial n} W_1(X_{0k}'), \qquad (20)$$

где

$$W_2(X_{0k}') = \int_{t_{1k}}^{t_{2k}} \frac{\partial u}{\partial n}(t)h_k(t)dt,\ W_1(X_{0k}') =$$

$$= \int_{t_{1k}}^{t_{2k}} u(t)h_k(t)dt. \qquad (21)$$

Полученные выражения для интенсивности дискретных особенностей (21) показывают, что они представляют собой суммарные по граничному элементу интенсивности искомой функции или ее нормальной производной. В случае традиционной для метода дискретных особенностей точности искомая функция и ее нормальная производная могут быть разложены в ряд Тейлора в окрестности точки X_{0k}', тогда, удерживая первый член ряда, получим

$$W_2(X_{0k}') \approx \frac{\partial u}{\partial n}(X_{0k}')\, S_k,\ W_1(X_{0k}') \approx u(X_{0k}')\, S_k, \qquad (22)$$

где S_k – длина k-го граничного элемента. Заметим, что использование приближения (22), вообще говоря, не обязательно. Входящий в соотношения (21) интеграл, содержащий неизвестную функцию, подлежит определению из последующего решения задачи и не нуждается в упрощенном представлении вида (22), как и в любой другой аппроксимации. А второй интеграл, содержащий известную функцию, может быть вычислен с высокой точностью по более сложным квадратурным формулам, нежели (22). Поэтому использование аппроксимации (22) объясняется только пожеланием совместимости с традиционным алгоритмом метода дискретных особенностей.

Решение систем линейных алгебраических уравнений, полученных в рамках применения вышеописанных алгоритмов, может быть проведено любым из методов решения таких систем уравнений с матрицей общего вида, например, методом Гаусса.

Регулярные прямые алгоритмы метода дискретных особенностей, основанные на представлении (20), вообще говоря, точнее традиционных методов дискретных особенностей и обладаю большими возможностями, например, в случае смешанных граничных условий. В то же время, предложенные алгоритмы, как и все алгоритмы метода дискретных особенностей, уступают по точности аналогичным алгоритмам метода граничных элементов, но превосходят последние в скорости счета.

7. Тестирование предложенных алгоритмов и их сравнение с традиционными алгоритмами вычислительной теории потенциала

Естественной формой апробации новых численных алгоритмах является их тестирование на специально подобранных задачах. Требованиям к тестовым задачам, методикам тестирования и интерпретации результатов расчетов посвящена обширная литература, начиная с монографии [23], вопросы тестирования численных методов вычислительной теории потенциала нашли отражение в работе [20]. В настоящей работе для тестирования использовались задача Дирихле для уравнения Лапласа (1), (2). В качестве тестовых функций были выбраны следующие гармонические функции, определенные в квадрате $(0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1)$ или круге единичного радиуса с центром в начале координат.

$$u_1(x,y) = (x+y)/2, \qquad (23)$$

$$u_2(x,y) = x^2 - y^2, \qquad (24)$$

$$u_3(x,y) = e^x \cos y. \qquad (25)$$

Использование трех гармонических функций вместо одной позволяет с большей уверенностью делать общие выводы относительно точности предложенных подходов. Традиционно для регулярных методов граничных элементов оптимальное положение точки коллокации относительно границы определяется путем численного эксперимента на тестовой задаче, имеющей аналитическое решение. В данном случае также был проведен численный эксперимент с использованием функций (23)–(25), в результате, минимальную погрешность удалось получить для точек коллокации, лежащих на срединном перпендикуляре к граничному элементу на расстоянии половины длины граничного элемента, как и в других регулярных алгоритмах. Во всех приведенных ниже численных расчетах использовались полученные оптимальные расположения точек коллокации. Результаты численных расчетов приведены в табл. 1 и 2 для круглой и квадратной областей соответственно. Расчеты проводились для разного числа граничных элементов (дискретных особенностей). Результаты приведены только для одной из тестовых функций, поскольку расчеты для остальных тестовых функций продемонстрировали хорошее совпадение с приведенными. Для корректности сравнения результатов расчета сингулярным алгоритмом метода граничных элементов с результатами расчетов при помощи регулярных алгоритмов в последних вместо упомянутого выше интегрирования по реальной границе использовалась стандартная аппроксимация границы отрезками прямых.

Приведенные в табл. 1 и 2 результаты показывают, что предложенный регулярный коллокационный алгоритм метода граничных элементов с точкой коллокации внутри области решения имеет преимущества по точности перед традиционными сингулярными и регулярными алгоритмами рассматриваемого метода для областей с гладкой границей (табл. 1). Аналогично, предложенный прямой метод дискретных особенностей имеет преимущество перед традиционным методом дискретных особенностей (в таблице не приведено) и регулярным прямым методом дискретных особенностей с точкой коллокации вне области решения для областей с гладкой границей (табл. 1). Как и ожидалось, точность метода дискретных особенностей существенно уступает точности метода граничных элементов. Для кусочно-гладкой области (табл. 2) предложенные алгоритмы уже не имеют столь явно выраженных преимуществ, а иногда и уступают традиционным алгоритмам по точности. Причиной тому является наличие в квадратной области угловых точек, вследствие чего точки коллокации для граничных элементов, примыкающих к угловым точкам, располагаются очень близко друг к другу, что «портит» свойства матрицы системы линейных алгебраических уравнений и ведет к увеличению погрешности. Несмотря на специальные программные решения, реализованные при программной реализации алгоритма, полностью преодолеть указанный недостаток предложенных подходов для границ с угловыми точками не удалось.

Как отмечалось выше, потенциально точность предложенных алгоритмов может заметно повысить замена аппроксимации границы области интегрированием по реальной границе области решения, однако такая модификация алгоритмов заслуживает отдельного исследования, выходящего за рамки настоящей статьи.

Таблица 1

Сравнение результатов численного решения задачи Дирихле для функции (23) в единичном круге традиционным регулярным методом граничных элементов (алгоритм В. Д. Купрадзе), сингулярным методом граничных элементов, предложенным прямым методом дискретных особенностей и предложенным алгоритмом метода граничных элементов

Количество граничных элементов	Ошибка традиционного регулярного метода граничных элементов (максимальная/среднеквадратичная)	Ошибка сингулярного метода граничных элементов (максимальная/среднеквадратичная)	Ошибка предложенного метода граничных элементов с точкой коллокации внутри области (максимальная/среднеквадратичная)	Ошибка метода дискретных особенностей с точкой коллокации вне области (максимальная/среднеквадратичная)	Ошибка метода дискретных особенностей с точкой наблюдения внутри области (максимальная/среднеквадратичная)
50	.160718E-02 .593317E-05	.852108E-03 .310123E-05	.325322E-03 .107606E-05	.455780E-01 .141932E-03	.317632E-01 .904395E-04
100	.399947E-03 .149249E-05	.208497E-03 .778348E-06	.460147E-04 .168899E-06	.335532E-01 .125201E-03	.271041E-01 .101137E-03
200	.101089E-03 .373667E-06	.523328E-04 .194279E-06	.846386E-05 .291107E-07	.316590E-01 .118231E-03	.285408E-01 .106590E-03
400	.263452E-04 .920297E-07	.138282E-04 .481405E-07	.309944E-05 .596552E-08	.308179E-01 .115087E-03	.292825E-01 .109357E-03

Таблица 2

Сравнение результатов численного решения задачи Дирихле для функции (24) в квадратной области традиционным регулярным методом граничных элементов (алгоритм В. Д. Купрадзе), сингулярным методом граничных элементов, предложенным прямым методом дискретных особенностей и предложенным алгоритмом метода граничных элементов

Количество граничных элементов	Ошибка традиционного регулярного метода граничных элементов (максимальная/среднеквадратичная)	Ошибка сингулярного метода граничных элементов (максимальная/среднеквадратичная)	Ошибка предложенного метода граничных элементов с точкой коллокации внутри области (максимальная/среднеквадратичная)	Ошибка метода дискретных особенностей с точкой коллокации внутри области (максимальная/среднеквадратичная)
160	.118500E-02 .619152E-06	.680264E-03 .548595E-06	.103917E-02 .127448E-05	.11145260 .126365E-03
200	.530183E-03 .284582E-06	.166356E-03 .222926E-06	.290632E-03 .765017E-06	.722791E-01 .110362E-03
240	.285685E-03 .164432E-06	.148626E-03 .115835E-06	.256970E-03 .520429E-06	.479011E-01 .104266E-03
300	.168979E-03 .830855E-07	.392794E-04 .481105E-07	.102289E-03 .328160E-06	.349831E-01 .102035E-03
400	.928640E-04 .426434E-07	.607967E-05 .209963E-07	.449679E-04 .183140E-06	.354126E-01 .101325E-03

8. Выводы

Настоящая статья еще раз подтверждает, что для ряда задач, прежде всего линейных краевых задач эллиптического типа, вычислительная теория потенциала может не только служить удачной альтернативой традиционным численным методам конечных элементов и конечных разностей, но и эффективно заменить последние. К сожалению, многие теоретические вопросы вычислительной теории потенциала еще не разработаны надлежащим образом. Например, в настоящей работе при попытке классификации и систематизации коллокационных алгоритмов вычислительной теории потенциала были выделены две группы регулярных алгоритмов, которые, с одной стороны, нельзя отнести к неизвестным, поскольку о них есть упоминания в соответствующей литературе, но, с другой стороны, эти алгоритмы никогда не использовались в вычислительной практике.

Причиной пренебрежительного отношения в вычислительной практике к обнаруженным двум группам алгоритмов является очевидная неэффективность для них традиционных расчетных схем вычислительной теории потенциала. Однако при анализе указанных групп алгоритмов удалось предложить их модификацию (разложения (8), (9)), позволившую переформулировать задачу в виде регулярных граничных интегральных уравнений второго рода. Последнее обстоятельство представляется существенным преимуществом рассматриваемого подхода по сравнению с традиционно используемыми сингулярными и регулярными алгоритмами вычислительной теории потенциала.

К исследуемым группам относятся фактически вновь предложенные алгоритмы метода граничных с точками коллокации внутри области решения и регулярные прямые алгоритмы метода дискретных особенностей. При численной реализации указанных алгоритмов преимущества их по сравнению с сингулярными алгоритмами достигаются за счет исключения сингулярных интегралов, что существенно упрощает алгоритм, возможности интегрирования по реальной границе (в настоящей работе не реализовывалась) и «улучшения» свойств матриц систем линейных алгебраических уравнений. Именно последнее обстоятельство обеспечивает преимущество предложенных подходов по сравнению с традиционными регулярными коллокационными алгоритмами.

Проведенное тестирование предложенных алгоритмов с использованием трех аналитически заданных тестовых функций (23)–(25) в целом подтвердило не только их высокую точность и эффективность, но и сделанные выше выводы относительно вычислительных преимуществ предложенных численных алгоритмов в сравнении с традиционными. Хотелось бы отметить, что тенденции повышения точности расчета при сгущении граничноэлементной сетки, которые легко видеть в табл. 1, 2 для предложенных и традиционных сингулярных алгоритмов достаточно близки. В целом же проведенное тестирование подтвердило возможность использования предложенных алгоритмов к задачам вычислительной механики, для решения которых в настоящее время используются традиционные методы граничных элементов.

Дальнейшие перспективы развития предложенных расчетных схем совершенно очевидны: распространение данного подхода на пространственный случай, его распространение на случаи более сложных граничных условий и, наконец, на случаи иных ядер граничных интегральных уравнений, появление которых может быть следствием рассмотрения краевой задачи с другим дифференциальным оператором, а также может быть результатом использования другого фундаментального решения или функции Грина.

Предложенные алгоритмы могут быть использованы, в первую очередь в вычислительной механике для решения линейных задач гидромеханики, теории теплопроводности, теории упругости и термоупругости.

Литература

1. Бенерджи, П. Метод граничных элементов в прикладных науках [Текст] / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
2. Бреббия, К. Методы граничных элементов [Текст] / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел. – М.: Мир, 1987. – 524 с.
3. Mustoe, G. G. W. A combination of the finite element and boundary integral procedures [Text]: PhD thesis / G. G. W. Mustoe. – Swansea University, United Kingdom, 1980.
4. Верюжский, Ю. В. Численные методы потенциала в некоторых задачах прикладной механики [Текст] / Ю. В. Верюжский. – Киев: "Вища школа", 1978. – 184 с.
5. Купрадзе, В. Д. Методы потенциала в теории упругости [Текст] / В. Д. Купрадзе. – М.: Физматгиз, 1963. – 525 с.
6. Белоцерковский, С. М. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях [Текст] / С. М. Белоцерковский, И. К. Лифанов. – М.: Наука, 1985. – 256 с.
7. Лифанов, И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент [Текст] / И. К. Лифанов. – М.: Наука, 1995. – 520 с.
8. Довгий, С. А. Методы решения интегральных уравнений [Текст] / С. А. Довгий, И. К. Лифанов. – Киев: Наукова думка, 2002. – 343 с.
9. Zhao, H. A spectral boundary integral method for flowing blood cells [Text] / H. Zhao, A. H. G. Isfahani, L. N. Olson, J. B. Freund // Journal of Computational Physics. – 2010. – Vol. 229, Issue 10. – P. 3726–3744. doi: 10.1016/j.jcp.2010.01.024
10. Bazhlekov, I. B. Nonsingular boundary integral method for deformable drops in viscous flows [Text] / I. B. Bazhlekov, P. D. Anderson, H. E. H. Meijer // Physics of Fluids. – 2004. – Vol. 16, Issue 4. – P. 1060–1081. doi: 10.1063/1.1648639
11. Klaseboer, E. Non-singular boundary integral methods for fluid mechanics applications [Text] / E. Klaseboer, Q. Sun, D. Y. C. Chan // Journal of Fluid Mechanics. – 2012. – Vol. 696. – P. 468–478. doi: 10.1017/jfm.2012.71
12. Wendland, W. L. On the boundary integral equation method for a mixed boundary value problem of the biharmonic equation [Text] / W. L. Wendland, F. Cakoni, G. C. Hsiao // Complex Variables. – 2005. – Vol. 50, Issue 7-11. – P. 681–696. doi: 10.1080/02781070500087394

13. Бразалук, Ю. В. Расчет гидродинамического взаимодействия в сверхтекучей жидкости методами вычислительной теории потенциала [Текст] / Ю. В. Бразалук // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2013. – Т. 5, № 5 (65). – С. 6–11. – Режим доступа: http://journals.uran.ua/eejet/article/view/18102/15849
14. Бразалук, Ю. В. Расчет обтекания сложных гидродинамических конфигураций комбинированным методом граничных элементов и дискретных вихрей [Текст] / Ю. В. Бразалук, Д. В. Евдокимов, В. Г. Решняк // Вісн. Дніпропетровського університету. Серія Механіка. – 2012. – Вип. 16, Т. 1. – С. 50–67.
15. Бразалук, Ю. В. Численная реализация обобщенного метода Блоха-Гиневского [Текст] / Ю. В. Бразалук, Д. В. Евдокимов, Н. В. Поляков // Вісник Дніпропетровського університету. Серія Механіка. – 2013. – Вип. 17, Т. 1. – С. 35–51.
16. Апаринов, А. А. О распараллеливании вычислений в вихревом методе решения задач аэродинамики [Текст] / А. А. Апаринов, А. В. Сетуха // Выч. мет. программирование. – 2013. – Т. 14, № 1. – С. 406–418.
17. Апаринов, А. А. О применении метода мозаично-скелетонных аппроксимаций при моделировании трехмерных вихревых течений вихревыми отрезками [Текст] / А. А. Апаринов, А. В. Сетуха // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2010. – Т. 50, №. 5. – С. 937–948.
18. Gandel, Yu. V. Boundary-Value Problems for Helmholtz Equation and their Discrete Mathematical Models [Text] / Yu. V. Gandel // Journal of Mathematical Sciences. – 2010. – Vol. 171, Issue 1. – P. 74–88. doi: 10.1007/s10958-010-0127-3
19. Гутников, В. А. О численном решении двумерного гиперсингулярного интегрального уравнения и о распространении звука в городской застройке [Текст] / В. А. Гутников, В. Ю. Кирякин, И. К. Лифанов, А. В. Сетуха, С. Л. Ставцев // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2007. – Т. 47, №. 12. – С. 2088–2100.
20. Бразалук, Ю. В. Совместное применение метода малого параметра и метода граничных элементов для численного решения эллиптических задач с малыми возмущениями [Текст] / Ю. В. Бразалук, Д. В. Евдокимов, Н. В. Поляков // Вестник Харк. нац. ун-та. Серия «Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления». – 2005. – Вып. 5, № 703. – С. 50–66.
21. Yevdokymov, D. V. Boundary element and discrete vortices method for ideal fluid flow calculations [Text] / D. V. Yevdokymov, D. Durban; A. R. J. Pearson (Ed.) // Non-linear singularities in deformation and flow. Proceeding of IUTAM Symposium held in Haifa, Israel. – Kluwer Academic Publisher, 1997. – P. 217–230. doi: 10.1007/978-94-011-4736-1_20
22. Евдокимов, Д. В. Об одном варианте регулярного метода граничных элементов [Текст] / Д. В. Евдокимов // Вісник Дніпропетровського університету. Механіка. – 1999. – Вип. 2, Т. 1. – С. 150–156.
23. Ван Тассел, Д. Стиль, разработка, эффективность, отладка и испытание программ [Текст] / Д. Ван Тассел. – М.: Мир, 1985. – 332 с.