

*На базі програмного комплексу АПРОКС методом скінченних елементів досліджено процес лінійного і нелінійного деформування каністр для зберігання нафтопродуктів. На базі розроблених скінченно-елементних моделей проведено чисельний аналіз та визначено напружено-деформований стан каністри для машинного масла. Наведено результати чисельного аналізу каністр для нафтопродуктів за умови їх штабельного зберігання, а також при падінні каністр. На основі виконаних розрахунків запропоновані проектно-конструкторські рекомендації до проектування подібного роду виробів*

*Ключові слова: метод скінченних елементів, чисельне моделювання, каністра, напружено-деформований стан*

*На базе программного комплекса АПРОКС методом конечных элементов исследован процесс линейного и нелинейного деформирования канистр для хранения нефтепродуктов. На базе разработанных конечно-элементных моделей проведен численный анализ и определено напряженно-деформированное состояние канистры для машинного масла. Приведены результаты численного анализа канистр для нефтепродуктов при их штабельном хранении, а также при падении канистр. На основе выполненных расчетов предложены проектно-конструкторские рекомендации к проектированию подобного рода изделий*

*Ключевые слова: численное моделирование, защитная оболочка АЭС, сейсмическая нагрузка, армоканаты, напряженно-деформированное состояние*

# ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ МІЦНОСТІ КАНІСТР ЗА УМОВ СТАТИЧНОГО ТА ДИНАМІЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

**О. В. Гондляр**

Доктор технічних наук, професор\*

E-mail: avg\_ru@mail.ru

**А. О. Чемерис**

Старший викладач\*

E-mail: chao73@gmail.com

**В. Ю. Онопрієнко**

Аспірант\*

E-mail: ixtofobius@gmail.com

\*Кафедра хімічного, полімерного

та силікатного машинобудування

Національний технічний університет України

«Київський Політехнічний Інститут»

пр. Перемоги, 37, м. Київ, Україна, 03056

## 1. Вступ

До зберігання й транспортування мастильних і трансмісійних рідин висуваються особливі вимоги, оскільки нечітке дотримання або порушення цих вимог може призвести не тільки до суттєвих фінансових втрат, але й зумовити ситуацію, яка б загрожувала здоров'ю людини, що працює з даним типом рідин.

Створення нових матеріалів, дослідження нових типів, форм та розмірів – такий перелік завдань ставлять перед собою виробники ємностей для зберігання й транспортування мастильних, паливних та інших рідин.

Недостатня інформація про характеристики впливів, складність і висока вартість проведення експериментів на фізичних моделях і натурних об'єктах при оцінці міцності та надійності каністр з різними формами та матеріалами, що використовуються – висувають на перший план розробку ефективних методів математичного моделювання, розробку уточнених математичних моделей, розробку методів і програм розрахунків на міцність каністр, проведення обчислювальних експериментів, тощо.

Саме тому актуальною є задача по розробці систем чисельного аналізу міцності каністр за умов статичного та динамічного навантаження, що включають геометричне моделювання та розрахунок каністр з урахуванням силового впливу від штабельного зберігання, а також від удару.

## 2. Аналіз літературних даних і постановка проблеми

У сучасній промисловості широкого використання набув такий матеріал, як поліетилен високої густини [1]. Він використовується для виробництва паливних баків, резервуарів для зберігання й транспортування рідин, великої кількості тари різного призначення. Саме цей матеріал поширений у виробництві такого типу тари як каністри невеликої ємності (1–5 л).

Каністра – це тонкостінна ємність складної геометричної форми. А тому визначення раціональної товщини стінки та форми є одним з найважливіших питань, що постає перед проектувальниками даного типу упаковок.

Відносно патенту [2], каністру з пластику неодноразово змінювали та модернізували. Та зміною конфігурації, розмірів та форми не завжди вдається уникнути недоліків даного виробу. В місцях стику двох частин каністри при виготовленні, виникає зона максимальної концентрації напружень яка вимагає особливої уваги при експериментальних іспитах на міцність.

Враховуючи різноманітність конфігурацій каністр різного призначення, досить важко (а інколи й неможливо) розраховувати їх на міцність за допомогою аналітичних залежностей. Тому товщину стінки приймають враховуючи деякий запас міцності, а потім

виконують експериментальні іспити на міцність, при яких канистру перевіряють на міцність від падіння при транспортуванні чи зберіганні штабелями. Перевірку на міцність при падінні виконують шляхом скидання 3-х канистр з висоти 0.6–0.8 метрів [3], а іспити на стискання при штабелюванні здійснюють ставлячи 2 ряди заповнених канистр один на другий, або навантажуючи нижній ряд вагою за формулою:

$$P = k \cdot 10M(H/n - 1), \quad (1)$$

де  $H$  – висота штабеля,  $n$  – висота канистри,  $M$  – маса бруто канистри,  $k$  – коефіцієнт запасу міцності ( $k=1.5$ ). Іспит на стискання проводиться 8 годин. Якщо не сталося порушень структури матеріалу, що може вплинути на зберігання продукції – ємність можна використовувати в промислових цілях.

Додатково, окрім вибору форми та розмірів ємності, обирають матеріал з якого буде виготовлена канистра. Сучасна практика використання паливних ємностей, що також можуть встановлюватись на транспортні засоби показує, що вони все частіше виконані з пластика. Багат шарова конструкція паливних баків надає їм можливість для задоволення вимогам міжнародних стандартів у цій галузі. Один з важливих вимог, що пред'являються до паливного баку є стійкість до займання. В статті [4] експериментально досліджено багат шаровий паливний бак від займання. Він складається з 5 або 6 різних шарів, структура якого широко використовується на ринку пластикових контейнерів, вироблених у Північній Америка і Японії. Найбільш часто використовується шестишарова структура, що складається з поліетилену високої щільності, вторинної сировини та клею.

У таких методиках визначення оптимальної товщини стінки та форми виробу є недоліки. При розрахунках за аналітичними залежностями, не враховуються індивідуальні особливості конструкції канистри (місця різкої зміни геометрії, локальні стоншення), а саме в таких місцях, як показує досвід, виникають зони концентрації напружень. Тому, в деяких випадках, обрана товщина стінки не забезпечить міцність конструкції. Це може призвести до необґрунтованих фінансових витрат на проектування і виготовлення нових прес-форм. Виходячи з цього, в більшості випадків при проектуванні канистр товщину їх стінок обирають із значним запасом міцності, але це також призводить до невиправданих витрат матеріалів, тобто до подорожчання виробу. Вказані недоліки можуть бути усунуті при залученні до розрахунків на міцність чисельних методів, провідне місце серед яких займає метод скінченних елементів.

Цей метод дозволяє з достатнім ступенем точності досліджувати особливості деформування й оцінювати рівень концентрації напружень в зонах, якими є місця різкої зміни геометрії досліджуваних об'єктів [5].

Так, на прикладі гідродинамічного аналізу паливного бака літака [6] було виявлено значні недоліки форми та фізико-технологічні характеристики використаного матеріалу. Досліди проводилися від дії статичних та значних динамічних навантажень, що може отримувати літак, для того, щоб оцінити можливі наслідки швидкості деформації в ємності на повітряну відмов. На додаток до експериментальної серії

випробувань, було проведено чисельне моделювання скінченно-елементних моделей завдяки програмному комплексу LS-Dyna. В результаті було проведено моделювання із застосуванням балістичних тестів на композитні структури заповненого звичайного та удосконаленого (армованого) паливного бака. У той час як неармована базова конструкція показала погані результати, значне поліпшення залишкової міцності і структурної цілісності від навантажень бути отримані з гібридною конструкції з металевими, стрілоподібними Z-підкріплення між шаруватих композитів.

Таким чином, було вирішено розробити на базі програмного комплексу АПРОКС систему, яка б дозволяла проводити аналіз міцності канистри шляхом проведення циклу чисельних розрахунків від навантажень, що зумовлені гідростатичним тиском від масла усередині канистри, а також тиску, що виникає від штабельному зберіганні ящиків з канистрами. Аналіз міцності канистр при динамічному навантаженні (падіння з висоти 0,8 м на абсолютно тверду поверхню) здійснювався шляхом урахування коефіцієнта динамічності, що визначався індивідуально з розрахунку на статичну міцність для кожного з досліджуваних об'єктів.

Оскільки визначення напруженого стану канистр із позицій класичних методів опору матеріалів у цьому випадку є неприйнятним, як метод розрахунку був обраний метод скінченних елементів.

Як матеріал для виготовлення канистр для масла був обраний поліетилен високої густини, що широко використовується у вітчизняному автомобілебудуванні для виготовлення паливних баків ємністю до 100 л.

Рівень інтенсивності внутрішнього гідростатичного тиску визначався для масла густиною  $898 \text{ кг/м}^3$  [7].

Оскільки величина максимальних переміщень у всіх трьох канистрах більше їхньої товщини, то визначення напружено-деформованого стану канистр здійснювалося з урахуванням великих переміщень у геометрично нелінійній постановці.

Розрахунки виконувалися на основі програмного комплексу автоматизації розрахунків на міцність оболонкових й комбінованих систем АПРОКС, розробленого в Національному технічному університеті України «КПІ».

Програмний комплекс АПРОКС призначений для дослідження методом скінченних елементів процесів лінійного й нелінійного деформування просторових комбінованих систем (оболонки, масивних, плоских й осесиметричних конструкцій).

Об'єктами дослідження можуть бути однорідні й багат шарові просторові конструкції, що використовуються в пакувальній індустрії, машинобудуванні, будівництві, авіа- чи суднобудуванні тощо.

### 3. Ціль та задачі дослідження

Метою роботи є дослідження напружено-деформованого стану канистр для зберігання нафтопродуктів та виявлення зон з максимальною концентрацією напружень, що виникають від дії зовнішніх сил. На основі отриманих результатів аналізу можна стверджувати про міцність та довговічність виробів.

Для досягнення поставленої мети були поставлені наступні завдання:

- з'ясувати особливості експериментальних досліджень, що проводять з виробами подібного роду;
- дослідити властивості та характер дії статичного та динамічного навантаження на каністри;
- на базі програмного комплексу АПРОКС розробити скінченно-елементну модель каністри для нафтопродуктів;
- провести чисельний аналіз каністр для нафтопродуктів за умови їх штабельного зберігання, а також при падінні;
- виявити зони максимальних концентрацій напружень у виробі;
- на основі виконаних розрахунків зробити висновки щодо проектування та використання подібного роду виробів.

#### 4. Теоретичні основи визначення НДС та міцності каністр для нафтопродуктів

Для дослідження напружено-деформованого стану плоских, осесиметричних, оболонкових і масивних тіл система реалізує ефективний варіант методу скінченних елементів – моментну схему [8]. Для деталізації напруженого стану багат шарових оболонок по товщині пакета шарів використовуються також уточнені моделі деформування (типу Тимошенко С. П.), засновані на ітераційно-аналітичній теорії оболонок, що дозволяє з достатньою для інженерних розрахунків точністю аналізувати НДС не тільки тонких і середніх по товщині, але також і товстих багат шарових й однорідних по товщині оболонкових систем.

При виборі методу інтегрування рівнянь руху за часом особливу увагу необхідно приділяти таким параметрам, як швидкість протікання процесу деформування, його нелінійність, вид навантаження (силове, теплове, кінематичне) і т. д.

Як відомо, широкий вибір методів вирішення задач динаміки [9] не дозволяє виділити якийсь домінуючий метод, який би задовольняв усьому спектру вимог, запропонованих для адекватного опису різноманітних за умовами протікання процесів. У зв'язку з цим широке застосування в інженерній практиці знайшли такі методи, як: метод центральних різниць, метод Ньюмарка, метод Вілсона, метод Хабболта [10] й ін., важливе значення при виборі яких мають такі характеристики, як точність, стійкість і ефективність.

З аналізу методів чисельного інтегрування рівнянь руху [11–13] можна судити про абсолютну стійкість таких методів, як метод Ньюмарка, метод Вілсона, метод Хабболта. Причому, при порівнянні точності цих методів, похибки методу Ньюмарка, викликані штучним загасанням і подовженням періоду коливань, які зі збільшенням кроку ростуть повільніше, ніж в інших методах [14]. Також можна відзначити, що при однакових кроках за часом похибки методу Ньюмарка нижчі, ніж у методів Вілсона і Гартіна [15].

Моделювання процесу тріщинотворення виконується в рамках феноменологічних теорій міцності, причому корекція тензора фізико-механічних характеристик руйнованої області виробляється залежно від виду руйнування – відриву, зсуву або зминання.

Моделювання фізичних нелінійних процесів здійснюється на основі теорії пластичного плинину із тран-

сляційним зміцненням, або в рамках деформаційної теорії пластичності.

В основу покладена концепція багатофрагментності або квазірегулярності дискретних моделей (регулярність розрахункової мережі скінченних елементів в межах фрагмента (підобласті) конструкції). Такий підхід дозволяє оптимізувати алгоритми керування даними та їх обробки.

Завдяки модульній структурі, система є відкритою для підключення нових теорій пластичності, а також нових алгоритмів розрахунку.

Розрахунки за допомогою системи передбачають виконання стандартних етапів, характерних для реалізації методу скінченних елементів.

#### 5. Числовий аналіз міцності каністр для нафтопродуктів

З урахуванням особливостей розроблена система дозволяє виконувати розрахунки на міцність для визначення еволюції компонент напружено-деформованого стану каністр для нафтопродуктів. На базі методики Ньюмарка, методу змінних жорсткостей та методу додаткових навантажень реалізований покроковий алгоритм розрахунку для моделювання еволюції напружено-деформованого стану каністр за нормальних умов штабельного зберігання та удару.

Складність геометрії використовуваних розрахункових сіток обумовлена наявністю підобластей, що відрізняються розмірами скінчених елементів (сітки згущуються в зонах концентрації напружень і розріджуються на периферії досліджуваної області основи). Вказана обставина потребує використання квазірегулярних дискретних моделей, тобто регулярних у межах підобласті. У цілому ж по області розрахункова сітка може бути нерегулярною.

Квазірегулярні розрахункові сітки дуже ефективні, тому що завдяки своїй нерегулярності по всій області, вони дозволяють із високою точністю описувати криволінійні обриси складних конструкцій, згущати сітку в зонах заданої концентрації напруг, апроксимувати багатозв'язкові області без нанесення сітки на вирізи і порожнини. У той же час регулярність розрахункової сітки в межах фрагментів забезпечила можливість автоматизувати ряд трудомістких процесів при підготовці даних (обчислення координат вузлів дискретної моделі і нумерація невідомих), оптимізувати структуру даних і алгоритми їхнього пошуку, пересилки й обробки в процесі розрахунків.

Координати, переміщення вузлів і зовнішні впливи розглядаються відносно глобальної декартової системи координат, а апроксимація координат, переміщень, деформацій і напружень у межах скінченних елементів виконується у локальній системі координат.

Апробація розробленої математичної моделі аналогічно до [16] виконується в рамках розробленої системи, яка була допрацьована з метою підвищення ефективності процесу задавання вихідних даних для розрахунків складних просторових конструкцій та забезпечення можливості візуалізації скінченно-елементної моделі і результатів розрахунку каністр для зберігання нафтопродуктів.

Спроба дискретизації моделей канистр із застосуванням тільки класичних тривимірних скінченних елементів призводить до появи поганої обумовленості матриці жорсткості моделі внаслідок перевищення обмежень по співвідношенню розмірів скінченних елементів в плані і по товщині тонких елементів. Крім того, у зв'язку з суттєвою піддатливістю цих елементів при їх деформуванні, характерним фактором є зміщення окремих частин канистри як жорсткого цілого, що може призвести до появи так званих «фіктивних» деформацій. Це вносить суттєву похибку при визначенні загальної картини напружено-деформованого стану канистри в цілому. Послідовне згущування сітки скінченних елементів дозволяє поступово долати описані недоліки, проте при цьому розмірність матриці жорсткості і, зрозуміло, кількість розв'язуваних рівнянь зростають до такого ступеня, що рішення подібної задачі стає настільки тривалим і ресурсоємним процесом, що може бути поставлена під сумнів доцільність застосування методу в цілому.

Вирішення описаних складнощів і проблем методу скінченних елементів було представлено О. С.Сахаровим, який запропонував ефективну модифікацію МСЕ – моментну схему скінченних елементів [17, 18]. Відмітною особливістю МССЕ, порівняно з класичним варіантом МСЕ, є той факт, що для будь-яких скінченних елементів і довільних законів апроксимуючих функцій завжди виконується умова рівності нулю деформацій при зміщеннях тіла як жорсткого цілого. Цей ефект досягається наближеним представленням деформацій у вигляді розкладання в ряд Тейлора та утриманням лише тих їх компонент, точний опис яких можливий на підставі заданого закону апроксимації переміщень.

Класифікаційно МССЕ може бути віднесений до гібридного типу скінченних елементів, оскільки розкладання виконується одночасно для переміщень і деформацій. При цьому, на відміну від інших типів скінченних елементів подібного роду, по МССЕ представлення деформацій приведені в сувору відповідність з порядком апроксимації функції переміщень, що дає можливість виключити з розгляду всі компоненти деформацій, що викликаються зміщенням тіла як жорсткого цілого, зберігаючи при цьому загальну геометричну незмінність системи.

Ефективність і надійність застосування моментної схеми скінченних елементів, якість і фізична адекватність отриманих на базі МССЕ результатів численних розрахунків для найширшого спектру задач, повністю підтвердили її високі показники щодо швидкості збіжності та економічності. Тому використання саме такої моделі є актуальною для побудови скінченно-елементної моделі.

На базі розроблених скінченно-елементних моделей (рис. 1) були проведені чисельні розрахунки канистр. В якості навантаження приймався гідростатичний тиск від дії рідини, навантаження при штабельному зберіганні канистр (6 рядів), а також динамічне навантаження внаслідок падіння канистри з висоти 0,8 м.

Результати чисельних розрахунків для канистр при товщині стінки 1 мм зведені у табл. 1.

При штабельному зберіганні канистри отримують відповідні зусилля від власної ваги, значення яких

залежить від кількості рядів. Виходячи з аналізу отриманих результатів розрахунку канистр, виявлено зони концентрації напружень. Канистра знаходиться в складному напружено-деформованому стані через вагу верхніх рядів. Максимальні напруження на розтяг становлять 1,09 МПа (рис. 2, а) при максимальних допустимих 45 МПа. Максимальні напруження на стиск (рис. 2, б) 0,98 МПа, при максимальних допустимих 40 МПа. Коефіцієнти запасу міцності значні та становить 41,2 і 40,8 відповідно. Сумарні переміщення в канистрі (місця з максимальними розтягуючи ми зусиллями) при штабельному зберіганні становлять 2,5 мм (рис. 3, а). Приведені напруження в канистрі становлять 1,3 МПа (рис. 5, а). Враховуючи значний запас міцності в канистрі та не критичні переміщення її можна рекомендувати до використання при нормальних умовах експлуатації та штабельному зберіганні.

Для дослідження поведінки канистр від падіння проводиться наступний розрахунок в середовищі APROKS. Задається графік навантаження канистри (різка зміна навантаження), тим самим моделюючи удар. В результаті чисельного розрахунку визначено характер зміни напружено-деформованого стану канистри від дії динамічного навантаження (рис. 6). Максимальні напруження в канистрі виникають безпосередньо після удару і становлять: на розтяг 2,9 МПа (рис. 4, а), на стиск 2,3 МПа (рис. 4, б). Максимальні допустимі напруження не перевищені, коефіцієнт запасу міцності становить 15 та 17,5 відповідно. Максимальні сумарні переміщення (рис. 3, б) становлять 6,1 мм в місці максимальних розтягуючих напружень. Максимальні приведені напруження в канистрі становлять 3,3 МПа (рис. 5, б).

Таблиця 1

Результати чисельних розрахунків канистри для нафтопродуктів

Характер навантаження	статичне	динамічне
Максимальні напруження на розтяг, МПа	1,09	2,9
Максимальні напруження на стиск, МПа	0,98	2,3
Максимальні допустимі напруження на розтяг, МПа	45	45
Максимальні допустимі напруження на стиск, МПа	40	40
Коефіцієнт запасу міцності (розтяг)	41	15,5
Коефіцієнт запасу міцності (стиск)	40	17
Максимальні приведені напруження, МПа	1,3	3,3
Максимальні сумарні переміщення*, мм	2,5	6,1

Примітка: \*переміщення в точці дії максимальних розтягуючих напружень

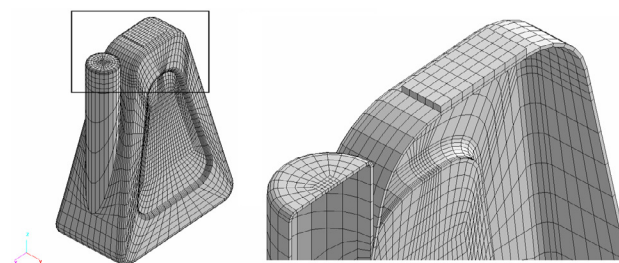


Рис. 1. Скінченно-елементна модель канистри



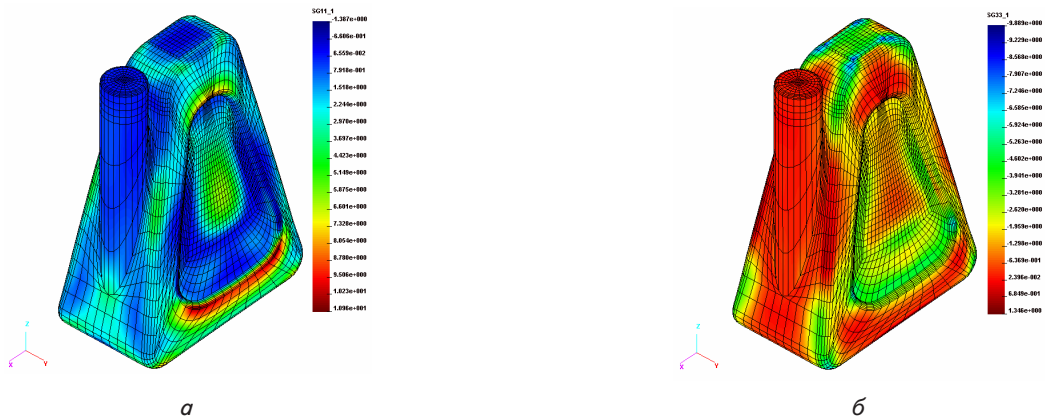


Рис. 2. Розподіл максимальних напружень в каністрі (штабельне зберігання): *а* – розтягуючі; *б* – стискаючі

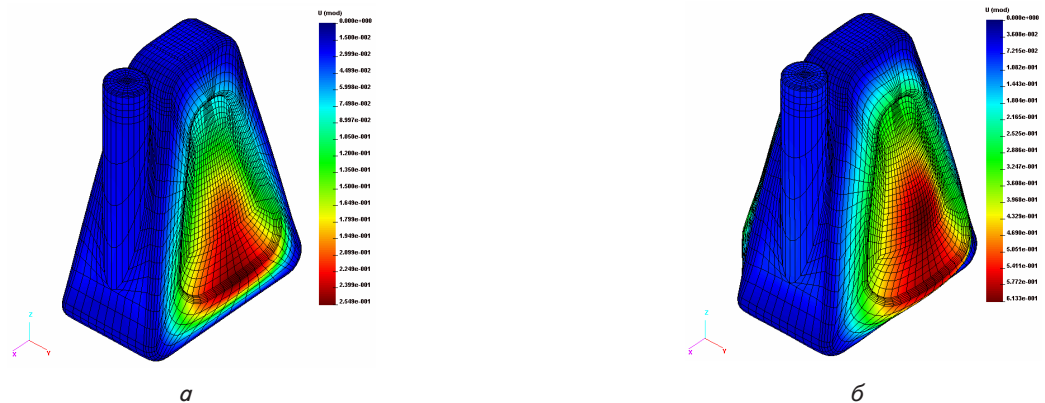


Рис. 3. Сумарні переміщення в каністрі: *а* – штабельне зберігання; *б* – динамічне навантаження

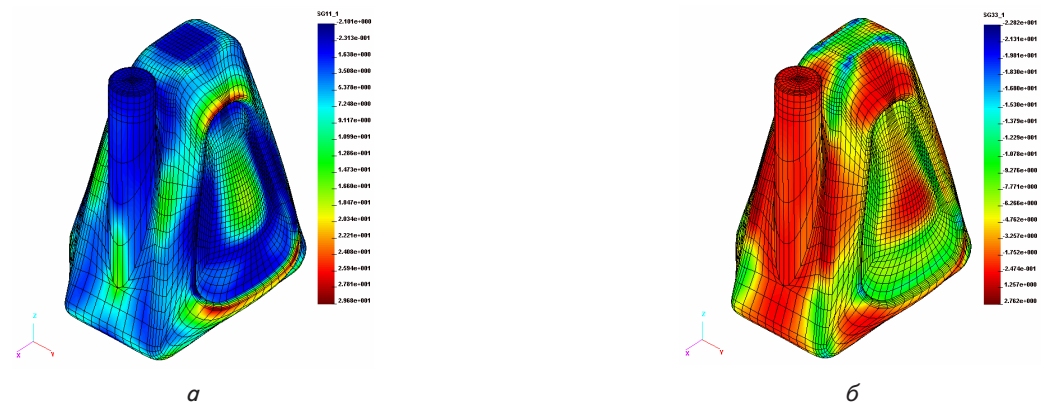


Рис. 4. Максимальні напружень в каністрі (динамічне навантаження): *а* – розтягуючі; *б* – стискаючі

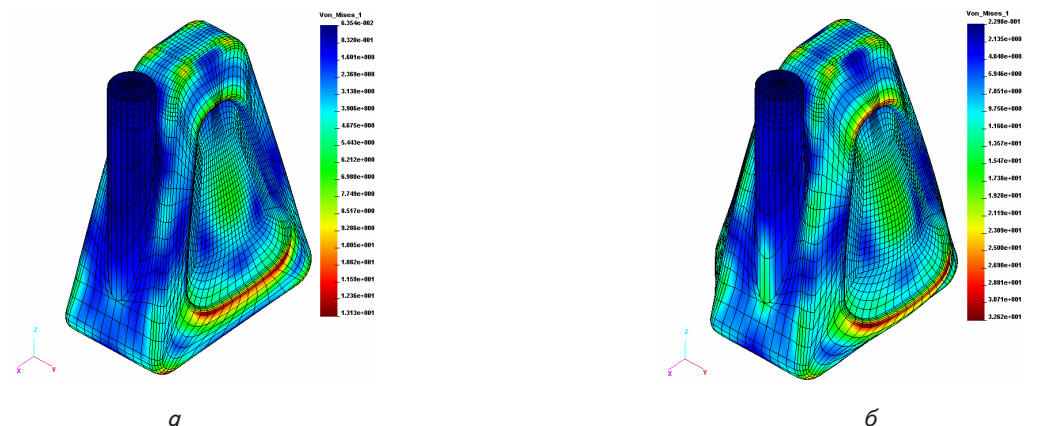


Рис. 5. Приведені напруження в каністрі: *а* – штабельне зберігання; *б* – динамічне навантаження

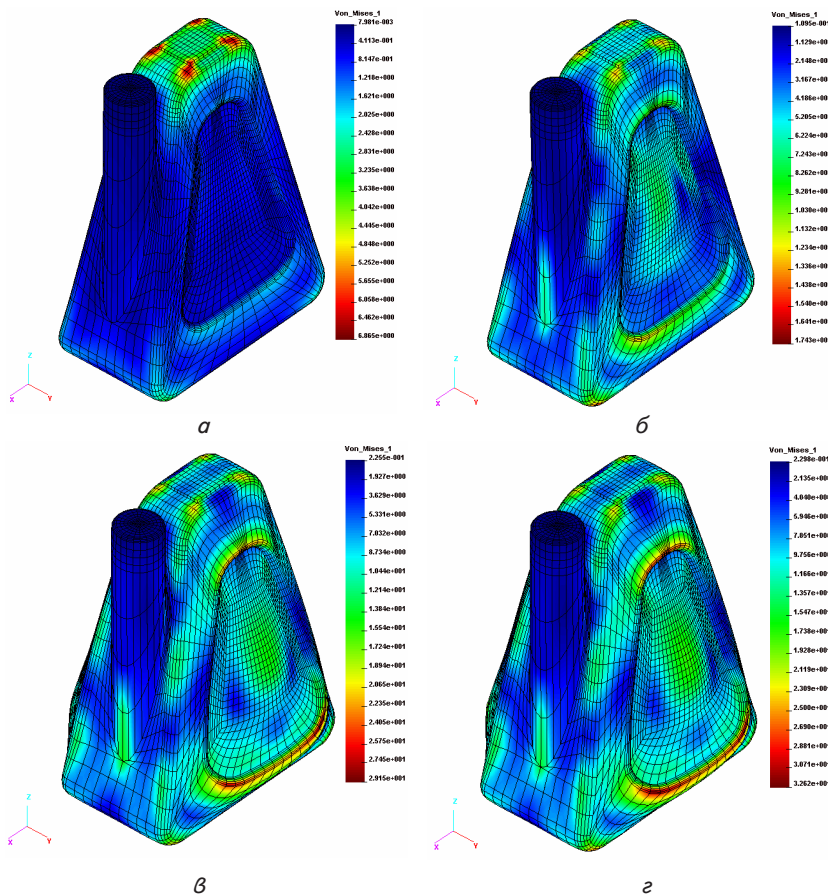


Рис. 6. Розподіл приведених напружень в канистрі (динамічне навантаження):  
 а – момент удару; б, в – розподіл приведених напружень по канистрі;  
 г – максимальні значення приведених напружень в канистрі

Відносно обраних критеріїв міцності можна зробити висновок щодо можливості проектування та використання досліджуваних виробів. В обох випадках (штабельне зберігання та удар) в канистрі можливе виникнення локальних зон руйнування та зародження в них мікродефектів, що може призвести до появи тріщин.

Враховуючи те, що основним чинником, що впливає на НДС конструкції, є сила удару, можна припу-

стити, що значення напружень будуть зростати пропорційно до сили удару.

Більш суворі умови, наприклад хімічна агресивність речовин, могли призвести до виникнення значних зон локального тріщиноутворення, значних деформацій і навіть руйнування. Крім того, періодичне повторення подібних навантажень призводить до накопичення втомних явищ і погіршення фізико-механічних властивостей матеріалу в виробі.

### 6. Висновки

На підставі розглянутих літературних джерел досліджено особливості чисельного аналізу міцності канистр для зберігання нафтопродуктів за умов статичного та динамічного навантаження.

На базі програмного комплексу АПРОКС із застосуванням моментної схеми скінченних елементів реалізовано систему, що дозволяє проводити чисельний аналіз міцності канистр різних форм та розмірів, з можливістю задання різних фізико-механічних властивостей матеріалу, в тому числі композитних матеріалів, в конкретній постановці задачі статичної та динамічної.

Реалізовано скінченно-елементну модель канистри для зберігання нафтопродуктів та проведено аналіз міцності виробу в двох постановках (штабельне зберігання, удар).

Виходячи з отриманих результатів розрахунку, що наведені у табл. 1, можна зробити висновок, що у такий спосіб міцність заданих канистр забезпечена при всіх умовах навантаження.

Товщина 1 мм для літрових канистр може бути рекомендована для виготовлення та штабельного зберігання подібного роду виробів.

### Література

1. Choi, D. Structure Development in Melt Spinning Syndiotactic Polypropylene and Comparison to Isotactic Polypropylene [Text] / D. Choi, J. L. White // International Polymer Processing. – 2000. – Vol. 15, Issue 4. – P. 398–405. doi: 10.3139/217.1608
2. Патент на корисну модель US [Текст] / Patent 215/1, B651 1/18, опубл. 24.11.1976.
3. Технические условия на канистры [Текст] / 2297-043-05757601-98.
4. Viorel, N. Considerations on building plastic fuel tanks and their attempt to fire test [Text] / N. Viorel, I. Sorin, E. Neagu, R. Racotă, A. Gligor, T. Mihail Aurel // Nonconventional Technologies Review, 2013. – P. 57–61.
5. Баженов, В. А. Нелинейные задачи механики многослойных оболочек [Текст] / В. А. Баженов, А. С. Сахаров, А. В. Гондляр, С. Л. Мельников. – К.: НД Будмеханіки, 1994. – С. 233–246.
6. Heimbs, S. Hydrodynamic ram analysis of aircraft fuel tank with different composite T-joint designs [Text] / S. Heimbs, T. Duwensee, A. C. Nogueira, J. Wolfrum // Structures Under Shock and Impact XIII. – 2014. – Vol 141. – P. 279–288. doi: 10.2495/susi140241
7. Лукасевич, С. Локальные нагрузки в пластинах и оболочках [Текст] / С. Лукасевич. – М.: Мир, 1982. – С. 216–235.
8. Сахаров, А. С. Метод конечных элементов в механике твердых тел [Текст] / А. С. Сахаров и др. – К.: Вища школа, 1982. – С. 214–279.
9. Бате, К. Численные методы анализа и метод конечных элементов [Текст] / К. Бате, В. Вилсон. – М.: Стройиздат, 1982. – С. 144–165.

10. Karamanlidis, D. The Linear Acceleration Time Integration Method revisited [Text] / D. Karamanlidis // Journal of Sound and Vibrations. – 1987. – Vol. 115, Issue 3. – P. 379–385. doi: 10.1016/0022-460x(87)90284-7
11. Сахаров, О. С. Исследование устойчивости осесимметричных оболочек при больших перемещениях с учетом физической нелинейности [Текст] / О. С. Сахаров, А. И. Гуляр, В. Н. Кислюкий // Проблемы прочности. – 1974. – № 6. – С. 42–47.
12. Теннисон, Р. С. Приложение кубического условия прочности к анализу разрушения слоистых композитов [Текст] / Р. С. Теннисон, Г. Э. Варрам, Г. Эллиот. – В кн. Прочность и разрушение композитных материалов: Зинатне, 1983. – С. 127–135.
13. Karamanlidis, D. A simple and efficient curved beam element for the linear and non-linear analysis of laminated composite structures [Text] / D. Karamanlidis // Computers and structures. – 2007. – Vol. 29, Issue 4. – P. 623–632. doi: 10.1016/0045-7949(88)90372-0
14. Bathe, K. J. Stability and accuracy of direct integration methods [Text] / K. J. Bathe, E. L. Wilson // Earthquake engineering and structural dynamics. – 1973. – Vol. 1, Issue 3. – P. 283–291. doi: 10.1002/eqe.4290010308
15. Nickell, R. E. On the stability of approximation operators in problem of structural dynamics [Text] / R. E. Nickell // International Journal of Solids and Structures. – 1971. – Vol. 7, Issue 3. – P. 499–520. doi: 10.1016/0020-7683(71)90028-x
16. Сахаров, О. С. Чисельне моделювання процесів руйнування захисної оболонки контура АЕС в результаті падіння на неї літака [Текст] / О. С. Сахаров, О. В. Гондляр, А. О. Чемерис // Вісті академії інженерних наук України. – 2005. – № 1. – С. 17–23.
17. Сахаров, О. С. САПР. Застосування програмного комплексу ВЕСНА в розрахунках процесів і обладнання з врахуванням термосилових навантажень - Навчальний посібник [Текст] / О. С. Сахаров, О. В. Гондляр, В. І. Сівецький, В. Ю. Щербина. – К.: Т«ЕКМО», 2008. – С. 128–155.
18. Сахаров, О. С. САПР. Інтегрована система моделювання технологічних процесів і розрахунку обладнання хімічної промисловості [Текст] / А. С. Сахаров, А. В. Гондляр, В. І. Сівецький, В. Ю. Щербина. – К.: ТОВ «Поліграф Консалтинг», 2006. – С. 108–126.

*Дана стаття присвячена вирішенню задачі про вільне коливання поздовжньо підкріпленої ортотропної циліндричної оболонки з в'язкою рідиною за допомогою варіаційного принципу. На основі варіаційного принципу Остроградського-Гамільтона побудовано частотне рівняння коливань поздовжньо підкріпленої ортотропної циліндричної оболонки, заповненої в'язкою рідиною і реалізовано чисельно. Діючі поверхневі навантаження з боку рідини на поздовжньо підкріплену циліндричну оболонку визначаються з рішень лінеаризованого рівняння Нав'є-Стокса*

*Ключові слова: коливання, оболонка, ідеальна рідина, напруга, в'язка рідина, підкріплення, принцип варіації*

*Данная статья посвящена решению задачи о свободном колебании продольно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки с вязкой жидкостью с помощью вариационного принципа. На основе вариационного принципа Остроградского-Гамильтона, построено частотное уравнение колебаний продольно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки, заполненной вязкой жидкостью и реализовано численно. Действующие поверхностные нагрузки со стороны жидкости на продольно подкрепленную цилиндрическую оболочку определяются из решений линеаризованного уравнения Навье-Стокса*

*Ключевые слова: колебания, оболочка, идеальная жидкость, напряжение, вязкая жидкость, подкрепление, принцип вариации*

УДК 539.2

DOI: 10.15587/1729-4061.2015.44393

# ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЯ ПРОДОЛЬНО ПОДКРЕПЛЕННОЙ ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

**А. И. Сейфуллаев**

Кандидат физико-математических наук\*

E-mail: a.seyfullayev@yahoo.com

**К. А. Новрузова**

Диссертант\*

Отдел «Волновая динамика»

E-mail: konul.novruzova1978@gmail.com

\*Институт Математики и Механики

Национальной академии наук Азербайджана

ул. Б. Вахабзаде, 9, г. Баку,

Азербайджан, AZ 1143

## 1. Введение

Исследование колебательных движений и переходных процессов в деформируемых оболочках с протека-

ющей либо покоящейся в них вязкой жидкостью имеет большое практическое значение. Конструкции в виде пластин и оболочек, взаимодействующих с упругой (жидкой) средой, нашли широкое применение в тех-