

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЯ ДЛЯ ИНВАРИАНТНОГО К АФФИННЫМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМ РАСПОЗНАВАНИЯ

**Р. К. Мамедов**

Доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой\*

Контактный тел.: +99-450-341-59-03

E-mail: rahim1951@mail.ru

**А. С. Муталлимова**

Научный сотрудник\*

Контактный тел.: +99-450-440-22-31

E-mail: ayzberg69@mail.ru

**Т. Ч. Алиев**

Аспирант\*

Контактный тел.: +99-450-932-50-14

E-mail: alievtima18@rambler.ru

\*Кафедра «Информационно-измерительная и компьютерная техника»

Азербайджанская государственная нефтяная академия  
пр. Азадлыг, 20, г. Баку, AZ1010, Азербайджан

*Описано застосування моментів інерції для розпізнавання зображень, підданих афінним перетворенням. Вказані переваги та обмеження застосування моментів інерції при розпізнаванні. Наведено залежності зміни моментів інерції перетину від масштабу і повороту зображення*

*Ключові слова: афінні перетворення, моменти інерції, розпізнавання*

*Описано применение моментов инерции для распознавания изображений, подвергнутых аффинным преобразованиям. Указаны преимущества и ограничения применения моментов инерции при распознавании. Приведены зависимости изменения моментов инерции сечения от масштаба и поворота изображения*

*Ключевые слова: аффинные преобразования, моменты инерции, распознавание*

*The application of moments of inertia for image recognition, which are subjected to an affine transformation is described. The advantages and limitations of the moments of inertia for recognition are shown. The dependence of moments of inertia from the scale and rotate images are given*

*Keywords: affine transformations, the moments of inertia, recognition*

## 1. Введение

Помимо механики, моменты инерции нашли свое применение в распознавании объектов по их изображениям [1,2,3].

Изображение объекта по своей сути является двумерной проекцией трехмерного объекта, поэтому формулы моментов инерции сечения справедливы для изображений объектов. При распознавании объекта по изображениям с помощью систем технического зрения возникают определенные трудности, связанные с линейными преобразованиями изображений (ортогональное перемещение и поворот в плоскости проекции). В настоящее время в процессе распознавания объекта решение данной задачи производится путем простого перебора всевозможных положений полученного изображения объекта (распознаваемого изображения) с непосредственным сличением с эталонным изображением. И если в каком-либо положении распознаваемое изображение полностью накладывается на эталонное изображение, то делается вывод о соответствии распознаваемого объекта эталону. Однако данный подход распознавания имеет

существенный недостаток – анализ занимает значительное время.

## 2. Постановка задачи

Применение моментов инерции в качестве ориентиров изображения позволяет значительно ускорить распознавание объектов по изображениям [1,2,3]. Известно, что моменты инерции сечения при повороте осей связаны уравнениями (1)-(3) [4]:

$$J_U = J_X \cdot \cos^2 \phi + J_Y \cdot \sin^2 \phi - J_{XY} \cdot \sin 2\phi; \tag{1}$$

$$J_V = J_X \cdot \sin^2 \phi + J_Y \cdot \cos^2 \phi + J_{XY} \cdot \sin 2\phi; \tag{2}$$

$$J_{UV} = J_{XY} \cdot \cos 2\phi + \frac{J_X - J_Y}{2} \cdot \sin 2\phi, \tag{3}$$

где  $J_X, J_Y, J_{XY}$  – осевые и центробежный моменты инерции сечения относительно исходных осей;

$J_U, J_V, J_{UV}$  – осевые и центробежный моменты инерции сечения относительно повернутых осей;

$\phi$  – угол поворота.

Приняв  $J_X, J_Y, J_{XY}$  за моменты инерции эталонного изображения объекта, а  $J_U, J_V, J_{UV}$  за моменты инерции распознаваемого изображения объекта, и решая указанные выше уравнения, получают значения угла  $\phi$ , т.е. возможные положения распознаваемого изображения объекта относительно эталонного изображения. Т.о., после предварительных вычислений перебор всевозможных положений ограничивается несколькими положениями. Произведя разворот распознаваемого изображения на вычисленные углы  $\phi$  и непосредственное сличение полученного изображения с эталоном, осуществляется процесс распознавания объекта по его изображению. Данный подход обладает достаточной достоверностью распознавания.

Изображения объектов зачастую содержат аффинные преобразования. В результате этого, встает дополнительная задача по определению искажения изображения, что в очень значительной степени замедляет процесс распознавания. В открытой литературе отсутствует информация о зависимости моментов инерции сечения при их аффинных преобразованиях. Поэтому для искаженных изображений метод моментов инерции практически не применяется.

Из вышесказанного следует, что нахождение зависимостей моментов инерции при аффинных преобразованиях изображений является актуальной научно-технической задачей. Ее решение позволит применить метод моментов для широкого круга изображений и повысить эффективность распознавания.

### 3. Метод решения задачи

В статье вывод формул зависимостей моментов инерции производится путем анализа поперечного сечения произвольного стержня (рис. 1), выделенного сплошной линией.

Сечение представляет собой плоскую область. Через центр области 0 проведены две взаимно перпендикулярные координатные оси OX и OY.

Элементарная площадка  $dS_1$  имеет свои координаты  $x_1$  и  $y_1$ , которые показывают расстояние от геометрического центра элементарной площадки до осей OY и OX соответственно.

Как известно из курса «Сопротивление материалов», осевые и центробежный моменты инерции сечения определяются по формулам [4]:

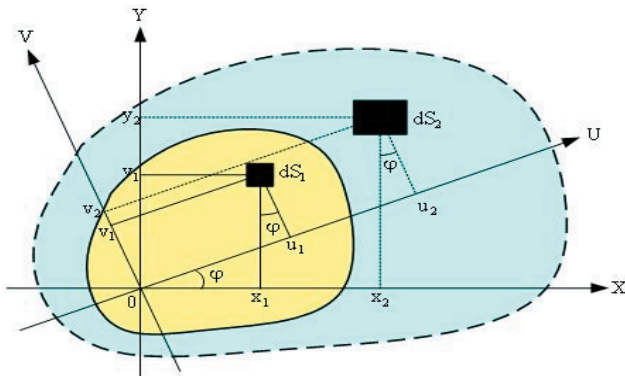


Рис. 1. Поперечное сечение произвольного стержня

$$J_{X1} = \int_{S_1} y_1^2 dS_1 = \iint_{D_1} y_1^2 dx_1 dy_1 ; \quad (4)$$

$$J_{Y1} = \int_{S_1} x_1^2 dS_1 = \iint_{D_1} x_1^2 dx_1 dy_1 ; \quad (5)$$

$$J_{XY1} = \int_{S_1} (x_1 \cdot y_1) dS_1 = \iint_{D_1} (x_1 \cdot y_1) dx_1 dy_1 , \quad (6)$$

где  $J_{X1}$  – осевой момент инерции сечения относительно оси OX;  $J_{Y1}$  – осевой момент инерции сечения относительно оси OY;  $J_{XY1}$  – центробежный момент инерции сечения относительно осей OXY;  $dS_1$  – элементарная площадка;  $x_1$  – расстояние от геометрического центра элементарной площадки  $dS_1$  до оси OX;  $y_1$  – расстояние от геометрического центра элементарной площадки  $dS_1$  до оси OY;  $S_1$  – площадь сечения;  $D_1$  – область интегрирования;  $dx_1$  – размер элементарной площадки  $dS_1$  по оси OX;  $dy_1$  – размер элементарной площадки  $dS_1$  по оси OY.

Решая уравнения (4) ÷ (6) получают:

$$J_{X1} = \frac{\Delta x_1 \cdot \Delta y_1^3}{3} ; J_{Y1} = \frac{\Delta x_1^3 \cdot \Delta y_1}{3} ; J_{XY1} = \frac{\Delta x_1^2 \cdot \Delta y_1^2}{4} , \quad (7)$$

где  $\Delta x_1$  – верхний предел интегрирования по оси OX;  $\Delta y_1$  – верхний предел интегрирования по оси OY.

В качестве аффинных преобразований в статье рассматривается изменение масштаба изображения с поворотом вокруг горизонтальной или вертикальной координатной оси. Это соответствует изменению размера сечения по оси OX в M раз и оси OY в N раз относительно точки 0 (рис. 1) выделенное пунктирной линией.

Аналогично формулам (4) ÷ (6), осевые и центробежный моменты инерции измененного в размерах сечения определяются по формулам:

$$J_{X2} = \int_{S_2} y_2^2 dS_2 = \iint_{D_2} y_2^2 dx_2 dy_2 ; \quad (8)$$

$$J_{Y2} = \int_{S_2} x_2^2 dS_2 = \iint_{D_2} x_2^2 dx_2 dy_2 ; \quad (9)$$

$$J_{XY2} = \int_{S_2} (x_2 \cdot y_2) dS_2 = \iint_{D_2} (x_2 \cdot y_2) dx_2 dy_2 , \quad (10)$$

где  $J_{X2}$  – осевой момент инерции измененного в размерах сечения относительно оси OX;  $J_{Y2}$  – осевой момент инерции измененного в размерах сечения относительно оси OY;  $J_{XY2}$  – центробежный момент инерции измененного в размерах сечения относительно осей OXY.

Для рассматриваемого случая площадь сечения и область интегрирования изменяются в M·N раз. Верхний предел интегрирования по оси OX и размер элементарных площадок по оси OX изменяются в M раз.

Верхний предел интегрирования по оси OY и размер элементарных площадок по оси OY изменяются в N раз. Т.к. геометрический центр элементарной площадки при изменении масштаба сохраняет свои

координаты, то расстояния от геометрических центров элементарных площадок до осей OX и OY, а также количество элементарных площадок останутся прежними.

Тогда можно записать, что:

$$\left. \begin{aligned} D_2 &= M \cdot N \cdot D_1; dS_2 = M \cdot N \cdot dS_1; dx_2 = d(M \cdot x_1) \\ dy_2 &= d(N \cdot y_1); x_2 = x_1; y_2 = y_1 \end{aligned} \right\}, \quad (11)$$

где  $dS_2$  – элементарная площадка;  $x_2$  – расстояние от геометрического центра элементарной площадки  $dS_2$  до оси OX;  $y_2$  – расстояние от геометрического центра элементарной площадки  $dS_2$  до оси OY;  $S_2$  – площадь сечения;  $D_2$  – область интегрирования;  $dx_2$  – размер элементарной площадки  $dS_2$  по оси OX;  $dy_2$  – размер элементарной площадки  $dS_2$  по оси OY.

Решая уравнения (8)+(10) для соответствующих значений  $D_2$ ,  $dS_2$ ,  $dx_2$ ,  $dy_2$ ,  $x_2$  и  $y_2$  получают:

$$\left. \begin{aligned} J_{x2} &= M^2 \cdot N^4 \cdot \frac{\Delta x_1 \cdot \Delta y_1^3}{3}; J_{y2} = M^4 \cdot N^2 \cdot \frac{\Delta x_1^3 \cdot \Delta y_1}{3} \\ 1.916964252 \cdot 10^{10} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Произведя сравнение результатов (12) с результатами (7) видно, что:

$$\begin{aligned} J_{x2} &= M^2 \cdot N^4 \cdot J_{x1}; J_{y2} = M^4 \cdot N^2 \cdot J_{y1}; \\ J_{xy2} &= M^3 \cdot N^3 \cdot J_{xy1} \end{aligned} \quad (13)$$

Если через центр сечения 0 провести две взаимно перпендикулярные координатные оси OU и OV повернутые относительно осей OX и OY на угол  $\phi$  против направления вращения часовой стрелки (рис. 1), то согласно формулам (1)+(3) моменты инерции сечения при изменении размеров и повороте осей сечения связаны уравнениями:

$$J_{U2} = J_{x2} \cdot \cos^2 \phi + J_{y2} \cdot \sin^2 \phi - J_{xy2} \cdot \sin 2\phi; \quad (14)$$

$$J_{V2} = J_{x2} \cdot \sin^2 \phi + J_{y2} \cdot \cos^2 \phi + J_{xy2} \cdot \sin 2\phi; \quad (15)$$

$$J_{UV2} = J_{xy2} \cdot \cos 2\phi + \frac{J_{x2} - J_{y2}}{2} \cdot \sin 2\phi. \quad (16)$$

Подставляя выражения (13) в уравнения (14)+(16) получают формулы зависимости изменения моментов инерции при изменении размера относительно центра по оси OX в M раз и по оси OY в N раз, и повороте осей сечения:

$$\begin{aligned} J_{U2} &= M^2 \cdot N^4 \cdot J_{x1} \cdot \cos^2 \phi + \\ &+ M^4 \cdot N^2 \cdot J_{y1} \cdot \sin^2 \phi - M^3 \cdot N^3 \cdot J_{xy1} \cdot \sin 2\phi; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} J_{V2} &= M^2 \cdot N^4 \cdot J_{x1} \cdot \sin^2 \phi + \\ &+ M^4 \cdot N^2 \cdot J_{y1} \cdot \cos^2 \phi + M^3 \cdot N^3 \cdot J_{xy1} \cdot \sin 2\phi; \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} J_{UV2} &= M^3 \cdot N^3 \cdot J_{xy1} \cdot \cos 2\phi + \\ &+ \frac{M^2 \cdot N^4 \cdot J_{x1} - M^4 \cdot N^2 \cdot J_{y1}}{2} \cdot \sin 2\phi. \end{aligned} \quad (19)$$

Уравнения (17)+(19) являются системой трех уравнений с тремя неизвестными, решая которую получают значения M, N и  $\phi$ . Произведя развороты распознаваемого изображения на углы  $\phi$ , корректировку размеров по величинам M и N, и непосредственное сличение полученного изображения с эталоном, осуществляют процесс распознавания объекта по его изображению.

**Компьютерное моделирование**

С целью подтверждения полученных теоретических результатов проведено компьютерное моделирование.

В формулах (17)+(19) отсчет положительного угла поворота осей сечения ведется против направления вращения часовой стрелки. Поворот осей сечения против направления вращения часовой стрелки равносильно повороту самого изображения, относительно начала координат, по направлению вращения часовой стрелки.

На рис. 2 представлено исходное изображение. На рис. 3а и 3б исходное изображение увеличено в размерах в два раза по оси OX и три раза по оси OY, и в три раза по оси OX и два раза по оси OY соответственно. На рис. 3в и 3г соответственно данные изображения повернуты на 35° по направлению вращения часовой стрелки.

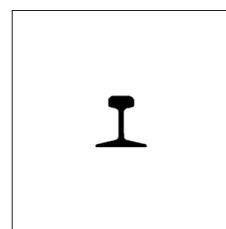


Рис. 2. Исходное изображение

Результаты вычислений показали, что у исходного изображения площадь и моменты инерции равны:  $S = 5410$ ;  $J_{x1} = 7.636049454 \cdot 10^{10}$ ;  $J_{y1} = 1.671401647 \cdot 10^{10}$ ;  $J_{xy1} = 92743630$ .

В табл. 1 представлены результаты вычисления площади и моментов инерции для измененных в размерах изображений.

В табл. 2 представлены результаты вычисления площади и моментов инерции для измененных в размерах и повернутых на 35° изображений.

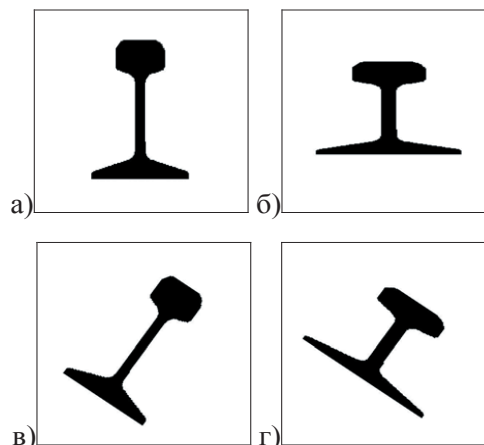


Рис. 3. Измененное изображение

Таблица 1

Изменение размера изображения	Площадь и моменты инерции изображения при изменении размера по оси OX в M раз и по оси OY в N раз
M=2, N=3	$S = 32460$ $J_{x_2} = 2.473978449264 \cdot 10^{13}$ $J_{y_2} = 2.4066483462 \cdot 10^{12}$ $J_{xy_2} = 1.916964252 \cdot 10^{10}$
M=3, N=2	$S = 32460$ $J_{x_2} = 1.099551409812 \cdot 10^{13}$ $J_{y_2} = 5.41500686844 \cdot 10^{12}$ $J_{xy_2} = 1.911286998 \cdot 10^{10}$

Таблица 2

Изменение размера и поворот изображения	Площадь и моменты инерции изображения при изменении размера по оси OX в M раз и по оси OY в N раз, и повороте
M=2, N=3, $\varphi=35$	$S = 32470$ $J_{u_2} = 1.737935884778 \cdot 10^{13}$ $J_{v_2} = 9.77543787682 \cdot 10^{12}$ $J_{uv_2} = 1.050338141061 \cdot 10^{13}$
M=3, N=2, $\varphi=35$	$S = 32465$ $J_{u_2} = 9.143978694545 \cdot 10^{12}$ $J_{v_2} = 7.26666783102 \cdot 10^{12}$ $J_{uv_2} = 2.630119802185 \cdot 10^{12}$

## Выводы

Как видно из табл. 1, пропорции, полученные в формулах (13), подтверждаются результатами вычислений. Как видно из табл. 2, пропорции, полученные в формулах (17)-(19), также подтверждаются результатами вычислений.

Т.о., используя формулы зависимости изменения моментов инерции от изменения размеров и поворота изображения, можно достаточно быстро и достоверно произвести распознавание объектов по их изображениям, подвергнувшимся аффинным преобразованиям.

## Литература

1. Мамедов, Р.К. Обеспечение инвариантности распознавания изображений к линейным перемещениям и масштабам в адаптивных роботах [Текст] / Р.К. Мамедов, Т.Ч. Алиев // Оптико-электронные информационно-энергетические технологии. – 2009. – №1(17). – С. 26–31.
2. Повышение достоверности распознавания объектов системами технического зрения в автоматизированном производстве [Текст] : Труды 1 международного симпозиума, 14 сентября 2010 г. Непряхино, Челябинской обл. / редкол. : Н.П. Ершов (отв. ред.). – Москва : РАН, 2010. – 202 с.
3. Распознавание летательных аппаратов выполненных по технологии «Стелс» [Текст] : Материалы 4-й Всеукраинской научно-практической конференции молодых ученых и студентов (апрель 2011) / отв. ред. С.В. Доценко. – Севастополь : СевНТУ, 2011. – 165 с.
4. Александров, А.В. Сопротивление материалов. [Текст] / А.В. Александров – М. : Высш. шк., 2003. – 560 с.