Література

1. Система проектної документації для будівництва. Основні вимоги до проектної та робочої документації. Загальні положення: ДСТУ Б А.2.4-4:2009. - [Чинний від 2010-01-01]. - К.: Мінрегіонбуд України, 2009. - IV, 57 с. - (Національний стандарт України).
2. Васильков, В.Г. Організація виробництва / В.Г.Васильков [навч. посібник]. – К.: КНЕУ, 2005. – 524 с.
3. Красс, М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом анализе: Учебник. – 3-е изд., исп. – М.: Дело, 2002. – 688 с.
4. Производственный менеджмент: [учеб. для вузов] / [Ильенкова С.Д. , Бандурин А.В., Горбовцов Г.Я. и др.]; под ред. С.Д. Ильенковой. - М.: ЮНИТИ, 2002. - 580 с.
5. Чейз, Р.Б. Производственный и операционный менеджмент / Р.Б.Чейз, Н.Дж.Эквилайн, Р.Ф.Якобс, 8-е изд. - М.: Изд. дом "Вильямс", 2004. - 704 с.

Abstract

Obviously, the quality standard of designed product depends on quality and optimality standard of designing decisions, made by the participant of designing process concerning the specific object, specificity and adjustment of mathematical apparatus, which helps to evaluate such optimality. The article suggests an approach to the estimation of quality optimum level of designed product by means of integrated quality indices of the taken designing decisions, taking into account designing specialization. The application of the suggested mathematical apparatus helps to form the development plan of design documentation (design decisions plan). Its application allows achieving the optimum quality level of designed product. Such approach to the estimation of the quality of designed product, with a glance of integrated quality indices of designed decisions making, provides the realization of the main requirement of the State Standard ISO 9001:2009 concerning the permanent improvement of the quality of designed product. It also helps to take into consideration the specificity and differences of each designing decision according to the sections of design documentation

Keywords: *quality, designed product, traffic problem*

УДК 539.37

АНАЛІТИЧНЕ РІШЕННЯ ХВИЛЕВОГО РІВНЯННЯ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ В ОБРОБЦІ МЕТАЛІВ ТИСКОМ

С.П. Шейко
Докторант, кандидат технічних наук, доцент
Кафедра обробки металів тиском
Запорізький національний технічний університет
вул. Жуковського, 64, м. Запоріжжя, Україна, 69063
Контактний тел.: 093-029-22-23
E-mail: sheyko.s@mail.ru

В обробці металів тиском має місце динамічні задачі теорії пружності та пластичності. Знайдено аналітичне рішення хвилевого рівняння теорії пружності. Показано, що поміж аргументами тригонометричних функцій є співвідношення в диференційній формі. Це розширює можливості рішення, не обмежуючи аргумент функції лінійною залежністю

Ключові слова: обробка металів тиском, теорія пружності, динамічна задача, гармонійна функція

В обработке металлов давлением имеют место динамические задачи теории упругости и пластичности. Получено аналитическое решение волнового уравнения теории упругости. Показано, что между аргументами тригонометрических функций существует соответствие в дифференциальной форме. Это расширяет возможности решения, не ограничивая аргумент функции линейной зависимостью

Ключевые слова: обработка металлов давлением, теория упругости, динамическая задача, гармоническая функция

1. Вступ

В процесах обробки металів тиском досить часто доводиться стикатися з динамічними задачами, які впливають на параметри процесу та якість готової продукції. До них можна віднести висадку болтів на горизонтально-кувальних машинах, коли пластична деформація поширюється уздовж стержня не миттєво, утворюючи потовщення у видаленій його частині. Також штампування складних тонкостінних виробів на устаткуванні із збільшеною швидкістю переміщення верхнього пуансона, Hasenclever (ФРН). За даними роботи [1] знижується пружна деформація механічної системи, і на 1.25 мм вдається отримати товщину тонкостінної частини менше. Пояснюється це тим, що пружна деформація системи відбувається в часі. Якщо пластичне формозмінення у осередку деформації реалізується швидше, ніж пружна деформація системи, то слід чекати, зменшення проміжку між бойками, отже, зменшення товщини виробу.

Використовуючи такий процес практично, можна добитися збільшення точності штампування, звуження поля допусків. Довести це цікаве явище теоретично можна тоді, коли буде відпрацьована математична модель запропонованої динамічної задачи, коли можна зіставити процеси в часі для пластичної і пружної деформації.

2. Аналіз літературних даних і постановка проблеми

Відомий широкий круг завдань механіки, який зводиться до рішення хвилевого рівняння [2-5]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} . \tag{1}$$

Зокрема, рівняння такого виду описують пружні подовжні, крутячі, поперечні коливання стержнів і так далі.

Рівняння (1) відноситься до рівнянь гіперболічного типу. Рішення такого типу рівнянь неоднорідних, складніших, в аналітичному виді представлені в роботах [6-8]. Скористаємося підходами, сформульованими в цих роботах, і запишемо досить просту залежність:

$$u = C \cdot \mathrm{Sin}\theta \cdot \mathrm{Sin}A\Phi, \tag{2}$$

де C і A – постійні, характеризуючи процес; θ, Φ – невідомі функції часу і координати.

Функції θ, Φ – безперервні, мають другі похідні за часом і відповідній координаті.

Підставимо вираження (2) в рівняння (1), після відповідних перетворень отримаємо рівняння (1) у виді

$$\begin{gathered}\left(\theta_{tt} - a^2 \cdot \theta_{xx}\right) \cdot \mathrm{Cos}\theta \cdot \mathrm{Sin}A\Phi + \\ 2\left(\theta_t A\Phi_t - a^2 \theta_x A\Phi_x\right) \mathrm{Cos}\theta \cdot \mathrm{Cos}A\Phi + \\ +\left(A\Phi_{tt} - a^2 A\Phi_{xx}\right) \cdot \mathrm{Sin}\theta \cdot \mathrm{Cos}A\Phi = 0 .\end{gathered} \tag{3}$$

де $\theta_t = \frac{\partial \theta}{\partial t}, A\Phi_x = \frac{\partial A\Phi}{\partial x}$ і так далі.

3. Мета роботи

Метою роботи є отримання аналітичного рішення хвилевого рівняння теорії пружності при розгляді динамічної задачі в обробці металів тиском.

4. Основна частина досліджень

Розглянемо спрощуючи варіанти рішення рівняння (3). Їх декілька:

1-ий варіант

$$\theta_t = -aA\Phi_x , \ A\Phi_t = -a\theta_x ;$$

2-ий варіант

$$\theta_t = aA\Phi_x , \ A\Phi_t = a\theta_x ;$$

3-ий варіант

$$\theta_t = -aA\Phi_x , \ A\Phi_t = a\theta_x ;$$

4-ий варіант

$$\theta_t = aA\Phi_x , \ A\Phi_t = -a\theta_x .$$

Підставляючи перші два варіанту в рівняння (3) отримаємо

$$\begin{gathered}\left(\theta_{tt} - a^2 \cdot \theta_{xx}\right) \cdot \mathrm{Cos}\theta \cdot \mathrm{Sin}A\Phi + \\ 2\left(\theta_t A\Phi_t - a^2 \theta_x A\Phi_x\right) \mathrm{Cos}\theta \cdot \mathrm{Cos}A\Phi + \\ +\left(A\Phi_{tt} - a^2 A\Phi_{xx}\right) \cdot \mathrm{Sin}\theta \cdot \mathrm{Cos}A\Phi = 0 .\end{gathered}$$

Рівняння (3) перетвориться на тотожність, якщо оператори, що стоять в дужках перед тригонометричними функціями перетворяться на нулі. Згідно з варіантами 1 і 2 з'явилися спрощення в (3) з першими похідними. Розглянемо другі похідні, використовуючи записи варіантів 1 і 2:

1-ий варіант

$$\theta_{tt} = -aA\Phi_{xt} , \ A\Phi_{tt} = -a\theta_{xt} ,$$

$$\theta_{tx} = -aA\Phi_{xx} , \ A\Phi_{tx} = -a\theta_{xx} ,$$

2-ий варіант

$$\theta_{tt} = aA\Phi_{xt} , \ A\Phi_{tt} = a\theta_{xt} ,$$

$$\theta_{tx} = aA\Phi_{xx} , \ A\Phi_{tx} = a\theta_{xx} .$$

З цього виходить

$$\theta_{tt} - a^2 \cdot \theta_{xx} = 0 ; \ \theta_t A\Phi_t - a^2 \theta_x A\Phi_x = 0 ;$$

$$A\Phi_{tt} - a^2 A\Phi_{xx} = 0 . \tag{4}$$

У справедливості виразів (4) можна переконатися, підставляючи другі похідні. У різних поєднаннях дужки, що стоять перед тригонометричними функціями в рівнянні (3) перетворюються на нулі.

Дійсно,

$$\begin{gathered}\left(\left(\mp aA\Phi_{xt}\right) - \left(\mp aA\Phi_{tx}\right)\right) \cdot \mathrm{Cos}\theta \cdot \mathrm{Sin}A\Phi + \\ 2\left(\left(\mp aA\Phi_x A\Phi_t\right) - a\left(\mp A\Phi_t\right) A\Phi_x\right) \mathrm{Cos}\theta \cdot \mathrm{Cos}A\Phi + \\ +\left(\left(\mp a\theta_{xt}\right) - \left(\mp a\theta_{tx}\right)\right) \cdot \mathrm{Sin}\theta \cdot \mathrm{Cos}A\Phi \equiv 0 .\end{gathered}$$

Отже, рішення рівняння (1) має вигляд

$$u = C \cdot \mathrm{Sin}\theta \cdot \mathrm{Sin}A\Phi ,$$

при

$$\theta_t = \mp aA\Phi_x\,,\ A\Phi_t = \mp a\theta_x\,. \tag{5}$$

Слід підкреслити, що умова (5) визначає не сам вид функції, що задовольняє рівнянню (1), а обмеження, які накладаються на функції.

Варіанти 3 і 4 не забезпечуються необхідними спрощеннями при підстановці залежності (5) в (1), з чого виходить, що (5) при наступних допущеннях $\theta_t = -aA\Phi_x$, $A\Phi_t = a\theta_x$ і $\theta_t = aA\Phi_x$, $A\Phi_t = -a\theta_x$ не є рішенням рівняння (1). Слід підкреслити, що функції θ і $A\Phi$ одночасно кожна можуть залежати і від часу і від координати осередку деформації.

На базі отриманого результату рішення можна представити в більш складнішому виді

$$u = C_0\cdot(C_1\mathrm{Sin}\theta + C_2\mathrm{Cos}\theta)\cdot(C_3\mathrm{Sin}A\Phi + C_4\mathrm{Cos}A\Phi).\,, \tag{6}$$

Підставляючи (6) в (1) і групуючи, з'являються оператори, які були отримані раніше (4):

$$\begin{aligned}
&\Big\{C_1C_3\left(\theta_{tt} - a^2\theta_{xx}\right) - C_2C_4\left(A\Phi_{tt} - a^2A\Phi_{xx}\right) - \\
&-2C_1C_4\left(\theta_t A\Phi_t - a^2\theta_x A\Phi_x\right) - C_2C_3\Big[\left(\theta_t + a\cdot A\Phi_x\right)\cdot\left(\theta_t - a\cdot A\Phi_x\right) + \\
&+\left(A\Phi_t + a\theta_x\right)\left(A\Phi_t - a\theta_x\right)\Big]\Big\}\mathrm{Cos}\theta\cdot\mathrm{Sin}A\Phi + \\
&+\Big\{C_1C_3\Big[\left(\theta_t + a\cdot A\Phi_x\right)\cdot\left(\theta_t - a\cdot A\Phi_x\right) + \left(A\Phi_t + a\theta_x\right)\left(A\Phi_t - a\theta_x\right)\Big] - \\
&-2C_2C_4\left(\theta_t A\Phi_t - a^2\theta_x A\Phi_x\right) + C_1C_4\left(A\Phi_{tt} - a^2A\Phi_{xx}\right) + \qquad (7)\\
&+C_2C_3\left(\theta_{tt} - a^2\theta_{xx}\right)\Big\}\mathrm{Sin}\theta\cdot\mathrm{Sin}A\Phi + \Big\{2C_1C_3\left(\theta_t A\Phi_t - a^2\theta_x A\Phi_x\right) - \\
&-C_2C_4\Big[\left(\theta_t + a\cdot A\Phi_x\right)\cdot\left(\theta_t - a\cdot A\Phi_x\right) + \left(A\Phi_t + a\theta_x\right)\left(A\Phi_t - a\theta_x\right)\Big] + \\
&+C_1C_4\left(\theta_{tt} - a^2\theta_{xx}\right) + C_2C_3\left(A\Phi_{tt} - a^2A\Phi_{xx}\right)\Big\}\cdot\mathrm{Cos}\theta\cdot\mathrm{Cos}A\Phi + \\
&+\Big\{C_1C_3\left(\theta_{tt} - a^2\theta_{xx}\right) - C_2C_4\left(\theta_{tt} - a^2\theta_{xx}\right) - \\
&-C_1C_4\ \Big[\left(\theta_t + a\cdot A\Phi_x\right)\cdot\left(\theta_t - a\cdot A\Phi_x\right) + \left(A\Phi_t + a\theta_x\right)\left(A\Phi_t - a\theta_x\right)\Big] - \\
&-2C_2C_3\left(\theta_t A\Phi_t - a^2\theta_x A\Phi_x\right)\Big\}\mathrm{Sin}\theta\cdot\mathrm{Cos}A\Phi = 0\,.
\end{aligned}$$

В процесі перетворень в рівнянні (7) з'являються ті ж співвідношення (4), що і в рівнянні (3). Це, незважаючи на різні поєднання, знову введених коефіцієнтів, і тригонометричних функцій.

Таким чином, рішення (6) задовольнятиме рівняння (1) за умови, коли мають місце відношення між функціями виду:

$$\theta_t = \mp aA\Phi_x\,,\ A\Phi_t = \mp a\theta_x\,.$$

Із співвідношень (4) маємо диференціальні рівняння в приватних похідних, де дозволяючими функціями будуть функції, що вводяться в розгляд θ і $A\Phi$. Ці рівняння по конструкції і типу відповідають рівнянню (1). З урахуванням останніх зауважень для (1) маємо

$$u = C_0\cdot(C_1\mathrm{Sin}\theta + C_2\mathrm{Cos}\theta)\cdot(C_3\mathrm{Sin}A\Phi + C_4\mathrm{Cos}A\Phi),$$

$$\theta_t = \mp aA\Phi_x\,,\ A\Phi_t = \mp a\theta_x\,, \tag{8}$$

$$\theta_{tt} - a^2\cdot\theta_{xx} = 0\,;\ A\Phi_{tt} - a^2A\Phi_{xx} = 0\,.$$

З обліком (8) невизначеність для функцій θ і $A\Phi$ ліквідована, оскільки існують диференціальні рівняння, що дозволяють ці функції знайти. Один з варіантів може бути отриманий у разі простого рішення гіперболічного рівняння для $A\Phi$, $A\Phi_{tt} - a^2A\Phi_{xx} = 0$, тобто

$$A\Phi = A\cdot x\cdot t\,.$$

При цьому

$$\theta_t = a\cdot A\cdot t\,,\ a\cdot\theta_x = A\cdot x\,.$$

Інтегруючи, отримаємо

$$\theta = A\frac{a\cdot t^2}{2} + f(x)\,,\ \theta = A\frac{x^2}{2a} + f(t)\,,$$

або

$$\theta = \frac{1}{2}\cdot A\left(a\cdot t^2 + \frac{x^2}{a}\right).$$

Слід переконатися, задовольняє функція θ гіперболічному рівнянню $\theta_{tt} - a^2\cdot\theta_{xx} = 0$. Після підстановки має місце тотожність $Aa - a^2A\cdot\frac{1}{a} \equiv 0$. При цьому не виключається, що приведеним вище співвідношенням задовольняються рішення отримані методом розподіли змінних.

З представленого приватного рішення видно, що аргументи тригонометричних функцій не є функцією тільки одного змінного. Кожна залежить одночасно від часу і координати, але ці функції різні і визначаються співвідношеннями (5) або (8) і не є лінійними.

Враховуючи, що хвилеве рівняння лінійне, остаточний результат можна представити у вигляді суперпозиції рішень

$$u = \sum_{i=1}^{i=n} C_{i,0}\cdot\left(C_{i,1}\mathrm{Sin}\theta_i + C_{i,2}\mathrm{Cos}\theta_i\right)\cdot\left(C_{i,3}\mathrm{Sin}A_i\Phi_i + C_{i,4}\mathrm{Cos}A_i\Phi_i\right),$$

$$\theta i_{i,t} = \mp aA_i\Phi_{i,x}\,,\ A_i\Phi_{i,t} = \mp a\theta_{i,x}\,, \tag{9}$$

$$\theta_{i,tt} - a^2\cdot\theta_{i,xx} = 0\,;\ A\Phi_{i,tt} - a^2A\Phi_{i,xx} = 0\,.$$

Рішення (8), (9) можна привести до вже відомих рішень, які викладені в роботі [3]. Використовуючи метод розподілу змінних, отримано вираження u_n:

$$u_n = \left(A_n\mathrm{Cos}\frac{\pi\cdot n}{l}\cdot at + B_n\mathrm{Sin}\frac{\pi\cdot n}{l}\cdot at\right)\cdot\mathrm{Sin}\frac{\pi\cdot n}{l}\cdot x\,. \tag{10}$$

Встановимо відповідність коефіцієнтів в рішеннях (8) і (10) і визначимо співвідношення між функціями. Очевидно

$$C_2 = B_n\,,\ C_1 = A_n\,,\ \theta = \frac{\pi\cdot n}{l}\cdot at\,,$$

$$A\Phi = \frac{\pi\cdot n}{l}\cdot x\,,\ C_0 = 1\,,\ C_4 = 0\,.$$

Тоді з урахуванням спрощень маємо

$$u_n = \left(A_n\mathrm{Cos}\theta + B_n\mathrm{Sin}\theta\right)\cdot\mathrm{Sin}A\Phi\,.$$

Покажемо, що між функціями, приведеними в роботі [3], існують співвідношення виду (5), (6) і (8).

Дійсно

$$\theta_t = \frac{\pi \cdot n}{l} \cdot a\,,\ A\Phi_x = \frac{\pi \cdot n}{l}\,,\ A\Phi_t = 0\,,\ \theta_x = 0\,.$$

Підставляючи в співвідношення

$$\theta_t = \mp a A\Phi_x\,,\ A\Phi_t = \mp a \theta_x\,,$$

переконуємося, що вони задоволені, мають вигляд

$$\frac{\pi \cdot n}{l} \cdot a = a \cdot \frac{\pi \cdot n}{l}\,,\ 0 = a \cdot 0\,.$$

Функції $\theta = \frac{\pi \cdot n}{l} \cdot at$ і $A\Phi = \frac{\pi \cdot n}{l} \cdot x$ задовольняють гармонійним диференціальним рівнянням (8)

$$\theta_{tt} - a^2 \cdot \theta_{xx} = 0\,;\ A\Phi_{tt} - a^2 A\Phi_{xx} = 0\,.$$

Таким чином, функції у виразенні (10) задовольняє вказаним співвідношенням функцій представлених в рішеннях (8) і є часткою рішення.

Слід підкреслити, що в рішеннях (8), (9) визначається не вид самих функцій, які задовольняють хвилеве рівняння, а умови існування цих функцій, що формулює загальні підходи отримання шуканого рішення.

При пропонованій постановці і рішенні з'являється можливість розширення круга вирішуваних завдань за рахунок більшої різноманітності граничних і початкових умов.

5. Висновки

1. У обробці металів тиском мають місце різноманітні динамічні завдання, що вимагають свого рішення.
2. Отримано аналітичне приватне рішення хвилевого рівняння.
3. Визначені умови існування функцій, що входять в рішення задачі.
3. Залежності аргументів тригонометричних функцій різні і визначаються одночасно двома змінними, часом і координатою, задовольняючи при цьому приведеним умовам існування даних функцій.
4. Умови існування функцій що входять в запропоноване рішення задачі, задоволені вже відомими виразами, отриманих методом розподілу змінних.

Література

1. Норицин, И.А. Проектирование кузнечных и холодноштамповочных цехов и заводов [Текст] / И.А. Норицин. – М.: Высшая школа, 1977. – 422 с.
2. Пановко, Я.Г. Основы прикладной теории упругих колебаний и удара [Текст] / Я.Г. Пановко. – Л.: Машиностроение, 1976. – 320 с.
3. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики [Текст] / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука. 1966. – 724 с.
4. Бабанов И.М. Теория колебаний [Текст] / И.М. Бабанов. – М.: Наука. 1968. – 560 с.
5. Бронштейн, И.М. Справочник по математике [Текст] / И.М. Бронштейн, К.Л. Семендяев. – М.: Наука. 1964. – 608 с.
6. Чигиринский, В.В. Метод решения задач теории пластичности с использованием гармонических функций [Текст] / В.В. Чигиринский // Изв вузов. Черная металлургия. – 2009. – №5. – С. 11-16.
7. Чигиринский, В.В. Новый метод решения задач теории пластичности [Текст] / В.В. Чигиринский // Новые материалы и технологии в металлургии и машиностроении. –Запорожье, 2008. – №1. – С. 57-62.
8. Chygyrynskiy, V.V. The Influence of the Temperature Factor on Deformability of the Plastic Medium [Text] / V.V. Chygyrynskiy, I. Mamuzic, F.Vodopivec, I.V. Gordienko // Metalurgija. – Zagreb, 2006. – Vol.45, br.2. – P.115-118.

Abstract

The dynamical problems of the elasticity and plasticity theories occur in the process of metal forming. In the article, an analytical solution of the wave equation of the elasticity was obtained. The differential relations, converting the wave equation into an identity, were obtained, using the product of trigonometric functions with arguments, defined by time and space variables. The conditions of solutions, which are different from the solution, obtained by the method of separation of variables, are described. The arguments of function can be nonlinear dependences from the variables. The restrictions were imposed on the function arguments, suggesting that the latter may have different order, just to satisfy the conditions of solutions. Another peculiarity of the solution is the presence of two simultaneous variables in expressions of arguments. It was shown that between the arguments of trigonometric functions there is a correspondence in differential form. This expands possibilities of the solution, not limiting the argument of function by linear dependence. The suggested solution accommodates well-known solutions, and is considered more general in comparison with the expressions obtained by the method of separation of variables. This allows expanding of the range of dynamic problems for the account of greater variety of boundary and initial conditions.

Keywords: *metal forming, elasticity theory, dynamic problem, harmonic function*