

ds the interaction features of the butt-end stream with the most power sated vortex formation defining the general structure of the current in dead-end and flowing (active) parts of the vortex chamber are shown. It is shown that conjunction by directions of the control streaming flow and the powerful coherent vortex gives steady oscillated circular rotation of the flow on inside wall along the chamber axis. Opposite direction of the dead-end control streaming flow leads to formation of quasi-tornado vortex pair on chamber wall. Results of the investigation are of great interest for designers of the vortex chambers in power, metallurgical, chemistry engineering, aircraft industry etc

Keywords: experimental research, heat and mass transfer control, coherent vortical structures, vortex chamber, control streaming flow, quasi-tornado vortex pair

На основі уточнених рівнянь [2] розглядаються поперечні переміщення, що виникають у напівнескінченному стержні поблизу фронту нестационарної поєздовжньої хвилі під дією раптового поєздовжнього зусилля. Побудовані графіки розподілення поперечного переміщення по стержню. На відміну від класичної картини ступінчатої зміни поперечного перерізу стержня під дією раптового навантаження, отримана картина плавної зміни розмірів перерізу

Ключові слова: асимптотико-груповий, поперечні переміщення, поєздовжнє зусилля, поєздовжня хвиля

На основе уточненных уравнений [2] рассматриваются поперечные перемещения, возникающие в полубесконечном стержне вблизи фронта нестационарной продольной волны под действием внезапного продольного усилия. Построены графики распределения поперечного перемещения по стержню. В отличие от классической картины ступенчатого изменения поперечного сечения стержня под действием внезапной нагрузки, получена картина плавного изменения размеров поперечного сечения.

Ключевые слова: асимптотико-групповой, поперечные перемещения, продольное усилие, продольная волна

УДК 539.3

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В СТЕРЖНЕ ПРИ ВНЕЗАПНОЙ ПРОДОЛЬНОЙ НАГРУЗКЕ

А. Д. Шамровский

Доктор технических наук, профессор
Кафедра программного обеспечения
автоматизированных систем*

Л. Н. Егармина

Старший преподаватель
Кафедра высшей и прикладной математики*
E-mail: neverojatnonofakt@rambler.ru

*Запорожская государственная инженерная академия
пр. Ленина, 226, г. Запорожье, Украина, 69006

1. Введение

Ранее в работах [1,2] было показано, как с помощью метода асимптотико-группового анализа получать динамические уравнения деформации стержня из трехмерных динамических уравнений теории упругости. В результате данных исследований получены и решены новые уточненные динамические уравнения продольной деформации стержня [2]. В данной работе, рассмотрен важный эффект возникающий во время распространения продольной волны, однако не учитываемый в классическом случае – поперечные перемещения.

Описаны решения для случая поперечного перемещения W . Приведены уточненные графики распределения W в стержне.

2. Уточненные динамические уравнения продольной деформации стержня

В соответствии с [2], для случая отсутствия нагрузок на боковых поверхностях стержня, уточненные динамические уравнения продольной деформации стержня принимают вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0 \quad (1)$$

$$V + c \frac{\partial u}{\partial x} + cW + \frac{1}{8} \left(\frac{h_2}{h_3} \right)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2} = 0$$

$$W + c \frac{\partial u}{\partial x} + cV + \frac{1}{8} \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} = 0,$$

$$P = \frac{\partial u}{\partial x} + cV + cW .$$

Здесь величина τ – безразмерное время,

$$W = \frac{u_3}{h_3}, V = \frac{u_2}{h_2} \text{ поперечные перемещения,}$$

h_2, h_3 поперечные размеры стержня.

Остальные обозначения являются общепринятыми.

Уравнения (1) имеют более сложную структуру, чем обычные уравнения продольных колебаний стержня. В работе [2] показано подробное исследование данных уравнений с помощью метода асимптотико-группового анализа.

В результате из уравнений (1) получаем упрощенные уравнения (2):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0, c \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{8} \left(\frac{h_2}{h_3} \right)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2} = 0 \tag{2}$$

$$c \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{8} \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} = 0, P = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Полученное упрощение отвечает быстрым изменениям по аргументам x и τ ; размерной скорости распространения продольных волн в трехмерной упругой среде (скорости распространения возмущений согласно трехмерным динамическим уравнениям теории упругости); а также включает в себя нестандартные величины, отвечающие за поперечные колебания стержня V и W .

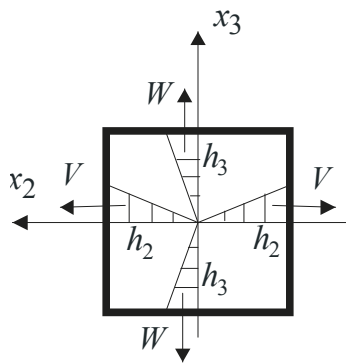


Рис. 1. Распределение перемещений по поперечному сечению стержня

Обратим внимание на то, что в классическом случае поперечные перемещения точек сечения были второстепенными и находились по необходимости, после нахождения главного продольного перемещения u . В данном случае эти же поперечные перемещения играют важную роль и находятся одновременно с u . На рис. 1 отражено соответствующее распределение поперечных перемещений.

3. Нахождение W

Покажем, как получать решения уравнений (2). Как уже было сказано ранее, упрощения (2) отвечают

быстрым изменениям по x и τ . В этом случае первого приближения недостаточно для получения достоверных результатов.

Необходимо строить процедуру последовательных приближений. Представим искомые функции в виде рядов:

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} u_i, V = \sum_{i=1}^{\infty} V_i, W = \sum_{i=1}^{\infty} W_i, P = \sum_{i=1}^{\infty} P_i . \tag{3}$$

В соответствии методикой упрощения уравнений (1) [2], члены этих рядов отвечают следующей рекуррентной системе уравнений:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + c \left(\frac{\partial V_{i-1}}{\partial x} + \frac{\partial W_{i-1}}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 u_i}{\partial \tau^2} = 0 \tag{4}$$

$$V_{i-1} + c \frac{\partial u_i}{\partial x} + cW_{i-1} + \frac{1}{8} \left(\frac{h_2}{h_3} \right)^2 \frac{\partial^2 V_i}{\partial \tau^2} = 0$$

$$W_{i-1} + c \frac{\partial u_i}{\partial x} + cV_{i-1} + \frac{1}{8} \frac{\partial^2 W_i}{\partial \tau^2} = 0$$

$$P_i = \frac{\partial u_i}{\partial x} + cV_{i-1} + cW_{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots)$$

Тогда решение для произвольного приближения будет иметь вид:

$$u_i = \sum_{j=1}^i u_{ij} x^{i-j} (\tau - x)^{\gamma+i+j-1}, \quad P_i = \sum_{j=1}^i P_{ij} x^{i-j} (\tau - x)^{\gamma+i+j-2} \tag{5}$$

$$V_i = \sum_{j=1}^i V_{ij} x^{i-j} (\tau - x)^{\gamma+i+j}, \quad W_i = \sum_{j=1}^i W_{ij} x^{i-j} (\tau - x)^{\gamma+i+j}$$

Для получения выражений для вычисления входящих в выражения (5) коэффициентов нужно подставить (5) в (4).

Получаем окончательные выражения для величин $u_{i,j}$, $P_{i,j}$, $V_{i,j}$, $W_{i,j}$ в обобщенном виде:

$$u_{i,j-1} = \frac{1}{2(i-j+1)(\gamma+i+j-2)} \{ u_{i,j-2}(i-j+2)(i-j+1) + \tag{6}$$

$$+ c [V_{i-1,j-2}(i-j+1) - V_{i-1,j-1}(\gamma+i+j-2) + W_{i-1,j-2}(i-j+1) - W_{i-1,j-1}(\gamma+i+j-2)] \}$$

$$(i = 2, 3, \dots; j = 2, \dots, i)$$

$$V_{i,j} = - \frac{8}{(\gamma+i+j)(\gamma+i+j-1)} \left(\frac{h_3}{h_2} \right)^2 \{ V_{i-1,j-1} + cW_{i-1,j-1} + c [u_{i,j-1}(i-j+1) - u_{i,j}(\gamma+i+j-1)] \} \quad (i = 1, 2, \dots; j = 1, \dots, i)$$

$$W_{i,j} = - \frac{8}{(\gamma+i+j)(\gamma+i+j-1)} \{ W_{i-1,j-1} + cV_{i-1,j-1} + c [u_{i,j-1}(i-j+1) - u_{i,j}(\gamma+i+j-1)] \} \quad (i = 1, 2, \dots; j = 1, \dots, i)$$

$$P_{i,j} = u_{i,j-1}(i-j+1) - u_{i,j}(\gamma+i+j-1) + c(V_{i-1,j-1} + W_{i-1,j-1})$$

$$(i=1,2,\dots; j=1,\dots,i)$$

Осталось найти коэффициенты вида u_{ij} . Это константы интегрирования и их значения следует находить из граничных условий.

Учтем, что точка $x=\tau$ является фронтом волны, т.е. точкой, разделяющей возмущенную область $0 \leq x \leq \tau$ от невозмущенной области $x > \tau$ (области в которую волна еще не дошла). Также заметим, что с ростом времени фронт передвигается в положительном направлении оси x с безразмерной скоростью, равной единице.

Причем, при $\tau=0$ фронт совпадает с началом координат $x=0$, а полубесконечный стержень $x \geq 0$ весь находится в покое.

Собирая вышесказанное воедино, получаем нулевые начальные условия. Значит, точка $x=0$ излучает волну под действием какой-то нагрузки, приложенной в этой точке. В соответствии с (3) и (5) для продольного усилия имеем:

$$P = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^i P_{ij} x^{i-j} (\tau-x)^{\gamma+i+j-2}. \quad (7)$$

Подставим в это выражение $x=0$. Обратим внимание на следующее. При $i \neq j$ выражение x^{i-j} обращается в ноль при $x=0$. Соответственно, обращаются в ноль слагаемые в (7) при $i \neq j$. При $i=j$ получаем $x^0=1$.

Таким образом, при $x=0$ выражение (7) принимает вид:

$$P = \sum_{i=1}^{\infty} P_{i,i} (\tau-x)^{\gamma+2i-2}. \quad (8)$$

Это означает что нагрузку $F(t)$ на торце стержня $x=0$, как заданную функцию времени, следует разложить в степенной ряд вида:

$$F = \sum_{i=1}^{\infty} F_i \tau^{\gamma+2i-2}. \quad (9)$$

Для случая внезапно приложенной и остающейся в дальнейшем постоянной нагрузки $F=1$. В этом случае:

$$F_1=1, F_i=0 \ (i>1), \ \gamma=0 \quad (10)$$

Сравнение (9) и (8) дает:

$$P_{i,i} = F_i \ (i=1,2,\dots)$$

Из четвертого выражения (6) имеем:

$$F_i = P_{i,i} = u_{i,i-1} - u_{i,i}(\gamma+2i-1) + c(V_{i-1,i-1} + W_{i-1,i-1}) \ (i=1,2,\dots)$$

Отсюда:

$$u_{i,i} = \frac{u_{i,i-1} + c(V_{i-1,i-1} + W_{i-1,i-1}) - F_i}{\gamma+2i-1} \ (i=1,2,\dots) \quad (11)$$

Итак, мы получили рекуррентные формулы (6), (11). Эти формулы позволяют рассчитывать коэффициенты сумм (5) для следующего приближения по известным коэффициентам предыдущего приближения.

Во всех приближениях, то есть при любом значении i , расчет коэффициентов начинается с формулы (11). Причем при внезапно приложенной нагрузке нужно подставлять выражение (10).

Далее рассчитываются значения u_{ij} с помощью первой формулы (6) и значения V_{ij}, W_{ij}, P_{ij} с помощью остальных формул (6).

После нахождения всех коэффициентов рассчитываются значения W_i с помощью формул (5), а потом значения W с помощью (3). При этом расчеты производятся для фиксированного значения безразмерного времени τ , изменяя x в диапазоне $0 \leq x \leq \tau$ с некоторым небольшим шагом.

В результате можно наблюдать картину распределения поперечного перемещения по стержню (рис. 2-4).

Необходимо обратить внимание на то, что изменение размеров поперечного сечения стержня происходит не ступенчато, как получается в классическом случае, а плавно, начиная от фронта волны.

Также отметим, что полученная картина отображает случай достаточно большой безразмерной нагрузки $P=1$, что отвечает размерной нагрузке

$$F = \frac{EF(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

При меньшей нагрузке относительное изменение толщины стержня будет, соответственно, меньше.

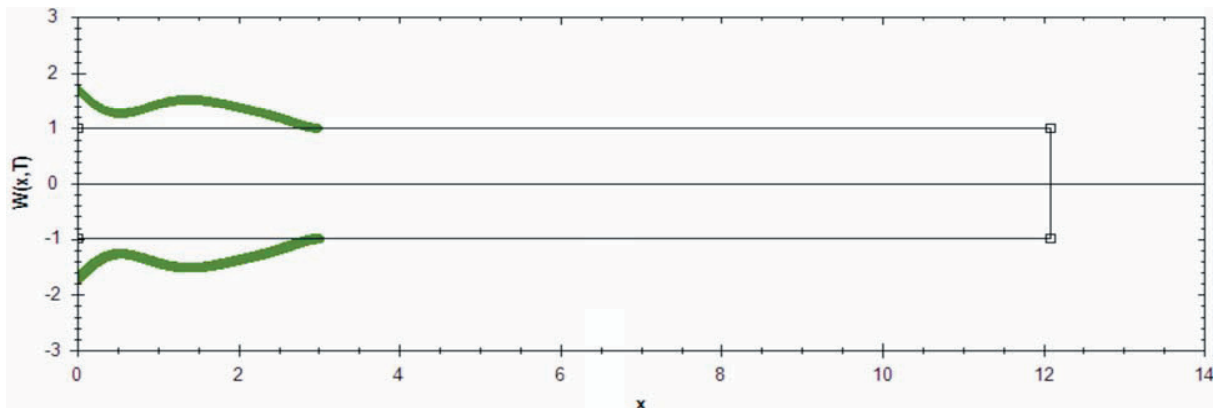


Рис. 2. Распределение поперечного перемещения по стержню ($x=3, h_2=h_3=1$)

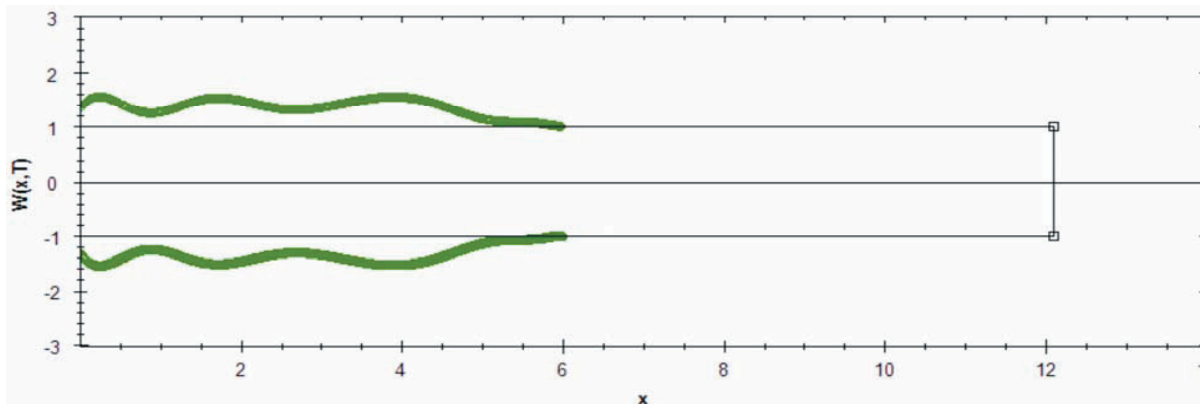


Рис. 3. Распределение поперечного перемещения по стержню ($x = 6, h_2 = h_3 = 1$)

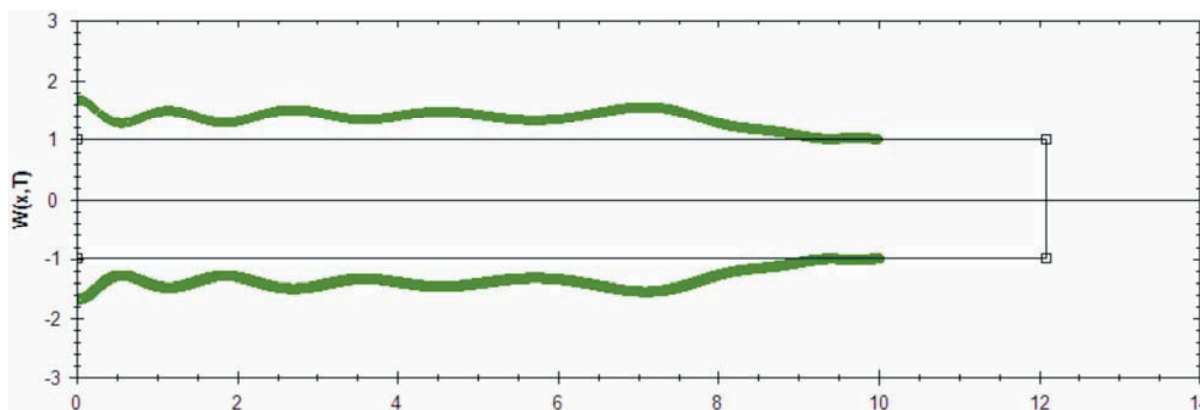


Рис. 4. Распределение поперечного перемещения по стержню ($x = 10, h_2 = h_3 = 1$)

4. Выводы

В отличие от классической картины ступенчатого изменения поперечного сечения стержня под действием внезапной нагрузки, решение уточненных динамических

уравнений продольной деформации стержня дает иной результат. В соответствии с новыми исследованиями размеры поперечного сечения стержня меняются плавно, начиная от фронта волны. Вдали от фронта картина переходит в классическую.

Литература

1. Шамровский А.Д., Егармина Л.Н. Вывод динамических уравнений продольной деформации стержня при помощи двойного упрощения уравнений теории упругости // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні, 2009. – №2. –111-115 с.
2. Шамровский А.Д., Егармина Л.Н. Моделирование распространения продольной волны в стержне с помощью уточненных динамических уравнений // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні, 2010. – №2. –139-145 с.

Abstract

The article is devoted to the disturbed region of the bar during the action of constant longitudinal load. The dynamics of the construction is described by new specified univariate dynamical equations of longitudinal strain. These equations are derived from asymptotic-group analysis of three-dimensional dynamical equations of the elasticity theory and they make it possible to study the averaged three-dimensional picture along the disturbed region, from the wave front to loaded butt. New equations also take into account the deformation of the bar cross-section.

The method of asymptotic-group analysis made it possible to solve the specified equations, which allow obtaining and studying the distribution pattern of cross travel, according to construction near the front. As opposed to the classical pattern of a step change of a bar cross-section under the sudden load, the picture of a slow cross-section resizing was obtained

Keywords: *asymptotic-group, cross travel, longitudinal stress, longitudinal wave*