14. Sarwar, B. Application of Dimensionality Reduction in Recommender System a Case Study [Text]: technical report / B. Sarwar, G. Karypis, J. Konstan, J. Riedl. – Minnesota University Minneapolis Department of Computer Science, 2000. – 15 p.
15. Zhou, Y. Large-scale Parallel Collaborative Filtering for the Netflix Prize [Text] / Y. Zhou, D. Wilkinson, R. Schreiber, R. Pan // Algorithmic Aspects in Information and Management. – 2008. – Vol. 5034. – P. 337–348. doi: 0.1007/978-3-540-68880-8_32
16. Koren, Y. Factorization Meets the Neighborhood: a Multifaceted Collaborative Filtering Model [Text] / Y. Koren // Proceedings of the 14th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining, 2008. – P. 426–434. doi: 10.1145/1401890.1401944
17. Lee, D. D. Algorithms for Non-negative Matrix Factorization [Text] / D. D. Lee, H. S. Seung // Proceedings of Advances in Neural Information Processing Systems. 2001. – P. 556–562.
18. Goldberg, D. Using Collaborative Filtering to Weave an Information Tapestry [Text] / D. Goldberg, D. Nichols, B. Oki, D. Terry // Communications of the ACM. – 1992. – Vol. 35, Issue 12. – P. 61–70. doi: 10.1145/138859.138867
19. Boumaza, A. Stochastic Search for Global Neighbors Selection in Collaborative Filtering [Text] / A. Boumaza, A. Brun // Proceedings of the 27th Annual ACM Symposium on Applied Computing, 2012. – P. 232–237. doi: 10.1145/2245276.2245322
20. MovieLens Dataset GroupLens [Electronic resource] / Available at: http://grouplens.org/datasets/movielens/

УДК [519.95 + 518.5]: 622.692.4
DOI: 10.15587/1729-4061.2015.44159

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ МЕТРОЛОГИЧЕСКОЙ АТТЕСТАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

А. Д. Тевяшев
Доктор технических наук, профессор*
E-mail: tevjshev@kture.kharkov.ua
Ю. С. Асаенко
Аспирант*
E-mail: esset8@gmail.com
А. М. Кобылин
Доцент
Кафедра информационных технологий
Харьковский институт банковского дела Университета банковского дела НБУ
пр. Победы, 55, г. Харьков, Украина, 61202
E-mail: kobilin@khibs.edu.ua
*Кафедра прикладной математики
Харьковский национальный университет радиоэлектроники
пр. Ленина, 14, г. Харьков, Украина, 61166

У статті наведено результати порівняльного аналізу трьох методів метрологічної атестації математичних моделей технологічних елементів газотранспортних систем: методу імітаційного моделювання, методу статистичної лінеаризації, методу речових інтервалів. Показано, що для розглянутих моделей результати метрологічної атестації за трьома розглянутими методами практично збігаються, а найбільш ефективним виявився метод зосереджених інтервалів

Ключові слова: стохастичний модель, лінійна ділянка, метод, лінеаризація, імітаційне моделювання, речові інтервали

В статье приведены результаты сравнительного анализа трех методов метрологической аттестации математических моделей технологических элементов газотранспортных систем: метода имитационного моделирования, метода статистической линеаризации, метода вещественных интервалов. Показано, что для рассмотренных моделей результаты метрологической аттестации по трем рассмотренным методам практически совпадают, а наиболее эффективным оказался метод центрированных интервалов

Ключевые слова: стохастический модель, линейный участок, метод, линеаризация, имитационное моделирование, вещественные интервалы

1. Введение

При выборе математических моделей для решения практических задач в реальном масштабе времени возникает проблема метрологической аттестации моделей, т. е. проблема оценивания степени неопределенности зависимых переменных (результатов вычислений) от степени неопределенности независимых переменных (исходных данных).

В системах реального времени в математическую модель подставляются результаты косвенных измерений технологических параметров, получаемых из SCADA-систем. Любые косвенные измерения содержат определённый уровень неопределенности. Как правило, предполагается, что результаты косвенных измерений (исходные данные) являются случайными величинами, имеющими нормальное распределение с известными статистическими характеристиками (математическим ожиданием и дисперсией). В современной теории измерений уровень неопределённости результатов измерений определяется шириной интервала, в котором с вероятностью единица находится истинное значение измеряемой величины.

Метрологическая аттестация математических моделей заключается в определении интервалов неопределенности зависимых переменных в зависимости от интервалов неопределенности исходных данных.

В настоящее время метрологическая аттестация моделей осуществляется в предположении о том, что неопределенность косвенных измерений имеет статистический характер, а в качестве основного метода метрологической аттестации используется метод статистической линеаризации нелинейных функций случайных аргументов. Поэтому целесообразно рассмотреть новые методы метрологической аттестации технологических элементов газотранспортных систем, не требующие дополнительных предположений о знании статистических характеристик случайных аргументов, а неопределенность результатов косвенных измерений представлять в виде вещественных интервалов. В качестве новых методов метрологической аттестации, могут быть использованы три варианта метода вещественных интервалов: метод классической интервальной математики, метод математики Каухера, метод центрированных интервалов.

В качестве математических моделей технологических элементов газотранспортных систем используются две основные модели:

– стохастическая модель квазистационарных режимов транспорта газа по участку трубопровода [1];

– стохастическая модель компримирования природного газа газоперекачивающим агрегатом [1].

2. Анализ литературных данных и постановка проблемы метрологической аттестации математических моделей

Проблема метрологической аттестации в данной статье будет рассматриваться как проблема определения оптимальной математической модели для сложных систем с большим количеством параметров в реальном времени[1]. В сложных математических моделях, работащих в реальном времени результат зависит от точности начальных данных. С целью улучшения прогнозируемости и более точного измерения погрешности строятся стохастические модели [2]. Эти модели позволяющяют определить статистические свойства конечных величин, измерить погрешность и улучшить прогнозируемость модели [2, 3].

Существует несколько методов метрологической аттестации метрологических моделей. В данной статье приведены результаты сравнительного анализа трёх метода статистической линеаризации [4], метода имитационного моделирования и метода вещественных интервалов [5].

Метод статистической линеарзации позволяет определить статистические свойства конечных данных модели, заданных в виде случайных переменных с использованием разложения в ряд Тейлора. Метод не обладает высокой точностью, однако является высоко эффективным при небольших затратах машинного времени.

Метод имитационного моделирования является самым точным одним из часто наиболлее часто применяемых. Однако этот метод наиболее затратный по машинному времени. Метод заключается в генерации набора данных по результатам моделирования и использования этого набора для получения статистических данных конечных результатов [4].

Метод веценственных интервалов позволяет достичь баланса между использованием машинного времени и точностью результатов. В данном методе случайные величины представлены в виде интервалов с границами совпадющими с интервалами распределения случаных величин. С помощью специально заданных математических операций строится модель, и находятся статистические характеристики конечных данных [5].

3. Цель и задачи исследования

Целью работы является проведение сравнительного анализа различных методов оценивания интервалов неопределенности зависимых переменных (результатов вычислений) математических моделей технологических объектов, используемых в системах реального времени в зависимости от интервалов неопределенности независимых переменных (исходных данных).

Для сравнения были использованы методы: имитационного моделирования, статистической линеаризации и вещественных интервалов. Для достижения поставленной цели были поставлены задачи:

– провести метрологическую аттестацию статистически заданных интервалов неопределенности для математических моделей, аргументами которых являются случайные величины, имеющие нормальное или равномерное распределение;

– провести исследование зависимости интервалов неопределенности зависимых переменных от независимых переменных с использованим методов интервального анализа (в том числе классической интервальной арифметики, интервальной арифметики Каухера, метода центрированных интервалов);

– провести сравнительный анализ полученных результатов.

4. Стохастические модели квазистационарных режимов работы технологических элементов газотранспортных систем

Стохастическую модель квазистационарного неизотермического режима транспорта природного газа по участку трубопровода (УТ) представим в виде взаимосвязанной системы двух нелинейных алгебраических уравнений со случайными переменными [1]:

$$P_{í}(\omega)^2 - P_{ê}(\omega)^2 - \frac{P_{atm}\Delta L\, T_{cp}(\omega)\lambda Z_{cp}\, q(\omega)^2}{g R v T_0 E(\omega)^2 D^{5.2}} = 0\,. \qquad (1)$$

$$T_{к}(\omega) - T_{гр} - (T_{н}(\omega) - T_{гр}) e^{-\frac{62.6\, Kt(\omega) D_{в} L}{10^6 q(\omega)\Delta S}} = 0\,. \qquad (2)$$

Стохастическую модель квазистационарного неизотермического режима компримирования газа газоперекачивающим агрегатом (ГПА) будем рассматривать в виде:

$$\tilde{a}(\omega)P_{н}^{2}(\omega)-P_{k}^{2}(\omega)+\tilde{b}(\omega)P_{н}(\omega)q(\omega)-\tilde{c}(\omega)q^{2}(\omega)=0, \quad (3)$$

$$T_{к}(\omega)-T_{н}(\omega)\varepsilon^{\frac{m-1}{m}}=0\,, \quad (4)$$

$$\tilde{a}(\omega)=a_{2}(\omega);\ \tilde{b}(\omega)=b_{2}(\omega)\frac{n_{0}\gamma_{0}ZRT}{n1440};$$

$$\tilde{c}=c_{2}(\omega)\left(\frac{n_{0}\gamma_{0}ZRT}{n1440}\right)^{2}. \quad (5)$$

$$a_{2}(\omega)=\left(\frac{n}{n_{0}}\right)^{4}a_{1}(\omega)+2\left(\frac{n}{n_{0}}\right)^{2}a_{0}(\omega)+(1-\left(\frac{n}{n_{0}}\right)^{2})^{2}, \quad (6)$$

$$b_{2}(\omega)=\left(\frac{n}{n_{0}}\right)^{4}b_{1}(\omega)+2\left(\frac{n}{n_{0}}\right)^{2}(1-\left(\frac{n}{n_{0}}\right)^{2})b_{0}(\omega), \quad (7)$$

$$c_{2}(\omega)=\left(\frac{n}{n_{0}}\right)^{4}c_{1}(\omega)+2\left(\frac{n}{n_{0}}\right)^{2}(1-\left(\frac{n}{n_{0}}\right)^{2})c_{0}(\omega), \quad (8)$$

где $\omega\in\Omega$, (Ω,B,P) – вероятностное пространство, Ω – пространство элементарных событий; B - σ -алгебра событий из Ω; P – вероятностная мера на B; $P_{н}(\omega), P_{к}(\omega), T_{н}(\omega), T_{к}(\omega), q(\omega)$ – случайные величины, характеризующие соответственно начальные и конечные давления, температуры и расход природного газа на входе и выходе УТ и ГПА, $a_{0}(\omega), b_{0}(\omega), c_{0}(\omega), a_{1}(\omega), b_{1}(\omega), c_{1}(\omega)$ – коэффициенты аппроксимации модели ГПА, $Kt\,(\omega)$ – коэффициент теплопередачи от газа к грунту, $E(\omega)$ – коэффициент эффективности. Параметры модели представленные в виде констант: D – внутренний диаметр УТ; Dв – наружный диаметр УТ, L – длина УТ, S – теплоемкость газа, ε – степень сжатия газа, m – показатель политропы, n_{0} – номинальное число оборотов нагнетателя, γ_{0} – удельный вес газа в нормальных условиях, n – число оборотов нагнетателя, Z – коэффициент сжимаемости газа, R – газовая постоянная.; Tгр – средняя на некотором времени температура грунта на глубине залегания трубопровода, ρ_{0} – плотность газа при стандартных условиях; Δ – относительная плотность газа по воздуху; $k=10^{-5}$ – коэффициент шерховатости; g=9.8 – коэффициент свободного падения; P_{atm} – атмосферное давление.

5. Метрологическая аттестация математических моделей методом имитационного моделирования

Для разрешимости систем уравнений модели УТ (1), (2) и модели ГПА (3), (4) для каждого фиксированного $\tilde{\omega}\in\Omega$ необходимо задать значения реализаций всех независимых случайных величин и вычислить значения реализаций всех зависимых случайных величин. Зависимыми случайными величинами в (1), (2) и (3), (4) являются выходные значения давления $P_{к}(\tilde{\omega})$, и температуры $T_{к}(\tilde{\omega})$ природного газа, все остальные случайные величины являются независимыми. Для проведения метрологической аттестации моделей методом имитационного моделирования использовался датчик случайных чисел “RandomReal” программного пакета “WolframMathematica 9.0”, с помощью которого для каждого фиксированного $\tilde{\omega}\in\Omega$ генерировались значения независимых нормально распределённых случайных переменных:

$$P_{н}(\tilde{\omega})\cong N\left(m_{P_{н}},\sigma_{Pn}{}^{2}\right);\ T_{н}(\tilde{\omega})\cong N\left(m_{T_{н}},\sigma_{Tn}{}^{2}\right);$$

$$q(\tilde{\omega})\cong N\left(m_{q},\sigma_{q}{}^{2}\right);\ Kt(\tilde{\omega})\cong N\left(m_{Kt},\sigma_{Kt}{}^{2}\right);\ E(\tilde{\omega})\cong N\left(m_{E},\sigma_{E}{}^{2}\right)$$

с заданными параметрам распределения – математическими ожиданиями $m_{P_{н}}$ =50.165 атм; $m_{T_{н}}=56.792^{\circ}C$; m_{q} = 12.1 млн. $м^{3}$/сутки; m_{Kt} =1.34 вт/(м*с); m_{E} = =0.95идисперсиями: $\sigma_{Pn}{}^{2}$ =11.18454 $\sigma_{Tn}{}^{2}$ =14.3348; $\sigma_{q}{}^{2}$ = =0.650711; $\sigma_{Kt}{}^{2}$ =0.00798; $\sigma_{E}{}^{2}$ = 0.00401. Коэффициенты аппроксимации газоперекачивающих агрегатов. приведены ниже в табл. 2 и 4. Константы: $Tгр=20\,^{\circ}C$; D=1.0 м; L=100000 м; Dn=1.2 м; $\rho_{0}=0.7168\,кг/м^{3}$; Δ =0.58688; $k=10^{-5}$; R=8.3144 Дж/(моль*К); g= $=9.8\,м/с^{2}$; P_{atm} =1 атм; m=1.32724. Для каждого набора независимых переменных и заданных констант вычислялись значения зависимых случайных переменных $P_{к}(\tilde{\omega})$, $T_{к}(\tilde{\omega})$. Объем выборки набора независимых переменных и соответствующим им зависимых переменных составил 4000 значений. По полученным значениям $P_{к}(\tilde{\omega})$, $T_{к}(\tilde{\omega})$ были вычислены оценки математического ожидания $\hat{m}_{P_{к}},\hat{m}_{T_{к}}$; дисперсии $\hat{\sigma}_{P_{к}}{}^{2},\hat{\sigma}_{Tк}{}^{2}$, асимметрии $\hat{\mu}_{3\ P_{к}},\hat{\mu}_{3\ T_{к}}$ и эксцесса $\hat{\mu}_{4\ P_{к}},\hat{\mu}_{4\ T_{к}}$. Статистические характеристики независимых переменных для УТ и ГПА при их нормальном распределении приведены в табл. 1 и 2.

Таблица 1

Статистические характеристики независимых переменных для УТ при их нормальном распределении

Случайная величина	Задаваемое математическое ожидание m_{ξ}	Оценка математического ожидания $\hat{m}_{\xi}$	Дисперсия $\sigma_{\xi}{}^{2}$	Оценка дисперсии по данным $\hat{\sigma}_{\xi}{}^{2}$	Оценка асимметрии $\hat{\mu}_{3}$	Оценка эксцесса $\hat{\mu}_{4}$
$P_{н}(\tilde{\omega})$	50.165	50.1302	11.184	11.2162	0.033234	3.12224
$T_{н}(\tilde{\omega})$	328.79	328.464	480.46	475.911	0.039336	3.06707
$q_{н}(\tilde{\omega})$	12.1	12.0927	0.6507	0.64955	0.011415	3.04514
$kt(\tilde{\omega})$	1.34	1.33801	0.0079	0.00783	0.010883	2.94895
$E(\tilde{\omega})$	0.95	0.950029	0.0002	0.00025	0.035252	3.04444

Анализ статистических свойств сгенерированных независимых переменных показал, что они достаточно хорошо совпадает с их теоретически заданными свойствами.

В табл. 3, 4 представлены статистические характеристики зависимых переменных для УТ и ГПА

Границы интервалов неопределённости в предположении о равномерном распределеннии независимых случайных величин вычислялись по формуле $m_{\xi}\pm3\sigma_{\xi}$, где m_{ξ} и $\sigma_{\xi}{}^{2}$ заданные ранее статистические характеристики для нормально распределенных начальных случайных величин. В табл. 5, 6 представлены статистические характеристики независимых переменных моделей УТ и ГПА при их равномерном распределении.

Таблица 2

Статистические характеристики независимых переменных для ГПА при их нормальном распределении

Случайная величина	Задаваемое математическое ожидание m_ξ	Оценка математического ожидания $\hat{m}_\xi$	Дисперсия σ_ξ^2	Оценка дисперсии по данным $\hat{\sigma}_\xi^2$	Оценка асимметрии ˆ	Оценка эксцесса $\hat{\mu}_4$
$P_{\text{н}}(\tilde{\omega})$	38.775	38.7469	6.682225	6.80255	0.0548265	2.97706
$T_{\text{н}}(\tilde{\omega})$	307.716	307.636	420.8406	420.8406	0.0235	3.01881
$q_{\text{н}}(\tilde{\omega})$	13.2	13.1875	0.7744	0.792217	0.0220663	3.03942
$a_1(\tilde{\omega})$	1.055272	1.05306	0.004949	0.0050164	0.0582711	3.09445
$a_2(\tilde{\omega})$	0.002971	0.00297213	$3.92*10^{-8}$	$3.955*10^{-8}$	0.0352523	3.04444
$a_3(\tilde{\omega})$	–0.00001	–0.00001075	$5.149*10^{-13}$	$5.14*10^{-13}$	0.0246577	2.95955
$a_{01}(\tilde{\omega})$	1.181899	1.18267	0.0062	0.006117	0.0096969	2.87173
$a_{02}(\tilde{\omega})$	0.006201	0.00619862	$1.7*10^{-7}$	$1.733*10^{-7}$	0.0210385	2.95335
$a_{03}(\tilde{\omega})$	$-0.2*10^{-4}$	$0.\ 2343*10^{-4}$	$2.43*10^{-12}$	$2.41*10^{-12}$	0.0501466	3.06805

Таблица 3

Статистические характеристики зависимых переменных для УТ

Случайная величина	Оценка математического ожидания $\hat{m}_\xi$	Оценка дисперсии по данным $\hat{\sigma}_\xi^2$	Оценка асимметрии $\hat{\mu}_3$	Оценка эксцесса $\hat{\mu}_4$	Интервал неопределенности
$P_k(\tilde{\omega})$	41.1184	19.089428	0.23185	3.1881	28.18–54.04
$T_k(\tilde{\omega})$	301.3792	84.980686	0.03081	3.11416	274.02–328.17

Таблица 4

Статистические характеристики зависимых переменных для ГПА

Случайная величина	Оценка математического ожидания $\hat{m}_\xi$	Оценка дисперсии по данным $\hat{\sigma}_\xi^2$	Оценка асимметрии $\hat{\mu}_3$	Оценка эксцесса $\hat{\mu}_4$	Интервал неопределенности
$P_k(\tilde{\omega})$	44.3842	18.6726830	0.0210385	2.95335	31.73–56.90
$T_k(\tilde{\omega})$	318.139	471.476082	0.0501466	3.06805	251.53–383.92

Таблица 5

Статистические характеристики независимых переменных для УТ при равномерном распределении случайных величин

Случайная величина	Задаваемое математическое ожидание $\hat{m}_\xi$	Оценка математического ожидания $\hat{m}_\xi$	Задаваемая дисперсия $\hat{\sigma}_\xi^2$	Оценка дисперсии по данным $\hat{\sigma}_\xi^2$	Оценка асимметрии $\hat{\mu}_3$	Оценка эксцесса $\hat{\mu}_4$
$P_{\text{н}}(\tilde{\omega})$	50.165	50.018743	32.44455	32.1325	0.015477	1.80687
$T_{\text{н}}(\tilde{\omega})$	328.792	328.985	1393.742	1411.05	0.006681	1.78
$q_{\text{н}}(\tilde{\omega})$	12.1	12.0797	1.887576	1.93213	0.018454	1.80785
$kt(\tilde{\omega})$	1.34	1.342458	0.02315	0.023428	0.035580	1.78178
$E(\tilde{\omega})$	0.95	0.949229	0.000727	0.000719	0.008883	1.79389

Таблица 6

Статистические характеристики независимых переменных для ГПА при равномерном распределении начальных величин

Случайная величина	Задаваемое математическое ожидание $\hat{m}_\xi$	Оценка математического ожидания $\hat{m}_\xi$	Задаваемая дисперсия $\hat{\sigma}_\xi^{\,2}$	Оценка дисперсии по данным $\hat{\sigma}_\xi^{\,2}$	Оценка асимметрии $\hat{\mu}_3$	Оценка эксцесса $\hat{\mu}_4$
$P_н(\tilde{\omega})$	38.775	38.711616	19.38402	19.5688	0.002734	1.76812
$T_н(\tilde{\omega})$	307.716	306.76831	1220.788	1200.31	0.037332	1.80815
$q_н(\tilde{\omega})$	13.2	13.2053347	2.2464053	2.19935	0.009728	1.81228
$a_1(\tilde{\omega})$	1.055272	1.05554894	0.01435717	0.0141148	0.018825	1.78258
$a_2(\tilde{\omega})$	0.0029714	0.00297023	1.1138*10^{-7}	1.162*10^{-7}	0.031172	1.78435
$a_3(\tilde{\omega})$	–0.0000107	–0.0000108	1.488*10^{-12}	1.489*10^{-12}	0.028007	1.78052
$a_{01}(\tilde{\omega})$	1.181899	1.18067743	0.01800947	0.0178313	0.001070	1.80376
$a_{02}(\tilde{\omega})$	0.0062016	0.00620056	4.9584*10^{-7}	4.83152*10^{-7}	0.007050	1.78194
$a_{03}(\tilde{\omega})$	–0.0000234	–0.0000233	7.075*10^{-12}	7.111*10^{-12}	0.018466	1.84395

Анализ статистических свойств сгенерированных независимых переменных достаточно хорошо совпадает с их теоретически заданными.

В табл. 7, 8 приведены статистические характеристики зависимых переменных для моделей УТ и ГПА при равномерном законе распределения.

Таблица 7

Статистические характеристики зависимых переменных для УТ

Случайная величина	Оценка математического ожидания $\hat{m}_\xi$	Оценка дисперсии по данным $\hat{\sigma}_\xi^{\,2}$	Оценка асимметрии $\hat{\mu}_3$	Оценка эксцесса $\hat{\mu}_4$	Интервал неопределенности
$P_k(\tilde{\omega})$	40.79072	57.5353	0.171944	2.133822	19.22– –55.30
T ( )	300.9892	241.653	0.067859	1.958270	272.97– –339.07

Таблица 8

Статистические характеристики зависимых переменных для ГПА

Случайная величина	Оценка математического ожидания $\hat{m}_\xi$	Оценка дисперсии по данным $\hat{\sigma}_\xi^{\,2}$	Оценка асимметрии $\hat{\mu}_3$	Оценка эксцесса $\hat{\mu}_4$	Интервал неопределенности
$P_k(\tilde{\omega})$	43.97090	55.3941	0.1568	2.38769	25.44– –64.58
$T_k(\tilde{\omega})$	316.1176	1391.78	0.0399	1.99071	206.74– –427.44

Анализ результатов метрологической аттестации модели УТ (табл. 3, 7) и модели ГПА (табл. 4, 5) показывает, что при изменениии закона распределения независимых переменных моделей с нормального распределения на равномерное происходит расширение интервальной неопределенности зависимых переменных.

6. Метрологическая аттестация математических моделей методом статистической линеаризации

Для использования метода статистической линеаризации (СЛ) математические модели УТ и ГПА аналитического выражения для функций $P_к(\tilde{\omega})$, $T_к(\tilde{\omega})$.

Математическая модель УТ для вычисления $P_к(\tilde{\omega})$, $T_к(\tilde{\omega})$ может быть представлена в виде системы двух детерминированных, нелинейных дважды дифференцируемых функций от случайных аргументов:

$$P_к(\tilde{\omega}) = \sqrt{P_н^2(\tilde{\omega}) - \frac{\Delta L P_0\, Tcp(\tilde{\omega}) Zcp\, q(\tilde{\omega})^2\, \alpha\lambda}{D^{5.2} E(\tilde{\omega})^2\, g\pi^2\, Rv\, T_0^{\,2}}}, \tag{9}$$

$$T_к(\tilde{\omega}) = T_{гр} + (T_н(\tilde{\omega}) - T_{гр})\, e^{-\frac{62.6\, Kт(\tilde{\omega}) Dв L}{10^6\, q(\tilde{\omega}) \Delta S}}, \tag{10}$$

$$P_k(\tilde{\omega}) = \sqrt{\tilde{a}(\tilde{\omega}) P_н^2(\tilde{\omega}) + \tilde{b}(\tilde{\omega}) P_н(\tilde{\omega}) q(\tilde{\omega}) - \tilde{c}(\tilde{\omega}) q^2(\tilde{\omega})}, \tag{11}$$

$$T_к(\tilde{\omega}) = T_н(\tilde{\omega}) \left(\frac{P_к(\tilde{\omega})}{P_н(\tilde{\omega})} \right)^{\frac{m-1}{m}}. \tag{12}$$

Данный вид моделей позволяет применить к ним метод статистической линеаризации, суть которого заключается в разложении нелинейных функций в ряд Тейлора в заданной точке, соответствующей математическим ожиданиям с сохранением линейных членов. Тогда дисперсия зависимых величин $P_к(\tilde{\omega})$, $T_к(\tilde{\omega})$ может быть вычисленна в зависимости от дисперсии независимых величин по формулам:

$$\sigma_{Pk}^2 = \left(\frac{\partial Pк}{\partial Pн} \right)^2_{\hat{\hat{P}}н} \sigma_{Pн}^2 + \left(\frac{\partial Pк}{\partial \hat{\hat{T}}н} \right)^2_{\hat{\hat{T}}н} \sigma_{Tн}^2 + \left(\frac{\partial Pк}{\partial q} \right)^2_{\hat{\hat{q}}} \sigma_q^2 + \left(\frac{\partial Pк}{\partial Kt} \right)^2_{\hat{\hat{K}}t} \sigma_{Kt}^2 + \left(\frac{\partial Pк}{\partial E} \right)^2_{\hat{\hat{E}}} \sigma_E^2, \tag{13}$$

$$\sigma^2_{T\kappa} = \left(\frac{\partial T\kappa}{\partial P\text{н}}\right)^2_{\hat{\hat{P}}_\text{н}} \sigma^2_{P\text{н}} + \left(\frac{\partial T\kappa}{\partial \hat{\hat{T}}\text{н}}\right)^2_{\hat{\hat{T}}_\text{н}} \sigma^2_{T\text{н}} + \left(\frac{\partial T\kappa}{\partial q}\right)^2_{\hat{\hat{q}}} \sigma^2_{q} + \left(\frac{\partial T\kappa}{\partial Kt}\right)^2_{\hat{\hat{K}}t} \sigma^2_{Kt} + \left(\frac{\partial T\kappa}{\partial E}\right)^2_{\hat{\hat{E}}} \sigma^2_{E}, \quad (14)$$

$$\sigma^2_{P\kappa} = \left(\frac{\partial P\kappa}{\partial P\text{н}}\right)^2_{\hat{\hat{P}}_\text{н}} \sigma^2_{P\text{н}} + \left(\frac{\partial P\kappa}{\partial q}\right)^2_{\hat{\hat{q}}} \sigma^2_{q} + \left(\frac{\partial P\kappa}{\partial \tilde{a}}\right)^2_{\hat{\hat{a}}} \sigma^2_{\tilde{a}} + \left(\frac{\partial P\kappa}{\partial \tilde{b}}\right)^2_{\hat{\hat{b}}} \sigma^2_{\tilde{b}} + \left(\frac{\partial P\kappa}{\partial \tilde{c}}\right)^2_{\hat{\hat{c}}} \sigma^2_{\tilde{c}}. \quad (15)$$

$$\sigma^2_{T\kappa} = \left(\frac{\partial T\kappa}{\partial P\text{н}}\right)^2_{\hat{\hat{P}}_\text{н}} \sigma^2_{P\text{н}} + \left(\frac{\partial T\kappa}{\partial P\kappa}\right)^2_{\hat{\hat{P}}_\kappa} \sigma^2_{P\kappa} + \left(\frac{\partial T\kappa}{\partial \hat{\hat{T}}\text{н}}\right)^2_{\hat{\hat{T}}_\text{н}} \sigma^2_{T\text{н}}. \quad (16)$$

В табл. 9–12 приведены данные полученные методом статистической линеаризации.

Таблица 9

Статистические характеристики зависимых переменных для УТ при нормальном распределении начальных величин

Случайная величина	Оценка математического ожидания $\hat{m}_\xi$	Оценка дисперсии по данным $\hat{\sigma}_\xi^2$	Интервал неопределенности
$P_k(\tilde{\omega})$	41.4103	18.6099	35.29–47.52
$T_k(\tilde{\omega})$	301.109	82.7361	292.18–309.93

Таблица 10

Статистические характеристики зависимых переменных для ГПА при нормальном распределении начальных величин

Случайная величина	Оценка математического ожидания $\hat{m}_\xi$	Оценка дисперсии по данным $\hat{\sigma}_\xi^2$	Интервал неопределенности
$P_k(\tilde{\omega})$	44.313	18.76449	38.29–50.55
$T_k(\tilde{\omega})$	317.844	504.5234	303.89–331.85

Таблица 11

Статистические характеристики зависимых переменных для УТ при равномерном распределении начальных величин

Случайная величина	Оценка математического ожидания $\hat{m}_\xi$	Оценка дисперсии по данным $\hat{\sigma}_\xi^2$	Интервал
$P_k(\tilde{\omega})$	41.27761	53.474	33.41–49.4
$T_k(\tilde{\omega})$	301.1068	239.941	289.09–312.26

Таблица 12

Статистические характеристики зависимых переменных для ГПА при равномерном распределении

Случайная величина	Оценка математического ожидания $\hat{m}_\xi$	Оценка дисперсии по данным $\hat{\sigma}_\xi^2$	Интервал неопределенности
$P_k(\tilde{\omega})$	44.424014923	58.4555781	16.70–60.84
$T_k(\tilde{\omega})$	318.21	1494.93813	195.51–419.92

7. Метрологическая аттестация математических моделей методом вещественных интервалов

Метод интервалов заключается в использовании классического метода интервальной математики, в котором вместо случайных величин используются интервалы с границами совпадающими с интервалами распределения случаных величин. С помощью заданных ниже арифметических операции были получены значения интервалов конечных величин [7].

$$a = \left[\underline{a};\overline{a}\right];\ b = \left[\underline{b};\overline{b}\right]; \quad (17)$$

$$a + b = \left[\underline{a};\overline{a}\right] + \left[\underline{b};\overline{b}\right] = \left[\underline{a}+\underline{b};\overline{a}+\overline{b}\right]; \quad (18)$$

$$a - b = \left[\underline{a};\overline{a}\right] - \left[\underline{b};\overline{b}\right] = \left[\underline{a}-\overline{b};\overline{a}-\underline{b}\right]; \quad (19)$$

$$a * b = \left[\underline{a};\overline{a}\right] * \left[\underline{b};\overline{b}\right] = \left[\min\left\{\underline{a}\cdot\underline{b}, \underline{a}\cdot\overline{b}, \overline{a}\cdot\underline{b}, \overline{a}\cdot\overline{b}\right\}, \max\left\{\underline{a}\cdot\underline{b}, \underline{a}\cdot\overline{b}, \overline{a}\cdot\underline{b}, \overline{a}\cdot\overline{b}\right\}\right]; \quad (20)$$

$$a / b = \left[\underline{a};\overline{a}\right] / \left[\underline{b};\overline{b}\right] = \left[\underline{a},\overline{a}\right] * \left[1/\overline{b}, 1/\underline{b}\right]. \qquad 0 \notin b \quad (21)$$

Метод интервалов Каухера заключается в использовании отличающих от классической интервальной математики операций, которые более точно позволяют подсчитать отрицательные интервалы и нульсодержащие интервалы. Операции сложения и вычитания совпадают с операциями в классической интервальной математике, тогда как умножение отличается (табл. 13) [8].

$P := \{a \in KR \mid (\underline{a} \ge 0) \& (\overline{a} \ge 0)\}$ – неотрицательные интервалы, $Z := \{a \in KR \mid \underline{a} \le 0 \le \overline{a}\}$ – нульсодержащие интервалы, $-P := \{a \in KR \mid -a \in P\}$ – положительные интервалы, $\operatorname{dual} Z := \{a \in KR \mid \operatorname{dual} \in Z\}$ – интервалы, содержащиеся в нуле.

Метод центрированных интервалов заключается в замене интервалов на пару состоящую из центра и радиуса интервала. Для этого нового интервала выведены все арифметические операции, в качестве основы бала использована интервальная математика Каухера [9] (табл. 14). Пусть дано:

$$x = \frac{\underline{a}+\overline{a}}{2};\ vx = \frac{\overline{a}-\underline{a}}{2}; y = \frac{\underline{b}+\overline{b}}{2}; vy = \frac{\overline{b}-\underline{b}}{2}; \quad (22)$$

$$X = \langle x, vx \rangle; Y = \langle y, vy \rangle \quad (23)$$

$$X + Y = \langle x + y, vx + vy \rangle; \quad (24)$$

$$X - Y = \langle x - y, vx + vy \rangle; \quad (25)$$

$$s = \begin{cases} 1, & \text{если } vx \ge 0, vy \ge 0, \text{ или } vx \le 0, vy \le 0, \\ -1, & \text{если } vx \ge 0, vy \le 0, \text{ или } vx \le 0, vy \ge 0. \end{cases} \quad (26)$$

Таблица 13

Таблица Кэли для операции умножения в интервальной арифметике Каухера

Множество	$b \in P$	$b \in Z$	$b \in -P$	$b \in \text{dual } Z$
$a \in P$	$[\underline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}]$	$[\overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}]$	$[\overline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}]$	$[\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}]$
$a \in Z$	$[\underline{a}\overline{b}, \overline{a}\overline{b}]$	$[\min\{\underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}\}, \max\{\underline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\}]$	$[\overline{a}\underline{b}, \underline{a}\underline{b}]$	0
$a \in -P$	$[\underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}]$	$[\underline{a}\overline{b}, \underline{a}\underline{b}]$	$[\overline{a}\overline{b}, \underline{a}\underline{b}]$	$[\overline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}]$
$a \in \text{dual } Z$	$[\underline{a}\underline{b}, \overline{a}\underline{b}]$	0	$[\overline{a}\overline{b}, \underline{a}\overline{b}]$	$[\max\{\underline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\}, \min\{\underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}\}]$

Таблица 14

Таблица Кэли для операции умножения центрированных интервалов

Множество	$b \in P$	$b \in Z$	$b \in -P$
$a \in P$	$\langle x*y+vx*vy, y*vx+x*vy \rangle$	$\langle x*(y+s*\lvert vy \rvert), vx*(y+s*\lvert vy \rvert) \rangle$	$\langle x*y-vx*vy, y*vx-x*vy \rangle$
$a \in Z$	$\langle x*(y-s*\lvert vy \rvert), -vx*(y-s*\lvert vy \rvert) \rangle$	$\langle x*(y-s*\lvert vy \rvert), -vx*(y-s*\lvert vy \rvert) \rangle$	$\langle x*(y-s*\lvert vy \rvert), -vx*(y-s*\lvert vy \rvert) \rangle$
$a \in -P$	$\langle x*y-vx*vy, -y*vx+x*vy \rangle$	$\langle x*(y-s*\lvert vy \rvert), -vx*(y-s*\lvert vy \rvert) \rangle$	$\langle x*y+vx*vy, -y*vx-x*vy \rangle$

При использовании методов интервалов были взяты такие же интервалы независимых переменных, как и в равномерном распределении.

В табл. 15, 16 приведены результаты сравнения методов имитационного моделирования, статистической линеаризации и трех вариантов реализации метода вещественных интервалов.

Таблица 15

Результаты интервальной неопределенности, полученной методом ИМ, СЛ, и тремя вариантами реализации метода вещественных интервалов для УТ

Случайная величина	Участок трубопровода				
	ИМ	СЛ	Классический интервальный метод	Интервальный метод Каухера	Метод центрированных интервалов
$P_k(\tilde{\omega})$	28.18–54.04	35.29–47.52	18.44–55.93	18.44–55.93	18.44–55.93
$T_k(\tilde{\omega})$	287.84–314.48	292.18–309.93	272.20–343.09	272.20–343.09	272.20–343.09

Таблица 16

Результаты интервальной неопределенности, полученной методом ИМ, СЛ, и тремя вариантами реализации метода вещественных интервалов для ГПА

Случайная величина	Газоперекачивающий агрегат				
	ИМ	СЛ	Классический интервальный метод	Интервальный метод Каухера	Метод центрированных интервалов
$P_k(\tilde{\omega})$	31.73–56.90	35.29–47.52	32.52–57.36	32.52–57.36	32.52–57.36
$T_k(\tilde{\omega})$	272.97–339.07	292.18–309.93	226.45–428.06	226.45–428.06	226.45–428.06

7. Выводы

В результате выполненой работы был проведен сравнительный анализ трех методов метрологической аттестации математических моделей представленных в виде взаимосвязанных систем нелинейных деффеpенцируемых функций, аргументы которых содержат статистическую или интервальную неопределённость. В качестве методов метрологической аттестации использовались методы: имитационного моделирования, статистической линеаризации, вещественных интервалов. Анализ результатов метрологической аттестации модели УТ (табл. 3, 7) и модели ГПА (табл. 4, 8) показывает, что при изменении закона распределения независимых переменных моделей с нормального распределения на равномерное происходит расширение интервалов неопределенности зависимых переменных. Для сравнительного анализа были использованы стохастические модели УТ и ГПА. Результаты сравнительного анализа позволяют сделать следующие выводы:

1. Метрологическая аттестация методом имитационного моделирования не зависит от форм математической модели (аналитической или алгоритмической) и позволяет получить наиболее эффективные оценки интервалов неопределенности. Однако, также является достаточно трудоемким процессом, и требует значительных затрат машинного времени.

2. Метод статистической линеаризации целесообразно использовать для получения нижних оценок интервалов неопределенности для моделей, представленных в виде n-размерных дифференцируемых функций или алгебраических систем линейных или нелинейных уравнений.

3. Среди методов вещественных интервалов (классического, Каухера, центрированных интервалов), наиболее эффективным является метод центрированных интервалов, позволяющий получить наиболее эффективные оценки интервалов неопределенности, не налагая дополнительных ограничений на вид математических моделей.

Литература

1. Тевяшев, А. Д. Стохастические модели и методы оптимизации режимов работы газотранспортных систем [Текст] / А. Д. Тевяшев // Технологический аудит и резервы производства. – 2013. – Т. 6, № 4 (14). – С. 49–51. – Режим доступа: http://journals.uran.ua/tarp/article/view/19647/17337
2. Shuanggen, J. An improvement of GPS height estimations: stochastic modeling [Text] / J. Shuanggen, J. Wang, P.-H. Park // Earth, Planets and Space. – 2005. – Vol. 57. – P. 253–259. doi: 10.1186/bf03352561
3. Shapiro, A. Application of Stochastic Approaches to Modelling Suspension Flow in Porous Media Shapiro [Text] / A. Shapiro, H. Yuan; Skogseid, V. Fasano (Eds.). – Statistical Mechanics and Random Walks: Principles, Processes and Applications . Nova Science Publishers, Incorporated, 2012. – P. 1–36.
4. Тевяшев, А. Д. Оценивание параметров и метрологическая аттестация математической модели неизотермического режима транспорта природного газа по линейному участку магистрального газопровода [Текст] / А. Д. Тевяшев, В. А. Фролов, В. Б. Коток, О. А. Сендеров // Автоматизированные системы управления и приборы автоматики. – 2005. – Вып. 131. – С. 157–167.
5. Дубницкий, В. Ю. Сравнительный анализ результатов планирования нормативов банковской безопасности средствами классической и нестандартной интервальной математики [Текст] / В. Ю. Дубницкий, А. М. Кобылин // Радиоэлектронные и компьютерные системы. – 2014. – № 5 (69). – С. 29–33.
6. Евдокимов, А. Г. Оперативное управление потокораспределением в инженерных сетях [Текст] / А. Г. Евдокимов, А. Д Тевяшев. – Харьков: «ВИЩА ШКОЛА», 1980. – 144с.
7. Павловский, Ю. Н. Имитационное моделирование [Текст]: учеб. пос. / Ю. Н. Павловский, Н.В. Белотелов, Ю.И. Бродский. – М.: Издательский центр академия, 2008. – 236 с.
8. Koucher, E. Interval Analysis in the Extended Interval Space IR [Text] / E. Koucher // Computing Supplementum. – 1980. – Vol. 2. – P. 33–49. doi: 10.1007/978-3-7091-8577-3_3
9. Стоян, Ю. Г. Введение в интервальную геометрию [Текст]: учеб. пос. / Ю. Г. Стоян. – Х.: ХНУРЭ, 2006. – 98 с
10. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей. 4-е изд. [Текст] / Е. С. Вентцель. – Москва: Наука, 1969. – 576 с.

УДК 004.4, 519.688

DOI: 10.15587/1729-4061.2015.42609

РОЗРОБКА АЛГОРИТМУ ТА МІКРОПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ДЛЯ ЛОКАЛІЗАЦІЇ ТОЧОК ПЕРЕТИНУ КВАДРИК

Т. А. Марусенкова
Кандидат технічних наук, асистент*
E-mail: tetyana.marus@gmail.com

Д. О. Горман*
E-mail: hordon@ya.ru

*Кафедра програмного забезпечення
Національний університет
"Львівська політехніка"
вул. С. Бандери, 12, м. Львів, Україна, 79013

В роботі показано актуальність проблематики створення бібліотечних функцій локалізації розв'язків систем нелінійних рівнянь, зокрема для застосування у вбудованому програмному забезпеченні. Запропоновано алгоритм локалізації точок перетину кривих і поверхонь другого порядку, реалізований на мікроконтролері STM32F407VG з дотриманням вимог MISRA. Реалізація алгоритму може бути використана у мікропрограмному забезпеченні інтелектуальних сенсорів векторних величин

Ключові слова: інтелектуальні сенсори векторних величин, мікроконтролер, відділення коренів, локалізація, квадрика, ARM

В работе показана актуальность проблематики создания библиотечных функций локализации решений систем нелинейных уравнений, в том числе для встроенного программного обеспечения. Предложен алгоритм локализации точек пересечения кривых и поверхностей второго порядка, реализованный на микроконтроллере STM32F407VG с учетом требований MISRA. Реализация алгоритма может быть использована в микропрограммном обеспечении интеллектуальных сенсоров векторных величин

Ключевые слова: интеллектуальные сенсоры векторных величин, микроконтроллер, отделение корней, локализация, квадрика, ARM

1. Вступ

Сучасний стан розвитку техніки характеризується зростаючою значущістю інтелектуальних сенсорів [1–3] завдяки ряду їхніх характеристик, зокрема, самокалібруванню та самодіагностиці. Інтелектуальний сенсор є самостійним, логічно завершеним пристроєм, здатним обробляти дані, зібрані з давачів тих чи інших