

**Abstract**

*The article concerns the flow of abnormally viscous fluids in pipelines with length-varying flow rate. The solutions of carboxymethyl cellulose and glycerin were used as the working fluids, modelling the rheological behavior of oil. The rheological characteristics of Algerian oil at different temperatures were represented.*

*The obtained results of researches are presented as pressure curve along the channel at the flow of the aqueous solution of CMC with 2% concentration, which is a non-Newtonian fluid. The rheological behavior of this fluid can be described by Oswald de Ville's law. The scheme of the channel and the distance between the heads, mounted along the pipeline are presented in the figures. The table shows the experimental data to determine the coefficients of hydraulic friction  $\lambda$  in different areas and at different flow rates in accordance with the installation diagram. The dependence of the static pressure change along the channel is shown.*

*During the experiments, there were measured such quantities as pressure and its changes along the channel, the flow rate and its changes along the channel at fixed temperatures and set rheological properties of used fluids, and the flow rates, flowing through the heads*

*Keywords: abnormally viscous fluid, flow rate, rheological characteristics, coefficient of hydraulic friction, velocity gradient*

*На основі принципу максимуму ентропії отримана залежність для розподілу кількості мікротріщин по класах. Її негаусовий характер відповідає емпіричним даним. Виходячи з розуміння енергетичного балансу, який формується в процесі еволюції втомних мікротріщин, отримані співвідношення для їх швидкості росту і розміру. Виведена формула для втомної кривої*

*Ключові слова: гіперболічний розподіл, розподіл кількості мікротріщин, швидкість росту мікротріщин, формула втомної кривої*

*На основе принципа максимума энтропии получена зависимость для распределения количества микротрещин по классам. Ее негауссов характер соответствует эмпирическим данным. Исходя из понимания энергетического баланса, который формируется в процессе эволюции усталостных микротрещин, получены соотношения для их скорости роста и размера. Выведена формула для усталостной кривой*

*Ключевые слова: гиперболическое распределение, распределение количества микротрещин, скорость роста микротрещин, формула усталостной кривой*

УДК 620.191.33 (045)

## ЭНТРОПИЙНО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАЗВИТИЯ УСТАЛОСТНЫХ ДЕФЕКТОВ

Н.И. Делас

Кандидат технических наук, докторант\*

Контактный тел.: 067-501-62-77

E-mail: nikolaivad@gmail.com

В.А. Касьянов

Доктор технических наук, профессор

Кафедра механики\*

Контактный тел.: 050-700-79-04

E-mail: vakasyanov@mail.ru

\*Национальный авиационный университет  
пр. Комарова, 1, г. Киев, Украина, 03680**Вступление**

Подавляющее число эксплуатационных разрушений носит усталостный характер, поэтому проблема накопления повреждаемости является важнейшей и одновременно самой сложной проблемой теории прочности.

Видна тенденция к росту нагруженности материалов, и, как следствие, ресурс отдельных элементов конструкции стал ограничиваться развитием *дефектов малых размеров* [1]. Прогнозирование развития малых трещин, близких к характерным размерам

структуры материала, становится все более актуальной задачей.

В настоящее время существует достаточно много моделей, описывающих процесс роста микротрещин. Их условно можно разделить на три группы (множество ссылок можно найти, например, в [2]). Модели первой группы основаны на построении расчетных схем нагружения с попытками учета микроструктуры материала. Вторая группа основана на введении формального параметра повреждаемости и постулировании для него некоторого эволюционного уравнения, связывающего напряжение и скорость роста повреж-

дения. В моделях третьей группы предполагается, что динамика повреждаемости имеет некоторые «термодинамические» свойства, а точнее, универсальные свойства, присущие большинству сложных систем.

Подходы, используемые в предлагаемой статье, тяготеют больше к третьей группе. Здесь в качестве отправных точек используется вариационный принцип максимума энтропии и закон сохранения энергии.

### Цель статьи

Для решения задач усталостной прочности практический интерес имеет распределение количества дефектов от их размера:  $n_i = f(l_i)$ . До настоящего времени основным способом получения такой кривой оставался эксперимент.

В настоящей статье ставится две задачи. Первая – показать, что зависимость  $n_i = f(l_i)$  может быть достаточно легко получена на основе принципа максимума энтропии. Вторая – описать динамику роста микротрещин, исходя из энергетического баланса процессов диссипации и разрыва связей в материале. Решение этих двух задач позволяет достичь *основной цели* – получить интегральные зависимости для характеристик усталостной прочности.

### Идея подхода

В работе [3] предложена идея – многие распределенные самоорганизованные системы, в том числе и микротрещины, рассматривать с единой точки зрения, а именно, с позиции того, что *на множестве некоторых «потребителей» распределяется некоторое ограниченное множество «ресурсов»* (в частности, на множестве микротрещин распределяется энергия разрушения). Причем, указанное распределение осуществляется не произвольно, а в соответствии с так называемым *«предельно-гиперболическим законом распределения»*, выведенным в [3] на основе энтропийного принципа. Свои материалы по данной теме авторы впервые опубликовали в мае 2012 года на Международной конференции «ISDMCI '2012» в г. Евпатория [4].

Этот подход позволяет с единой позиции подойти к объяснению такого известного феномена как негауссов (степенной) характер распределения во многих, очень разных по своей природе системах или сообществах. В обзорной статье [5] приведено более десятка различных подходов, для объяснения механизма возникновения негауссова характера распределения.

Используемый тут энтропийный принцип можно эффективно применять для исследования сложных трудно-формализуемых систем. В его основе лежит понимание того, что некая распределенная величина, характеризующая состояние системы (в нашем случае – это энергия образования дефектов), распределяется внутри этой системы наиболее вероятным образом. Следовательно, энтропия этого распределения достигает своего максимального значения. Максимум энтропии выступает *интегральным критерием*, когда из множества возможных вариантов система реализуется именно в данной конфигурации.

В [1] приведены эмпирические зависимости количества усталостных дефектов от их размеров, отмечается их негауссов характер, а также наличие свойства автомодельности. Один из примеров приведен на рисунке (рис. 2).

В настоящей статье показано, что степенной (гиперболический) характер этих опытных кривых можно вывести на основе упомянутого выше подхода.

### Распределение размеров микротрещин

При действии знакопеременной нагрузки часть энергии  $W$  расходуется на образование усталостных дефектов. Их общее количество  $N$  можно разбить на  $M$  классов, каждый из которых состоит из  $n_i$  представителей, потребляющих одинаковое количество энергии, равное  $\epsilon_i$ . При таких обозначениях очевидны равенства:

$$\sum_{i=1}^M n_i = N, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^M n_i \epsilon_i = W. \tag{2}$$

Если принять, что энергия образования микротрещины  $\epsilon_i$  пропорциональна некоторой положительной степени  $\gamma$  ее размера  $l_i$ .

$$\epsilon_i = \eta \cdot l_i^\gamma, \tag{3}$$

то выражение (2) получит вид:

$$\eta \cdot \sum_{i=1}^M n_i \cdot l_i^\gamma = W. \tag{4}$$

Решение задачи нахождения  $n_i = f(l_i)$  сводится к поиску распределения количества дефектов по величине энергии их образования  $n_i = \phi(\epsilon_i)$ . В соответствии с энтропийным принципом эта зависимость сформируется такой, что по всем выделенным  $M$  классам дефектов распределение энергии  $W_i = n_i \cdot \epsilon_i$  осуществится с максимальной экспансией, а значит, будет достигнут условный максимум энтропии. С этой целью удобно использовать энтропию Шеннона:

$$H = - \sum_{i=1}^M p_i \cdot \ln(p_i). \tag{5}$$

Здесь  $p_i$  – частота (вероятность) появления  $i$ -го исхода. В случае распределения энергии  $W_i = n_i \cdot \epsilon_i$  по классам она равна  $p_i = \frac{n_i \cdot \epsilon_i}{W}$ .

Таким образом, искомое распределение  $n_i = f(\epsilon_i)$  получим как результат решения задачи на условный максимум энтропии, записанной в следующем виде:

$$H_E(n_i) = - \sum_{i=1}^M \frac{n_i \cdot \epsilon_i}{W} \cdot \ln \frac{n_i \cdot \epsilon_i}{W}, \tag{6}$$

где в качестве условий выступают требования (1) и (2).

Для определения условного экстремума используем метод множителей Лагранжа. Известно, если в качестве исследуемой функции выступает энтропия, этот подход иногда называют формализмом Джейнса-Гиббса. Его суть состоит в том, что для достижения *условного* максимума  $H_E(n_i)$ , достаточно решить задачу нахождения *безусловного* экстремума новой функции  $\Phi(n_i)$ , которая аддитивно включает  $H$ , а также уравнения связи (1) и (2), взвешенные множителями Лагранжа  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\Phi(n_i) = -\sum_{i=1}^M \frac{n_i \cdot \epsilon_i}{W} \cdot \ln \frac{n_i \cdot \epsilon_i}{W} + \alpha \cdot \left( \sum_{i=1}^M \frac{n_i}{W} - \frac{N}{W} \right) + \beta \cdot \left( \sum_{i=1}^M \frac{n_i \cdot \epsilon_i}{W} - 1 \right) \tag{7}$$

Приравняв к нулю частные производные:

$$\frac{\partial \Phi(n_i)}{\partial n_i} = -\frac{\epsilon_i}{W} \cdot \ln \frac{n_i \cdot \epsilon_i}{W} - \frac{\epsilon_i}{W} + \alpha \cdot \frac{1}{W} + \beta \cdot \frac{\epsilon_i}{W} = 0,$$

получим приводящее к экстремуму (7) распределение:

$$n_i = \frac{C_1}{\epsilon_i} \cdot \exp\left(\frac{\alpha}{\epsilon_i}\right), \tag{8}$$

где  $C_1 = W \cdot \exp(\beta - 1)$ .

Физический смысл множителя  $\alpha$  становится ясным после определения экстремума функции  $n_i = f(\epsilon_i)$ , задаваемого формулой (8). Проще найти экстремум соответствующего ему непрерывного распределения  $n = \phi(\epsilon)$ , которое получается при  $M \rightarrow \infty$ . Из условия  $\frac{dn}{d\epsilon} = 0$  следует  $\alpha = -\epsilon_*$ , а константа  $C_1 = n_* \cdot \epsilon_* \cdot e$ . Здесь  $e \approx 2.718$ , а  $\epsilon_*$  и  $n_*$  – координаты точки, в которой распределение (8) достигает максимума.

В итоге распределения  $n_i = \phi(\epsilon_i)$ , можно записать:

$$\frac{n_i}{n_*} = \frac{\epsilon_*}{\epsilon_i} \cdot \exp\left(1 - \frac{\epsilon_*}{\epsilon_i}\right). \tag{9}$$

Ниже (рис. 1) приведены ее графики.

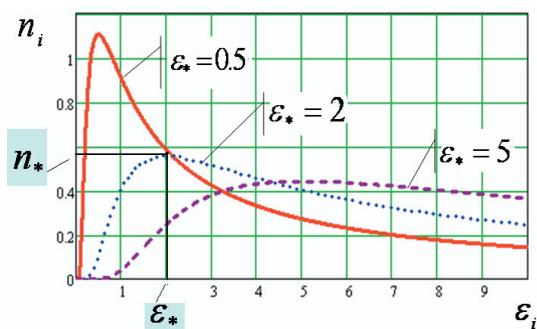


Рис. 1. Предельно гиперболический закон распределения (ПГР)

Так как с ростом аргумента  $\epsilon_i$  влияние экспоненциального множителя в выражении (9) практически

нивелируется, то оно асимптотически приближается к степенной (гиперболической) зависимости:

$$n_i = \frac{n_* \cdot \epsilon_* \cdot e}{\epsilon_i} = \frac{C_1}{\epsilon_i}. \tag{10}$$

Поэтому в [3] соотношение (9) названо *предельно гиперболическим законом распределения (ПГР)*. В этой же работе приведены формулы для вычисления входящих в (9) параметров  $n_*$  и  $\epsilon_*$ .

В [3] авторы настаивают на своей точке зрения, что именно предельно гиперболический закон распределения *обладает универсальностью проявления*, а не степенной (гиперболический). Отклонение от чистой гиперболы может быть для опыта практически не заметным в тех случаях, когда значение параметра  $\epsilon_*$  слишком мало. Это имеет место при достаточно большом количестве «носителей» и не очень большом объеме распределяющегося «ресурса».

Замечательно, что такой же результат можно получить, записав выражение для энтропии в форме, предложенной Хартли:

$$S = g \cdot \ln G. \tag{11}$$

Здесь  $g$  – множитель, учитывающий размерность, а  $G$  – статистический вес, характеризующий число возможных перестановок различных порций энергии  $\epsilon_i = \Delta\epsilon \cdot i$ , за исключением количества тривиальных комбинаций внутри каждого класса:

$$G = \frac{(\sum_{i=1}^M n_i \cdot i)!}{\prod_{i=1}^M (n_i \cdot i)!} = \frac{I!}{\prod_{i=1}^M (n_i \cdot i)!}. \tag{12}$$

Применив известную формулу Стирлинга

$$\ln I! \approx I \cdot (\ln I - 1), \tag{13}$$

выражение (11) можно записать в виде:

$$S = g \cdot \left[ I \cdot (\ln I - 1) - \sum_{i=1}^M (n_i \cdot i \cdot (\ln(n_i \cdot i) - 1)) \right],$$

или

$$S = g \cdot \left[ I \cdot \ln I - \sum_{i=1}^M n_i \cdot i \cdot \ln(n_i \cdot i) \right].$$

Условный максимум энтропии  $S$  определим, находя распределение  $n_i$ , по аналогии с (7) приводящее к экстремуму функцию:

$$\Psi(n_i) = -g \sum_{i=1}^M \frac{n_i \cdot i}{I} \cdot \ln\left(\frac{n_i \cdot i}{I}\right) + \vartheta \cdot \frac{N}{I} \left( \sum_{i=1}^M \frac{n_i}{N} - 1 \right) + \eta \cdot \left( \sum_{i=1}^M \frac{n_i \cdot i}{I} - 1 \right).$$

Ее решением является

$$n_i = \frac{C_2}{i} \cdot \exp\left(\frac{\vartheta/g}{i}\right) = \frac{\Delta\epsilon \cdot C_2}{\Delta\epsilon \cdot i} \cdot \exp\left(\frac{\Delta\epsilon \cdot \vartheta/g}{\Delta\epsilon \cdot i}\right) = \frac{C_1}{\epsilon_i} \cdot \exp\left(\frac{\alpha}{\epsilon_i}\right),$$

что совпадает с выражением (8).

Такая независимость результата от формы энтропии весьма примечательна и свидетельствует о справедливости самой идеи использования энтропийного принципа для описания многих трудно-формализуемых задач.

Распределение количества дефектов  $n_i$  от их размера  $l_i$  можно получить, подставив выражение (3), связывающее размер дефекта с энергией его образования  $\varepsilon_i = \eta \cdot l_i^\gamma$  в (14). Получим искомое распределение:

$$n_i = n_* \cdot \left(\frac{l_i}{l_*}\right)^\gamma \exp\left(1 - \left(\frac{l_i}{l_*}\right)^\gamma\right), \quad (14)$$

где  $l_*$  и  $n_*$  – координаты точки экстремума этой кривой.

На рис. 2 приведены эмпирические данные распределения усталостных дефектов, заимствованные из [1]. Расчеты по формуле (14) достаточно хорошо согласуются с этими кривыми (рис. 3).

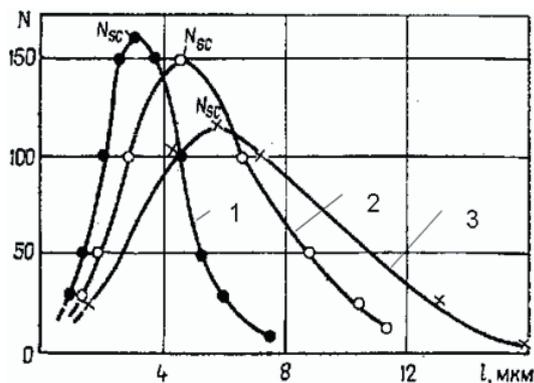


Рис. 2. Пример эмпирических кривых распределения дефектов [1]

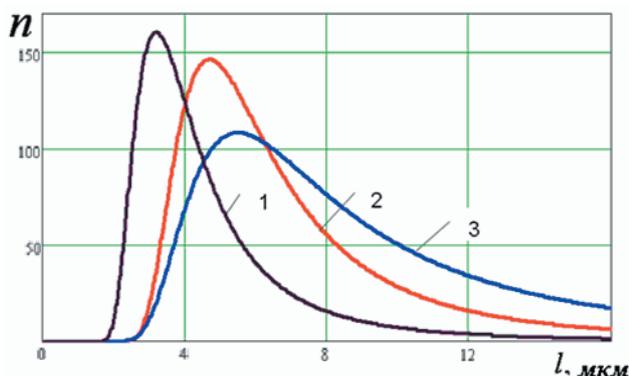


Рис. 3. Расчеты по формуле (14)

В работе [1] приведены распределения численности дефектов от их размера для различных способов нагружения, разных материалов и разных видов деформации. Практически все результаты имеют вид, похожий на кривые рис. 2. Они обладают ярко выраженным экстремумом, а их ниспадающие ветви имеют гиперболический вид. Физическое понимание такого характера становится ясным лишь в рамках предложенного в [3] предельно гиперболического закона. Оказывается,

именно этот вид кривой позволяет микротрещинам «распределить между собой» поглощенную энергию самым рациональным способом.

### Развитие микротрещин

В результате многих экспериментальных исследований (например, [6,7,8]), появилось понимание того, что развитие усталостных разрушений тесно связано с процессом пластической деформации материала на краях этих дефектов. С одной стороны, такая зоны локализованной пластичности «готовит почву» для роста размера микротрещины, а с другой стороны – она же является главным потребителем той части поступающей извне энергии, которая определяется как энергия диссипации.

Как показали измерения [7,8], проведенные методом инфракрасной термографии, наиболее интенсивное выделение тепла происходит именно на границе трещин.

Данный факт позволяет предположить, что энергия диссипации пропорциональна размеру пластической зоны. Исходя из этого предположения, а также используя результаты, полученные в предыдущем разделе статьи, построим приближенную «энергетическую» модель развития усталостных микротрещин.

Рассмотрим простейший случай продольного циклического нагружения (растяжение – сжатие) стержня постоянного сечения  $S$ . Считаем, что микротрещины, распределены по всему сечению стержня. Они имеют плоскую форму (форму лужиц разной площади), и ориентированы перпендикулярно действующей нагрузке. Условно выделим некоторый, заключенный между двумя поперечными сечениями, малый участок стержня протяженностью  $x$ , который в процессе циклического нагружения испытывает деформацию с амплитудой, равной  $\Delta x_{\max}$ . В продолжение одного цикла, где  $k$  – его номер, объем этого участка  $\delta V = x \cdot S$  воспринимает энергию:

$$W_k = \bar{W}_k \cdot \delta V,$$

где  $\bar{W}_k$  – удельная энергия деформации. Для нашей простой схемы она равна:

$$\bar{W}_k = E \cdot \left(\frac{\Delta x_{\max}}{x}\right)^2 = E \cdot \bar{\Delta}_{\max}^2. \quad (15)$$

Здесь  $E$  – модуль Юнга,  $\bar{\Delta}_{\max}$  – амплитудное значение относительной деформации (часто обозначают как  $\varepsilon_{\max}$ , но в нашей статье этот символ уже зарезервирован для порций энергии).

Будем считать, что для всех циклов характер нагрузки не меняется, поэтому  $W_k = W = \text{const}$ . Часть этой энергии:

$$\tilde{W} = q \cdot W = q \cdot E \cdot \bar{\Delta}_{\max}^2 \cdot \delta V \quad (16)$$

не возвращается назад во внешнюю среду в виде работы упругих сил, а остается в материале. Это есть поглощаемая энергия ( $q$  – ее доля от общей энергии деформации). Одна из ее составляющих расходуется

на разрыв межкристаллических связей  $\tilde{W}_{(break)}$ , другая – на диссипацию в пластической зоне  $\tilde{W}_{(diss)}$ :

$$\tilde{W} = \tilde{W}_{(break)} + \tilde{W}_{(diss)}. \tag{17}$$

Используя схему, принятую в начале статьи (2), можно записать:

$$\tilde{W} = \sum_{i=1}^M n_i \epsilon_i = \sum_{i=1}^M n_i \epsilon_{i(break)} + \sum_{i=1}^M n_i \epsilon_{i(diss)}, \tag{18}$$

где  $n_i$  – количество дефектов в  $i$ -м классе. Для микротрещины отдельного  $i$ -го класса:

$$\epsilon_{ik} = \epsilon_{ik(break)} + \epsilon_{ik(diss)}. \tag{19}$$

Здесь  $\epsilon_{ik}$  – энергия, поглощаемая на одном  $k$ -м цикле одной микротрещиной  $i$ -го класса. Одна ее часть  $\epsilon_{ik(break)}$  идет на разрушение межкристаллических связей, вторая –  $\epsilon_{ik(diss)}$  превращается в тепло в зоне пластичности. Важно понимать, что постоянство  $\epsilon_{ik}$  для каждого цикла (его величина *по определению* зависит только от  $\tilde{W}$  и выбранного количества классов  $M$ ) не означает, что и его отдельные слагаемые в формуле (19) от цикла к циклу тоже будут сохраняться. На самом деле, по мере увеличения площади микротрещины происходит процесс постепенного перераспределения энергии  $\epsilon_{ik}$  от первого слагаемого  $\epsilon_{ik(break)}$  ко второму  $\epsilon_{ik(diss)}$ , что обусловлено ростом протяженности зоны пластичности. Этот механизм смоделирован ниже.

Чтобы далее использовать формулу баланса энергии (19), примем два определяющие дальнейшую схему, предположения:

а) *приращение площади микротрещины  $i$ -го класса  $\Delta S_{ik}$  пропорционально получаемой ею энергии, идущей на разрыв межкристаллических связей:*

$$\Delta S_{ik} = \lambda \cdot \epsilon_{ik(break)}, \tag{20}$$

(это оправдано тем, что на единицу площади приходится равное количество этих связей).

б) *энергия диссипации  $\epsilon_{ik(diss)}$  (второе слагаемое в (19)), пропорциональна размеру (протяженности) пластической зоны трещины  $l_{ik}$ , накопленной после  $k$  циклов нагружения:*

$$\epsilon_{ik(diss)} = \mu' \cdot l_{ik}. \tag{21}$$

Аргументы в пользу этой гипотезы приведены в начале раздела.

Физический смысл множителей:  $\lambda$  – приращение площади разрыва микротрещины, при сообщении ей единичной энергии;  $\mu'$  – энергия диссипации, которая поглощается в пластической зоне участком единичной длины.

Периметр  $l_{ik}$  плоских микротрещин связан квадратичной зависимостью с площадью  $\sum_{j=1}^k \Delta S_{ij}$ , накопленной за  $k$  циклов нагружения:

$$l_{ik} = a \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^k \Delta S_{ij}}. \tag{22}$$

Для плоских трещин, имеющих круглую форму в плане,  $a = 2 \cdot \sqrt{\pi}$ .

С учетом этих допущений выражение (19) примет вид:

$$\epsilon_{ik} = \frac{1}{\lambda} \cdot \Delta S_{ik} + \mu' \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^k \Delta S_{ij}}. \tag{23}$$

Здесь принято новое обозначение:  $\mu = \mu' \cdot a$ .

Выражение (23) представляет собой исходную зависимость для дальнейшего вычисления интересующих нас параметров. Его можно рассматривать как дискретную запись нелинейного интегрального уравнения для приращения площади микротрещины  $i$ -го класса в зависимости от числа предшествующих  $k$  циклов нагружения. Проведем здесь некоторые преобразования.

Обозначим:

$$\sum_{j=1}^k \Delta S_{ij} = S_i(k).$$

Учитывая, что минимально возможное значение приращения  $\Delta k = 1$ , запишем:

$$\Delta S_{ik} = \frac{\Delta S_{ik}}{\Delta k} \cdot \Delta k = \frac{\Delta S_i(k)}{\Delta k} \cdot 1,$$

а также, ввиду ранее обусловленного постоянства  $\epsilon_{ik}$  при изменении  $k$ :

$$\epsilon_{ik} = \epsilon_i.$$

После этих обозначений уравнение (23) может быть переписано в виде:

$$\lambda \cdot \epsilon_i = V_i(k) + \lambda \cdot \mu \cdot \sqrt{S_i(k)}. \tag{24}$$

Здесь  $V(k)_i = \frac{\Delta S_i(k)}{\Delta k}$  – скорость роста микротрещины по числу циклов  $k$ .

Для оценки решения этого уравнения, изучим динамику поведения некоторого непрерывного его аналога. С этой целью взамен дискретной переменной  $k$  введем новую безразмерную непрерывную величину  $K$ . Тогда, вместо уравнения (24), запишем его непрерывное приближение:

$$S_i(K) = \frac{1}{(\lambda \cdot \mu)^2} \cdot (\lambda \cdot \epsilon_i - V_i(K))^2.$$

После дифференцирования получим:

$$\frac{dV_i(K)}{dK} \cdot \left( 1 - \frac{\lambda \cdot \epsilon_i}{V_i(K)} \right) = \frac{(\lambda \cdot \mu)^2}{2}. \tag{25}$$

Точное решение этого уравнения с учетом начальных условий:

$$\begin{aligned} S_i^0 &= S_i(K)|_{K=0} = 0, \\ V_i^{(0)} &= V_i(K)|_{K=0} = \lambda \cdot \epsilon_i, \end{aligned} \tag{26}$$

можно представить как:

$$\frac{e^{\bar{V}_i(K)}}{\bar{V}_i(K)} = e^{\frac{1+bK}{\epsilon_i}}, \quad (27)$$

где  $\bar{V}_i(K) = \frac{V_i(K)}{\lambda \cdot \epsilon_i}$ ,  $b = \frac{\lambda \cdot \mu^2}{2}$ .

Однако решение (27) имеет неявный вид. Чтобы выразить  $\bar{V}_i(K)$  в явном виде, разложим левую часть (27) в ряд. Малое значение величины  $\bar{V}_i(K)$  (изменяется в пределах  $0 < \bar{V}_i(K) \leq 1$ ), позволяет получить приемлемую точность, оставляя лишь первые два члена разложения. Приближенное решение для скорости роста микротрещины, удовлетворяющее граничным условиям, можно представить в виде:

$$V_i(K) \approx \frac{\lambda \cdot \epsilon_i}{e^{1+(b/\epsilon_i)K} - e + 1}. \quad (28)$$

На рис. 4 для сравнения приведены графики обратной зависимости  $K = f(\bar{V}_i)$ , соответствующие точному (27) и приближенному (28) решениям.

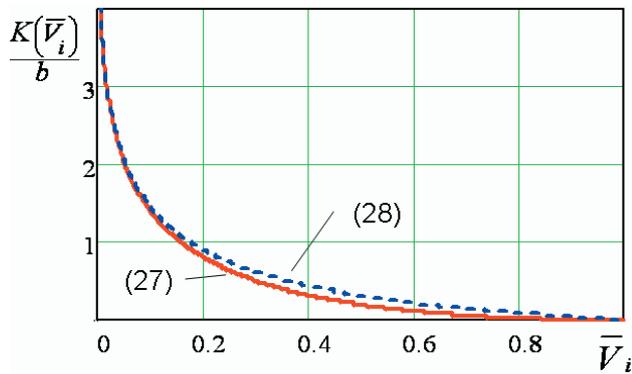


Рис. 4. Сравнение точного и приближенного решений, представленных формулами (27) и (28)

Площадь, заключенная под кривой численно равна накопленной площади микротрещины  $S_i(K)$ . Ее величину можно получить непосредственно из уравнения (25), подставив туда значение  $V_i(K)$  из (28):

$$S_i(K) = \left(\frac{\epsilon_i}{\mu}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{e^{1+(b/\epsilon_i)K} - e + 1}\right)^2. \quad (29)$$

Таким образом, имеем выражения (28) – для скорости, и (29) – для площади микротрещины в зависимости от числа циклов  $k = [K]$ , порции энергии  $\epsilon_i$ , величины  $\lambda$ , характеризующей прочность межкристаллических связей, а также параметра  $\mu$ , характеризующего величину диссипации энергии в зоне пластичности.

Видно, что при неограниченном увеличении количества циклов площадь микротрещины стремится к значению:

$$S_i^\infty = \lim_{K \rightarrow \infty} S_i(K) = \left(\frac{\epsilon_i}{\mu}\right)^2. \quad (30)$$

С учетом (30) выражение (29) можно представить в виде относительной площади (рис. 5):

$$\bar{S}_i(K) = \frac{S_i(K)}{S_i^\infty} = \left(1 - \frac{\frac{1}{e}}{e^{1+(b/\epsilon_i)K} - 1 + \frac{1}{e}}\right)^2. \quad (31)$$

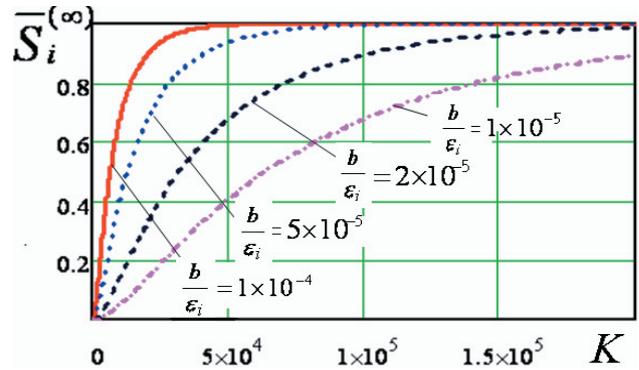


Рис. 5. Зависимость относительной площади микротрещины  $\bar{S}_i(k) = \frac{S_i(k)}{S_i^\infty}$  от числа циклов

Анализ результатов, позволяет получить некоторые заключения. Так, из (30) следует, что максимальная площадь, которую может развить микротрещина  $S_i^\infty$ , пропорциональна квадрату порции энергии, получаемой ею в течение каждого цикла нагружения, и обратно пропорциональна квадрату параметра диссипации.

Из рис. 5 видно, что с уменьшением отношения  $b/\epsilon_i$  трещина растет в продолжение большего количества циклов.

### Усталостная кривая

В соответствие с принятой выше схемой, рассмотрим очень короткий участок стержня – такой, что заполняющие его плоские микротрещины расположены лишь в один слой перпендикулярно оси действия нагрузки. В нашей расчетной схеме будем считать, что все они расположены в одном сечении. Из формулы (29) для всех этих  $N$  микротрещин можно вычислить их общую площадь  $S_\Sigma(K)$ . Для этого просуммируем  $S_i(K)$  по числу всех  $n_i$  представителей каждого из  $M$  классов (смотри начало статьи):

$$S_\Sigma(K) = \sum_{i=1}^M n_i \cdot S_i(K). \quad (32)$$

Используя решение (29), получим:

$$S_\Sigma(K) = \frac{1}{\mu^2} \sum_{i=1}^M n_i \cdot \epsilon_i^2 \cdot \left(1 - \frac{\frac{1}{e}}{e^{(b/\epsilon_i)K} - 1 + \frac{1}{e}}\right)^2. \quad (33)$$

Для практического использования этой формулы требуется информация о распределении количества микротрещин  $n_i$  по  $M$  классам. Такое распределение, как показано в начале этой статьи, подчиняется предельно-гиперболическому закону (9). Подставив (9) в (33), можно получить зависимость, позволяющую определить  $S_\Sigma(K)$  численно.

Для получения аналитической формулы расчета  $S_{\Sigma}(K)$  можно в первом приближении принять, что размеры всех микротрещин примерно равны.

При этом  $M=1$ ,  $n_i = n=1$ ,  $\epsilon_i = \epsilon = \frac{\tilde{W}}{N}$ . Используя формулу (16), определим

$$\epsilon = \frac{\tilde{W}}{N} = \left( \frac{q}{N/\Delta V} \right) \cdot E \cdot \bar{\Delta}_{\max}^2, \tag{34}$$

где  $N$  – число микротрещин в выделенном объеме  $\Delta V$ .

Тогда из (31) следует:

$$S_{\Sigma}(K) = \left( \frac{E \cdot \bar{\Delta}_{\max}^2}{\Psi} \right)^2 \cdot \left[ 1 - \frac{1/e}{e^{\frac{\Psi \cdot \lambda \cdot \mu}{E \cdot \bar{\Delta}_{\max}^2} K} - 1 + 1/e} \right]^2, \tag{35}$$

Здесь вводится новая величина:

$$\Psi = \frac{\mu \cdot N / \Delta V}{q}. \tag{36}$$

Назовем ее *показатель поглощаемости энергии деформации*.

Размерность этой величины – [Дж/м<sup>4</sup>]. Обоснованность названия следует из анализа (36). Сюда входит диссипативный множитель  $\mu = \mu' \cdot a$  ( $\mu'$  – из (21), а – из (22), коэффициент  $q$  – из (16), а также  $N/\Delta V$  – объемная плотность дефектов в материале).

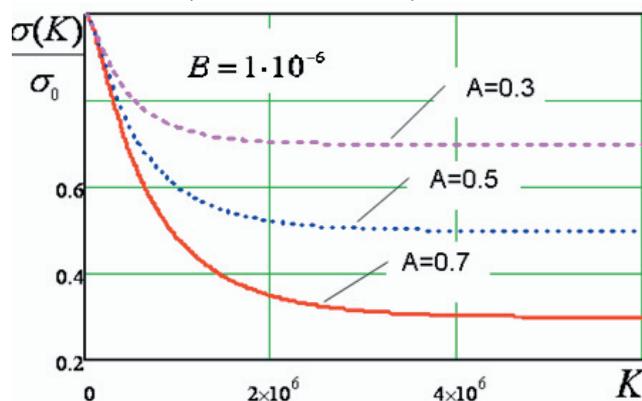
При неограниченном возрастании  $K$  выражение в скобках стремится к единице, следовательно, из выражения (35) получим:

$$S_{\Sigma}^{(\infty)} = \lim_{K \rightarrow \infty} S_{\Sigma}(K) = \left( \frac{E \cdot \bar{\Delta}_{\max}^2}{\Psi} \right)^2. \tag{37}$$

Величина  $S_{\Sigma}^{(\infty)}$  – есть асимптотическое значение площади всех  $N$  микротрещин сечения стержня при неограниченном росте  $K$ .

В итоге аналитическая формула для оценки величины накопленной площади микротрещин в данном сечении стержня выглядит так

$$S_{\Sigma}(K) = S_{\Sigma}^{(\infty)} \cdot \left[ 1 - \frac{1/e}{e^{\left( \frac{\lambda \cdot \mu}{2 \cdot \sqrt{S_{\Sigma}^{(\infty)}}} \right) K} - 1 + 1/e} \right]^2. \tag{38}$$



Специально оговорим, что переход от дискретной переменной  $k$  к непрерывной величине  $K$  (смотри (25)), можно рассматривать, как технический прием, который, начиная с определенного количества циклов  $k$ , уже не влияет на результат. Поэтому в полученных здесь конечных выражениях величину  $K$  можно смело трактовать как количество циклов.

По мере накопления повреждений, несущие свойства стержня снижаются. Это происходит из-за уменьшения его эффективной площади сечения на величину накопленной площади микротрещин  $S_{\Sigma}(K)$ . Оценку допустимого напряжения  $\sigma(K)$ , которое стержень выдерживает после  $K$  циклов, можно осуществить с помощью пропорции:

$$\frac{\sigma(K)}{S - S_{\Sigma}} = \frac{\sigma_0}{S}, \text{ или } \sigma(K) = \sigma_0 \cdot \left( 1 - \frac{S_{\Sigma}(K)}{S} \right), \tag{39}$$

где  $\sigma_0$  – допустимое напряжение до начала действия циклической нагрузки,  $S$  – площадь сечения. Подставляя сюда значение  $S_{\Sigma}(K)$  из (37), получим оценочную аналитическую формулу усталостной кривой для осевого нагружения стержня:

$$\sigma(K) = \sigma_0 \cdot \left[ 1 - A \cdot \left( 1 - \frac{1/e}{e^{(B/\sqrt{A})K} - 1 + 1/e} \right)^2 \right], \tag{40}$$

где  $A = \frac{S_{\Sigma}^{(\infty)}}{S} = \frac{1}{S} \cdot \left( \frac{E \cdot \bar{\Delta}_{\max}^2}{\Psi} \right)^2$ ,

$$B = \frac{\lambda \cdot \mu}{2\sqrt{S}}, \quad e \approx 2.718.$$

Безразмерные параметры  $A$  и  $B$  теоретически могут меняться в пределах (0; 1).

Числовое значение параметра  $\Psi$  можно определить из (40), если известно значение предела выносливости  $\sigma^{(\infty)} = \sigma(K)|_{K \rightarrow \infty}$ :

$$\Psi = \frac{E \cdot \bar{\Delta}_{\max}^2}{\sqrt{S \cdot (1 - \sigma^{(\infty)} / \sigma_0)}}.$$

Ниже (рис. 6) приведены расчеты  $\sigma(K)$  при изменении параметров  $A$  и  $B$ .

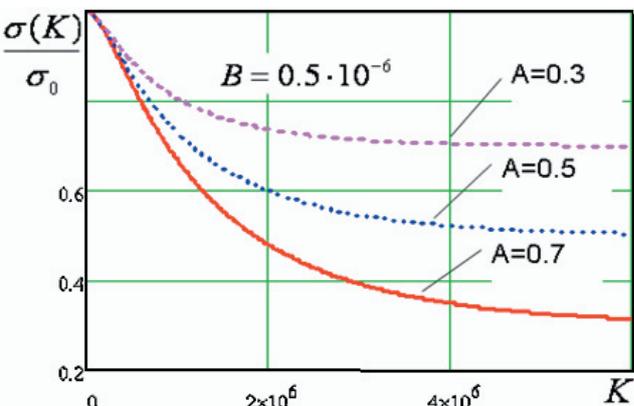


Рис. 6. Влияние параметров  $A$  и  $B$  на вид усталостной кривой

Зависимость (40), по которой построены эти кривые, позволяет оценить влияние на характер усталостной кривой целого ряда факторов.

---

### Выводы

---

В статье получены два основных результата. Первый результат – зависимость (9) для распределения числа микротрещин от поглощенной энергии деформации  $n_i(\epsilon_i)$ . Данная зависимость получена на основании вариационного принципа максимума энтропии, и носит гиперболический характер с быстро убывающим экспоненциальным множителем. Авторы назвали ее *предельно гиперболическим законом распределения*. Данный закон объясняет известный феномен негауссово характера эмпирических кривых.

Второй результат – вывод соотношений (28) и (29) для скорости роста  $V_i(K)$  и накопленной площади микротрещин  $S_i(K)$ , исходя из понимания энергетического баланса, который формируется в процессе их развития.

Эти два результата позволяют рассчитать (39) усталостную кривую  $\sigma(K)$ .

Авторы отдают себе отчет, что приведенные расчеты носят лишь оценочный характер. Полученные результаты являются итоговым отражением тех предположений о характере энергетического баланса, который был принят в настоящей статье. Все же ценность этих результатов, на наш взгляд, состоит в том, что отталкиваясь от ясных феноменологических положений, удалось получить оценки для важных величин, которые в настоящее время определяются, как правило, только эмпирически.

---

### Литература

1. Ботвина Л.Р. Автомодельность накопления повреждаемости [Текст] / Г.И. Баренблатт // Пробл. Прочности. – 1985. – №12. – С. 17–24.
2. Хорошун Л.П. Основы микромеханики повреждаемости материала. 1. Кратковременная повреждаемость // Прикл. механика. – 1998. – 34, № 10. – С. 120 – 127.
3. Делас Н.И. Предельно гиперболический закон распределения в самоорганизованных системах [Текст] / Н.И. Делас, В.А. Касьянов // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2012. – №4/4 – С. 13–18.
4. Делас Н.И. Предельно гиперболический закон распределения [Текст] / Н.И. Делас, В.А. Касьянов // Сборник научных трудов Международной научной конференции «ISDMCF2012», Евпатория – 2012. – С.67-68.
5. Делас Н.И. Негауссово распределение как свойство сложных систем, организованных по типу ценозов [Текст] / Н.И. Делас, В.А. Касьянов // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2012. – №3/4 – С. 27–32.
6. Шанявский А.А. Безопасное усталостное разрушение элементов авиаконструкций. Синергетика в инженерных приложениях [Текст]. – Уфа, 2003. – 803 с.
7. Банников М.В. Экспериментальное исследование особенностей процесса генерации тепла в вершине усталостной трещины [Текст] / А.И. Терехина, О.А. Плехов // Вестник ПГТУ. Механика. – Пермь: Изд-во Перм. Гос. Техн. Ун-та, 2011. – №2. – С. 14 – 27.
8. Плехов О.А. Теоретическое и экспериментальное исследование диссипации энергии в процессе локализации деформации в железе [Текст] / О.Б. Неймарк // ПМТФ. – 2009. – Т.50, вып.1. – С. 153 – 164.

### Abstract

*The dependence is deduced on the basis of the maximum entropy method, to distribute the number of fatigue microcracks according to the category of absorbed energy. The ratio obtained is non-Gaussian and is called “The ultimately hyperbolic distribution law”, which becomes asymptotically hyperbolic with the growth of argument. That plot allows the microcracks to “distribute” the absorbed energy in the most reasonable way. The energy balance for the microcrack’s absorbed energy is made out, proceeding from the supposition that the increase of its area is in proportion to the gap energy of intercrystalline links, and the dissipation energy in the plasticity area is in proportion to the size of its borders. This gave an opportunity to obtain the ratios for the growth indicators of microcrack’s area. These results and taking account of microcracks’ distribution according to the categories of absorbed energy, help to get the evaluation formula for the fatigue plot*

*Keywords: hyperbolic distribution, microcracks’ distribution, microcracks velocity, fatigue plot formula*