

Запропонована імовірнісна трипараметрична модель міцності циліндричного з'єднання з натягом, яка дозволяє за результатами малої кількості експериментів визначити допустиму величину навантаження. Наведено методику, яка пояснює практичне застосування моделі. Модель випробувана на результатах експериментів міцності з'єднань вал-втулка з натягом, підтверджена її працездатність і ефективність

Ключові слова: міцність з'єднання з натягом, нижній поріг міцності, гамма-відсоткова міцність, інтенсивність відмов

Предложена вероятностная трехпараметрическая модель прочности цилиндрического соединения с натягом, которая позволяет по результатам малого количества экспериментов определить допустимую величину нагрузки. Приведена методика, поясняющая практическое применение модели. Модель опробована на результатах экспериментов прочности соединенный вал-втулка с натягом, подтверждена ее работоспособность и эффективность

Ключевые слова: прочность соединения с натягом, нижний порог прочности, гамма-процентная прочность, интенсивность отказов

УДК 621.002:621.757

DOI: 10.15587/1729-4061.2015.42398

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ ПРОЧНОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СОЕДИНЕНИЯ С НАТЯГОМ

А. В. Куприянов

Кандидат технических наук, доцент*

E-mail: a_kupriyanov@uipa.edu.ua

Н. Ю. Ламнауэр

Кандидат технических наук, доцент**

E-mail: lamnaouernatali@mail.ru

*Кафедра интегрированных технологий в машиностроении и сварочного производства***

Кафедра металлорежущего оборудования и транспортных систем*

***Украинская инженерно-педагогическая академия ул. Университетская, 16, г. Харьков, Украина, 61003

1. Введение

Цилиндрические соединения с натягом широко применяются в машиностроении. Основная функция соединения с натягом – обеспечивать жесткое неподвижное положение одной детали относительно другой. Соединение может работать на осевой сдвиг, проворачивание или испытывать комбинированную нагрузку. Прочность соединения зависит от многих факторов: натяга, материала контактирующих поверхностей, их шероховатости и погрешности геометрии формы, состояния поверхностного слоя, способа сборки, смазки, промежуточных сред и т. д. [1, 2]. При использовании таких соединений важно иметь прогноз прочности, какую нагрузку выдержит данное соединение.

2. Анализ литературных данных и постановка проблемы

Расчет статической прочности цилиндрического прессового соединения обычно производится по формулам, основанным на решении плоской осесимметричной задачи теории упругости (задача Ляме-Гадоллина). Прочность продольно-прессового соединения с натягом прямо пропорциональна площади контактирования. Хотя в целом, удобство зависимости такой модели никто не оспаривает, несоответствия с практическими результатами часто имеют место. В таком случае несоответствия переносят на коэффициент трения, и его величина должна аккумулировать все неучтенные параметры. Крагель-

ский И. В. [3] построил наиболее общую и адекватную теорию трения твердых тел. Поскольку коэффициент трения нелинейно зависит от большого количества факторов, результат расчета имеет скорее оценочные данные и применяется на этапе проектирования.

Поэтому для прочности соединения с натягом всегда проводят экспериментальную проверку. Исследованием прочности, в зависимости от различных факторов, занимались Арпентьев Б. М. [4], Святуха А. А. [5] а также Sen S. [6]. Исследования проводились с планированием экспериментов, получены графические зависимости прочности.

Последнее время авторы используют метод конечных элементов для расчета и прогнозирования прочности соединения с натягом. Boutoutaou H. [7] исследовал сборку соединений с нагревом с погрешностями геометрии. Chakherlou T. N. [8] исследовал, как соединения с натягом выдерживают сопротивление усталости. Mucha J. [9] занимался исследованием прочности тонкостенных соединений с натягом.

Однако такой подход позволяет оценить прочность соединения «в среднем», и не дает оценку гарантированной прочности для партии изделий. Даже имея результаты экспериментов, известные авторам модели не дают точный прогноз относительно гарантированной прочности и возможного уровня нагрузки, при которой произойдет разрушение соединения. Чаще всего для обработки результатов экспериментов применяется закон нормального распределения, который по физическим соображениям не подходит, поскольку не имеет ограничения снизу.

3. Цель и задачи исследования

Цель исследования состоит в разработке вероятностной модели прочности цилиндрических соединений с натягом, позволяющей оценить максимальную величину нагрузки, допустимой при отсутствии сдвига; в нахождении метода оценок параметров данной модели по результатам малого количества экспериментов; в создании методики расчёта основных показателей прочности цилиндрических соединений с натягом.

Для достижения поставленной цели решались следующие задачи:

- предложить вероятностную трехпараметрическую модель прочности соединения с натягом на сдвиг, которая содержит конечную нижнюю границу прочности;
- найти оценки параметров данной модели и дать методику их вычислений по малой выборке;
- проверить, что предложенная модель прочности адекватна истинной и может быть применима для решения практических задач;
- опробовать модель на результатах экспериментов по прочности соединений вал-втулка с натягом и подтвердить ее работоспособность.

4. Построение и применение вероятностной модели прочности

4.1. Математическая модель прочности и оценки ее параметров

Известно [3], что посадочные поверхности втулки и вала контактируют по отдельным контактными пятнам, расположенным в точках выступов шероховатости и группирующихся в областях выступов погрешности геометрии формы. Поэтому будем исходить из того, что какая-то элементарная поверхность содержит некоторое контактное пятно.

Пусть ΔS_i – некоторая элементарная площадь контакта вала с втулкой. Предположим, что возможно такое разбиение всей зоны контакта $\Delta S_i \ll S$, где S – вся зона контакта вала к втулке, которая содержит не только контактные пятна. Каждое из этих контактных пятен дает сопротивление на сдвиг и эти сопротивления различны. Заметим, что $\sum_{i=1}^m \Delta S_i \leq S$, где m – число элементарных площадок.

Введём плотность распределения $f(p/S_i)$ нагрузки P , достаточной для сдвига этой площадки ΔS_i . Тогда функция распределения нагрузки P на сдвиг элементарной площадки ΔS_i имеет вид:

$$F(p/S_i) = \int_{p_0}^p f(p/\Delta S_i) dp,$$

где p_0 – нижний порог нагрузки P , при котором происходит сдвиг площадки ΔS_i .

Так как площадки ΔS_i , содержащие контактные пятна, дающие сопротивление на сдвиг, изолированы друг от друга, все элементарные площадки можно считать статистически независимыми. Сдвиг вала становится возможным тогда, когда все площадки ΔS_i

сдвинутся. В этом случае должна произойти нагрузка, равная максимуму из случайных величин нагрузок P_1, P_2, \dots, P_m сдвига площадок ΔS_i ($i=1, 2, \dots, m$). В этом случае функция распределения случайной величины нагрузки на всю контактную поверхность будет иметь вид:

$$F(p) = \prod_{i=1}^m F(p/\Delta S_i),$$

где случайная величина $P = \max_{1 \leq i \leq m} P_i$.

Если принять, что все случайные величины нагрузки на сдвиг P_1, P_2, \dots, P_m имеют одинаковое распределение $F_v(p)$ для каждой элементарной площадки, то будем иметь:

$$F(p) = F_v^m(p).$$

Функцию распределения $F(p)$ в точке контакта экспериментально определить практически невозможно. Число зон контакта также неизвестно, но известно, что их количество достаточно велико [3]. Можно предположить, что в соединении количество контактных зон пропорционально площади контакта S и натягу в соединении.

Применим асимптотическое распределение экстремальных значений для наибольших значений. Оно предполагает, что количество контактных зон $m \rightarrow \infty$. Произвольное распределение случайной величины P , даже после соответствующей нормировки, не всегда обладает предельным распределением. Как показал Гнеденко Б. В. [10], только в трех случаях может существовать предельное распределение. Из этих трех распределений физически адекватно только одно, когда случайная величина $P > 0$. Этим распределением является распределение вида:

$$F(p) = \begin{cases} 0, & \text{если } p \leq 0, \alpha > 0, \\ \exp(-p^{-1/\alpha}), & \text{если } p > 0. \end{cases}$$

В общем случае, введя параметры сдвига и масштаба, данная случайная величина P нагрузки на сдвиг вала имеет функцию распределения:

$$F(p) = \begin{cases} 0, & \text{если } p \leq 0, \alpha > 0, \\ \exp\left(-\left(\frac{p-p_0}{\beta}\right)^{-1/\alpha}\right), & \text{если } p > 0. \end{cases} \quad (1)$$

где α – параметр формы, β – масштабный параметр, p_0 – параметр сдвига.

Из (1) можно получить модель нагрузки на сдвиг вала от действия случайной нагрузки P на весь вал:

$$f(p) = \begin{cases} 0, & \text{если } p \leq 0, \alpha > 0, \\ \frac{1}{\alpha\beta} \left(\frac{p-p_0}{\beta}\right)^{-1/\alpha-1} \exp\left(-\left(\frac{p-p_0}{\beta}\right)^{-1/\alpha}\right), & \text{если } p > 0. \end{cases} \quad (2)$$

Для данной модели (2) математическое ожидание случайной величины P имеет вид:

$$M(P) = p_0 - \beta \Gamma(1 - \alpha), \tag{3}$$

где $\Gamma(v)$ – гамма функция [11].

Дисперсия этой величины для данной модели имеет вид:

$$D(P) = -\beta^2 [\Gamma(1 - 2\alpha) + \Gamma^2(1 - \alpha)]. \tag{4}$$

Математическое ожидание первой порядковой статистики [12] выборки объёма n определяется по формуле:

$$M_{1n} = p_0 + \beta n \int_0^{\infty} p f_n(p) [1 - F_n(p)]^{n-1} dp, \tag{5}$$

где $F_n(p)$ и $f_n(p)$ – нормированные функция распределения $F(p)$ и плотности распределения $f(p)$, вычисленные при значениях параметров $p_0=0$ и $\beta=1$.

Выражение (5) вычисляется просто, если применить формулу бинома Ньютона:

$$[1 - F_n(p)]^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i F_n^i(p) \frac{(n-1)!}{(n-i-1)!i!}.$$

В этом случае

$$\int_0^{\infty} C p f_n(p) F_n^i(p) dp = -C(i+1)^{n-1} \Gamma(1 - \alpha).$$

Величина $D(P) / (M(P) - M_{1n})^2$ зависит только от параметра формы α . Оценка этой величины может иметь вид: $S^2 / (\bar{p} - p_{(1)})^2$, где $p_{(1)}$ – наименьшее выборочное значение нагрузки на сдвиг, \bar{p} – средняя величина нагрузки на сдвиг и S^2 – исправленная выборочная дисперсия нагрузки на сдвиг.

Приравнивая эту величину к её оценке, находим оценку параметра α . Подставляя в формулу (4) найденное α и вместо $D(P)$ – найденное значение по результатам экспериментов S^2 , получим уравнение, содержащее только β^2 . Решение данного уравнения позволяет оценить квадрат масштабного параметра β^2 , а затем и сам параметр β .

Так как оценкой математического ожидания первой порядковой статистики (5) объёма n может служить наименьшее выборочное значение $p_{(1)}$, то, приравнивая M_{1n} к $p_{(1)}$, и подставляя найденные α и β , находим оценку параметра сдвига p_0 . Необходимо помнить, что при $\beta > 0$ выражение $p - p_0 > 0$, а, значит, и $p_{(1)} - p_0 > 0$. Поэтому обязательно нужно в (4) учитывать знак.

Имея оценки параметров модели (2), можно проводить анализ полученной модели и решать ряд практических задач. Исследование с помощью чувствительной характеристики к модели λ -характеристики [13] $\lambda = f(p) / (1 - F(p))$ показали, что эмпирические и теоретические λ -характеристики имеют максимум, что говорит об адекватности полученной модели прочности на сдвиг. Полученные оценки позволяют оценить прочность соединения на сдвиг по формуле:

$$L(p) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{p - p_0}{\beta}\right)^{-1/\alpha}\right). \tag{6}$$

Зная оценки параметров предложенной модели прочности на сдвиг, можно решать различные задачи, связанные с прочностью. Так, например, задачу наход-

дения нижнего порога прочности p_0 и гамма-процентной прочности p_γ при заданных значениях гарантии γ .

4. 2. Методика расчёта показателей прочности цилиндрических соединений с натягом на сдвиг

Полученные теоретические результаты позволяют создать методику расчёта основных показателей прочности цилиндрических соединений на сдвиг. Оценки параметров модели (6) определим по следующей методике:

1. Проводятся испытания на сдвиг цилиндрических соединений для одинаковых изделий, изготовленных по одинаковой технологии, в количестве от 5 до n штук.

2. По результатам испытаний находится средняя нагрузка $\bar{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i$, где p_i – результат нагрузки, при которой происходит сдвиг.

3. Находится минимальный результат нагрузки на сдвиг $p_{(1)} = \min(p_1, p_2, \dots, p_n)$.

4. По результатам испытаний находится исправленная выборочная дисперсия нагрузки на сдвиг

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \sum_{i=1}^n (p_i - \bar{p})^2.$$

5. Находится величина статистики $T^2 = \frac{S^2}{(\bar{p} - p_{(1)})^2}$.

6. Определяется оценка $\tilde{\alpha}$ параметра α из решения уравнения

$$\frac{-[\Gamma(1 - 2\alpha) + \Gamma^2(1 - \alpha)]}{\left[(-1)^{n-1}(n-1) + \sum_{i=2}^n (-1)^i C_n^i i^\alpha\right]^2 \Gamma^2(1 - \alpha)} = T^2.$$

7. По найденному $\tilde{\alpha}$ находится оценка параметра β

$$\tilde{\beta} = \sqrt{-S^2 / [\Gamma(1 - 2\tilde{\alpha}) + \Gamma^2(1 - \tilde{\alpha})]}.$$

8. Определяется оценка параметра p_0 из формулы $\tilde{p}_0 = \bar{p} + \tilde{\beta} \Gamma(1 - \tilde{\alpha})$, где $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ – найденные оценки.

В системе MAPLE составлена программа, позволяющая находить оценки параметров модели (6).

Оценка параметра \tilde{p}_0 даёт нижний порог прочности изделия, т. е. ту величину нагрузки P , при которой уже может возникнуть сдвиг цилиндрического соединения, и меньше которого сдвига не будет.

Расчёт гамма-процентной прочности p_γ определяется при заданной гарантии γ по формуле:

$$p_\gamma = \tilde{p}_0 - \tilde{\beta} \ln^{-\tilde{\alpha}}(1 - \gamma). \tag{7}$$

4. 3. Результаты экспериментов по осевой прочности цилиндрических соединений с натягом и их обработка

В процессе эксперимента были изготовлены, измерены, скомплектованы, собраны тепловой сборкой, а затем распрессованы 11 соединений с натягом, имеющих номинальный диаметр $\varnothing 60$ мм и длину 70 мм [14].

Для разборки экспериментальных соединений использовался пресс Р50. Запись диаграммы распрессовки проводится на миллиметровую бумагу через входящую в состав пресса систему. Посадочные размеры и полученная в результате экспериментов прочность экспериментальных соединений приведена в табл. 1.

Таблица 1

Результаты комплектования и прочность при распрессовке экспериментальных образцов

№	Средний диаметр вала, мм	Средний диаметр втулки, мм	Натяг, мм	Прочность, кН
1	60,112	60,070	0,0427	157
2	60,113	60,074	0,0392	176
3	60,110	60,067	0,0432	137
4	60,111	60,069	0,0423	152
5	60,112	60,069	0,0432	107
6	60,118	60,078	0,0393	103
7	60,117	60,076	0,0408	87
8	60,104	60,067	0,0372	136
9	60,097	60,067	0,0303	132
10	60,114	60,074	0,0393	115
11	60,111	60,067	0,0433	147

По полученным результатам испытаний на сдвиг и предложенной методике оценки параметров модели (6), были найдены оценки параметров $p_0=72$ кН, $\beta=27$ кН, $\alpha=0,6$.

На рис. 1, а представлена кривая прочности соединения вала и втулки при заданных параметрах модели (6). Нагрузка, при которой может произойти сдвиг, $p_0=72$ кН.

Пользуясь (7), находим гамма-процентную прочность соединения при $\gamma=0,95$. Получим $p_\gamma=85,98$ кН. Таким образом, гарантированная 95 % прочность на сдвиг равна 86 кН. Это значит, что не меньше 95 % изделий выдержат нагрузку 85 кН. Используя модель (6), можно найти функцию интенсивности отказов $\lambda(p)=f(p)/L(p)$, график которой приведён на рис. 1, б.

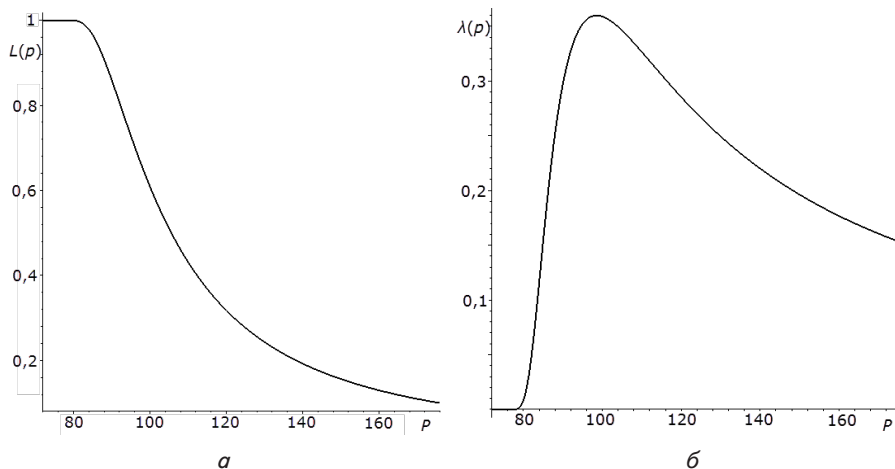


Рис. 1. Кривая прочности (а) и интенсивности отказов (б) соединения с натягом при значениях параметров $p_0=72$ кН, $\beta=27$ кН, $\alpha=0,6$

Исследования показали, что модель (6) имеет максимум интенсивности отказов $\lambda(p)$ при полученных оценках параметров модели, что имеет физическое подтверждение получаемого процесса однородного изготовления соединения.

5. Преимущества и недостатки предложенной модели

Предложенная вероятностная модель прочности соединения с натягом трехпараметрическая, и величина Р нагрузки на сдвиг зависит от: α – параметра формы, β – масштабного параметра, p_0 – параметра сдвига. С одной стороны, у предложенной модели больше параметров, чем у общеупотребительной двухпараметрической модели нормального распределения. Параметры модели вычисляются несколько сложнее, чем у нормального распределения. С другой стороны, предложенная модель имеет весомое преимущество: плотность распределения ограничена снизу. Это согласуется с физическим смыслом расчета прочности соединения с натягом: необходимо найти предельное значение нагрузки, которое выдержат все годные соединения. Именно возможность определить силу, ниже которой не будет разрушения соединения и есть наиболее важным преимуществом предлагаемой модели прочности. Вторым весомым преимуществом модели является ее применимость к случаям с малым количеством экспериментов.

Понятно, что чем больше сила, тем более вероятно, что соединение выйдет из строя. В предложенной модели при заданной гарантии γ можно определить прочность p_γ . Это значит, что доля изделий не меньше γ выдержит нагрузку p_γ .

Пример построения кривой прочности соединения с натягом и кривой интенсивности отказов соединения согласуются с экспериментальными данными. Это свидетельствует о применимости методики расчёта показателей прочности на сдвиг для цилиндрических соединений с натягом.

В дальнейших исследованиях следует проверить возможность использования предложенной модели при расчете прочности на проворачивание.

6. Выводы

Предложена вероятностная трехпараметрическая модель прочности соединения с натягом на сдвиг. Данная модель, в отличие от общепринятых, позволяет определить нижнюю границу прочности.

Найдены оценки всех трёх параметров данной модели и дана методика их вычислений. Методика применима к малым выборкам и позволяет получить оценку гамма-процентной прочности.

С помощью λ -характеристики показано, что предложенная модель прочности адекватна истинной и может быть применима для решения практических задач.

Модель опробована на результатах экспериментальных данных по прочности соединений вал-втулка с натягом и подтверждена ее работоспособность. В частности показано, что интенсивность отказов имеет максимум, согласовывающийся с экспериментальными данными.

Литература

1. Gallio, G. Influence of the mechanical behaviour of different adhesives on an interference-fit cylindrical joint [Text] / G. Gallio, M. Lombardia, D. Rovarinob, P. Finoa, L. Montanaroa // International Journal of Adhesion and Adhesives. – 2013. – Vol. 47. – P. 63–68. doi: 10.1016/j.ijadhadh.2013.09.021
2. Sekercioglu, T. The effects of bonding clearance and interference fit on the strength of adhesively bonded cylindrical components [Text] / T. Sekercioglu, A. Gulsoza, H. Rende // Materials & Design. – 2005. – Vol. 26, Issue 4/ – P. 377–381. doi: 10.1016/j.matdes.2004.05.016
3. Крагельский, И. В. Основы расчетов на трение и износ [Текст] / И. В. Крагельский, М. Н. Добычин, В. С. Комбалов. – М.: Машиностроение, 1977. – 526 с.
4. Зенкин, А. С. Сборка неподвижных соединений термическими методами [Текст] / А. С. Зенкин, Б. М. Арпентьев. – М.: Машиностроение, 1987. – 128 с.
5. Кравцов, М. К. Промежуточные среды в соединениях с натягом [Текст] / М. К. Кравцов, А. А. Святуха, В. В. Чернов. – Х.: Штрих, 2001. – 200 с.
6. Sen, S. Stress analysis of interference fitted shaft–hub system under transient heat transfer conditions [Text] / S. Sen, B. Aksakal // Materials & Design. – 2004. – Vol. 25, Issue 5. – P. 63–68. doi: 10.1016/j.matdes.2003.11.009
7. Boutoutaou, H. Modeling of interference fits taking form defects of the surfaces in contact into account [Text] / H. Boutoutaou, M. Bouazizb, J.F. Fontaine // Materials & Design. – 2011. – Vol. 32, Issue 7. - P. 3692–3701. doi: 10.1016/j.matdes.2011.03.059
8. Chakherlou, T. N. Experimental and numerical investigations about the combined effect of interference fit and bolt clamping on the fatigue behavior of Al 2024-T3 double shear lap joints [Text] / T. N. Chakherlou, B. Abazadeh // Materials & Design. – 2012. – Vol. 33. – P. 425–435. doi: 10.1016/j.matdes.2011.04.045
9. Mucha, J. Finite element modeling and simulating of thermomechanic stress in thermocompression bondings [Text] / J. Mucha // Materials & Design. – 2009. – Vol. 30, Issue 4. – P. 1174–1182. doi: 10.1016/j.matdes.2008.06.026
10. Гнеденко, Б. В. Предельные теоремы для максимального члена вариационного ряда [Текст] / Б. В. Гнеденко // ДАН СССР. – 1941. – Т. 32, № 1. – С. 7.
11. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления (7-е изд.) [Текст] / Г. М. Фихтенгольц. – М.: Наука, 1969. – 794 с.
12. Дейвид, Г. Порядковые статистики [Текст] / Г. Дейвид; пер. с англ.; под ред. В. В. Петрова. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 336 с.
13. Ламнауэр, Н. Ю. Модель распределения размеров изделий и ее применение для оценки точности обработки [Текст] / Н. Ю. Ламнауэр // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2012. – № 27. - С. 98–107.
14. Куприянов, А. В. Экспериментальное исследование влияния погрешности геометрии формы деталей на прочность цилиндрического соединения с натягом [Текст] / А. В. Куприянов // Машинобудування: Збірник наукових праць. – 2012. – Вип. 10. – С. 85–93.