

ВПЛИВ ТЕРТЯ НА ВІДСТАВАННЯ ПРУЖНОЇ ОСНОВИ ВІД ШТАМПА З ПЛОСКОЮ ПІДОШВОЮ

І. О. Александров

Аспірант*

E-mail: heepper@gmail.com

А. К. Приварников

Доктор фізико-математичних наук, професор*

E-mail: privarnikovak@mail.ru*

Кафедра алгебри та геометрії

Запорізький національний університет

вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, Україна, 69600

При вдавлюванні штамп з гладкою плоскою підшоною у двошарову пружну основу з жорстким верхнім шаром має місце відокремлення основи від штамп незалежно від величини сили, що діє на штамп. У статті доведено, що наявність тертя між штампом і двошаровою основою може призводити до зникнення відокремлення основи від штамп

Ключові слова: пружна двошарова основа, штамп з плоскою підшоною, кулоново тертя, відставання

При вдавливании штампа с гладкой плоской подошвой в двухслойное упругое основание с жестким верхним слоем имеет место отставание основания от штампа независимо от величины силы, которая действует на штамп. В статье доказано, что наличие трения между штампом и двухслойным основанием приводит к исчезновению отставания основания от штампа

Ключевые слова: упругое двухслойное основание, штамп с плоской подошвой, кулоново трение, отставание

1. Вступ

У розрахунках на міцність і жорсткість автомобільних доріг, аеродромних смуг, підлог шкідливих хімічних цехів, багат шарових підлог атомних електростанцій потрібно розв'язувати складні контактні задачі теорії пружності для багат шарових основ. Розв'язання будь-якої нової контактної задачі потребує розробки спеціальних математичних прийомів. Причому для отримання якісних результатів розрахунків на міцність і жорсткість потрібно враховувати не тільки нормальні напруження між контактуючими тілами, але й дотичні, які зумовлені тертям між цими тілами при їх деформації. До числа таких задач відносяться просторові контактні задачі для багат шарових основ з довільним числом шарів. При цьому актуальною є розробка алгоритму розв'язання нових просторових контактних задач для багат шарових пружних основ з довільним скінченим числом шарів, який дозволяє враховувати кулоново тертя між штампом і основою та визначати області відокремлення основи від штамп і області прослизання й зчеплення штамп з основою. Це, очевидно, дало б змогу виявити ефект впливу тертя на форму області відставання основи від штамп.

2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми

На теперішній час для чисельного розв'язання контактних задач теорії пружності з урахуванням тертя зазвичай використовуються методи, які базуються на варіаційній постановці задачі [1, 2]. Існують також методи зведення контактних задач з урахуванням тертя до операторних рівнянь, які розв'язуються чисельно спеці-

альними методами [3–6]. До останнього часу контактні задачі про взаємодію штамп з пружною основою розглядались лише для основ з числом шарів не більшим чотирьох. У роботах [7, 8] розв'язано контактні задачі про дію штамп на пружний півпростір та пружну полосу з урахуванням тертя. У роботі [5] розв'язано аналогічну просторову контактну задачу для одношарової основи. У роботі [4] розв'язано просторову контактну задачу з урахуванням тертя для двошарової основи. У роботі [9] розв'язана контактна задача для тришарової полоси з урахуванням тертя між штампом і половою. Причому в цих публікаціях питання про відокремлення основи від штамп з плоскою підшоною не розглядалось. Для суттєво багат шарових основ контактні задачі розв'язувались в роботах [10, 11]. У роботі [11] розв'язана осесиметрична контактна задача про відокремлення основи від штамп з плоскою підшоною без урахування тертя між штампом і багат шаровою основою. На відміну від згаданих вище робіт у нинішній публікації автора запропоновано алгоритм розв'язання контактних задач для пружних багат шарових основ, у якому не накладається обмежень на кількість шарів в основі, на вид деформації основи, на можливість відокремлення й прослизання плоскої підшови штамп відносно основи.

У вихідному положенні штамп (абсолютно тверде тіло) всією плоскою підшоною Ω_1 торкається пружної багат шарової основи, не деформує її (рис. 1). Вважаються відомими прямолінійне поступальне переміщення штамп $\bar{\Delta}(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$ з вихідного положення, коефіцієнт тертя між контактуючими тілами. Контакт штамп з основою вважається одностороннім. Потрібно визначити нормальні та дотичні контактні напруження, області прослизання та відставання основи від штамп. На рис. 1 через E_i, ν_i, h_i позначені

модуль Юнга, коефіцієнт Пуассона та товщина і-того шару основи ($i=1, n+1$). Багатошарова основа – це пакет однорідних ізотропних шарів, який розташовано на абсолютно жорсткому або пружному однорідному ізотропному півпросторі [12]. Кожний шар обмежено лише двома паралельними площинами. Будь-які два сусідніх шари основи спаяні. Пружні властивості та товщини різних шарів можуть бути різними.

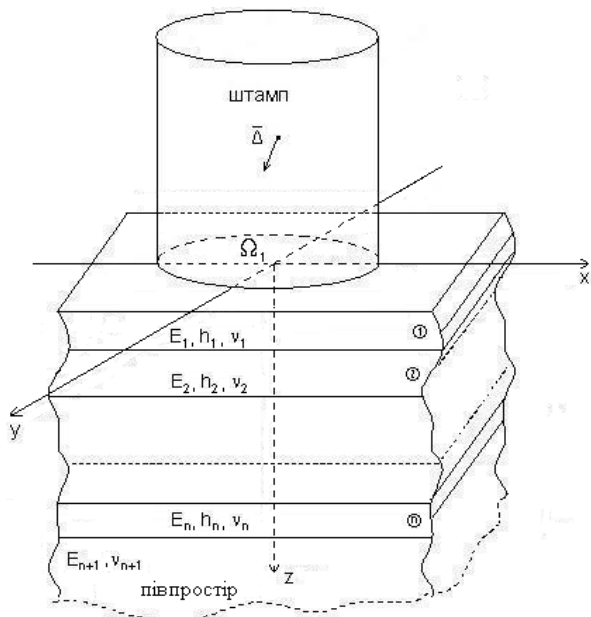


Рис. 1. Штамп на багатошаровій основі

3. Мета і задачі дослідження

Мета роботи полягає у дослідженні впливу тертя між штампом з плоскою підшовою і багатошаровою основою на можливість відставання основи від штампю.

Для досягнення цієї мети були поставлені наступні задачі:

- виявити, для яких параметрів контактної задачі можливо відокремлення багатошарової основи з гладкою межею (без тертя) від штампю з плоскою підшовою;
- визначити величину коефіцієнта тертя між штампом та багатошаровою основою, при якому зникає явище відставання.

4. Алгоритм чисельного розв’язання задачі

Наведемо детальний алгоритм чисельного розв’язання поставленої контактної задачі [13]:

1. Для невідомої області контакту Ω_1 плоскої підшови штампю з багатошаровою основою обираємо область Ω , яка містить у собі область Ω_1 ($\Omega_1 \subset \Omega$). Область Ω повинна мати вигляд відкритого прямокутника, сторони якого, паралельні координатним осям x та y (рис. 1).

2. Розбиваємо область Ω на n однакових прямокутних частин $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, які орієнтовані подібно

прямокутнику Ω . Позначимо через $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ центри цих частин, а через s – площу однієї частини.

3. Обчислюємо коефіцієнти a_{ij} матриці податливості пружної основи за формулами:

$$\begin{cases} a_{3i-13i-1} = \int_{\omega_i} K_{3-13-1}(x_1 - x, y_1 - y) dx dy \quad (\forall i = \overline{0, 2}), \\ a_{3i-23i-1} = a_{3i-23i} = a_{3i-13i-2} = a_{3i-13i} = a_{3i-13i-2} = a_{3i3i-1} = 0 \quad \forall i = \overline{0, n}; \\ a_{3i-g3j-1} = s \cdot K_{3-g3-1}(x_1 - x_j, y_1 - y_j) \quad \forall i, j = \overline{1, n} \quad (i \neq j), \forall g, l = \overline{0, 2}, \end{cases}$$

де K_{ij} визначаються формулами:

$$\begin{cases} K_{11}(x-x', y-y') = \frac{1+\nu}{\pi E_1} \frac{1-\nu_1}{r} - \frac{1-\nu_1^2}{\pi E_1} \int_0^\infty a_1(p) e^{-2ph} J_0(pr) dp, \\ K_{21}(x-x', y-y') = \frac{1+\nu}{\pi E_1} \frac{1-2\nu_1}{2r^2} + \frac{1-\nu_1^2}{\pi E_1} \frac{x-x'}{r} \int_0^\infty b_1(p) e^{-2ph} J_1(pr) dp, \\ K_{22}(x-x', y-y') = \frac{1+\nu_1}{\pi E_1} \left(\frac{1}{r} - \frac{\nu(y-y')^2}{r^3} \right) - \frac{1-\nu_1^2}{\pi E_1} \left(\int_0^\infty c_1(p) e^{-2ph} J_0(pr) dp - \int_0^\infty (c_1(p) - b_1(p)) e^{-2ph} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{J_1(pr)}{pr} - \frac{(x-x')^2}{r^2} \left(J_0(pr) - \frac{2J_1(pr)}{pr} \right) \right) dp \right), \\ K_{32}(x-x', y-y') = \frac{1+\nu_1}{\pi E_1} \frac{\nu_1(x-x')(y-y')}{r^3} - \frac{1-\nu_1^2}{\pi E_1} \frac{(x-x')(y-y')}{r^2} \times \\ \times \left(\int_0^\infty (c_1(p) - b_{t1}(p)) e^{-2ph} \left(J_0(pr) - \frac{2J_1(pr)}{pr} \right) dp \right), \\ K_{12}(x-x', y-y') = -K_{21}(x-x', y-y'), \\ K_{23}(x-x', y-y') = K_{32}(x-x', y-y'), \\ K_{33}(x-x', y-y') = K_{22}(y-y', x-x'), \\ K_{13}(x-x', y-y') = -K_{21}(y-y', x-x'), \\ K_{31}(x-x', y-y') = K_{21}(y-y', x-x'), \\ r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}. \end{cases}$$

В цих формулах E_1, ν_1 – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона верхнього шару основи, h – висота цього шару, $J_0(x), J_1(x)$ – функції Бесселя першого роду, $a_1(p), b_1(p), c_1(p), b_{t1}(p)$ – модифіковані функції податливості верхнього шару багатошарової основи [8].

4. Обчислюємо величини b_i за формулами:

$$b_{3i-2} = \Delta_1 - \delta_0(x_i, y_i), b_{3i-1} = \Delta_2, b_{3i} = \Delta_3, i = \overline{1, n}.$$

Тут $\bar{\Delta} = (\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$ – вектор прямолінійного поступального переміщення штампю з вихідного положення ($\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0$ – переміщення штампю у додатних напрямках осей z, x, y відповідно). Функція $\delta_0(x, y) = 0$ для всіх точок $(x, y) \in \Omega_1$ і $\delta_0(x, y)$ дорівнює будь-якій до-

датній константі для всіх $(x, y) \in \Omega \setminus \Omega_i$, яка перевищує значення Δ_1 .

5. Обираємо $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \dots = x_{3n}^{(0)} = 0$ у якості начального наближення $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{3n}^{(0)})$ для ітераційного процесу (1).

6. Обираємо необхідну точність розрахунків $\varepsilon > 0$. Здійснюємо обчислення наближень до розв'язку контактної задачі за наведеним нижче ітераційним процесом (1), до тих пір, доки не буде виконана нерівність

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{3n} (x_i^{(m+1)} - x_i^{(m)})^2} < \varepsilon.$$

$$\left\{ \begin{aligned} x_{3i-2}^{(m+1)} &= h \left(\frac{1}{a_{3i-23i-2}} \cdot \left(-\sum_{j=1}^{3i-3} a_{3i-2j} x_j^{(m+1)} - \sum_{j=3i-1}^{3n} a_{3i-2j} x_j^{(m)} + b_{3i-2} \right) \right), \\ x_{3i-1}^{(m+1)} &= q \left(\frac{1}{a_{3i-13i-1}} \cdot \left(-\sum_{j=1}^{3i-2} a_{3i-1j} x_j^{(m+1)} - \sum_{j=3i}^{3n} a_{3i-1j} x_j^{(m)} + b_{3i-1} \right) \right), \\ &\frac{1}{a_{3i3i}} \cdot \left(-\sum_{j=1}^{3i-1} a_{3ij} x_j^{(m+1)} - \sum_{j=3i+1}^{3n} a_{3ij} x_j^{(m)} + b_{3i} \right), \mu \cdot x_{3i-2}^{(m)}, \\ x_{3i}^{(m+1)} &= q \left(\frac{1}{a_{3i3i}} \cdot \left(-\sum_{j=1}^{3i-1} a_{3ij} x_j^{(m+1)} - \sum_{j=3i+1}^{3n} a_{3ij} x_j^{(m)} + b_{3i} \right) \right), \\ &\frac{1}{a_{3i-13i-1}} \cdot \left(-\sum_{j=1}^{3i-2} a_{3i-1j} x_j^{(m+1)} - \sum_{j=3i}^{3n} a_{3i-1j} x_j^{(m)} + b_{3i-1} \right), \mu \cdot x_{3i-2}^{(m)} \end{aligned} \right\};$$

$i = \overline{1, n}; m = 0, 1, 2, \dots$ (1)

У формулах (1) функції $h(x)$ та $q(x, y, z)$ визначаються співвідношеннями:

$$h(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \geq 0; \\ 0, & \text{якщо } x < 0; \end{cases}$$

$$q(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{якщо } \sqrt{x^2 + y^2} \leq z; \\ x \cdot \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{якщо } \sqrt{x^2 + y^2} > z. \end{cases}$$

Таким чином отримуємо шуканий наближений розв'язок $(x_1^{(m+1)}, x_2^{(m+1)}, \dots, x_{3n}^{(m+1)})$ поставленої просторової контактної задачі. В одержаному розв'язку x_{3i-2} – величина контактної тиску, x_{3i-1} , x_{3i} – величини дотичних контактних напружень у напрямку осей x та y в частині ω_i , $i = \overline{1, n}$.

7. Сукупність частин $\omega_i \subset \Omega$, $i = \overline{1, n}$, для кожної з яких виконується умова додатності контактних тисків

$$x_{3i-2}^{(m+1)} > 0,$$

утворюють область контакту штампів з основою. Інші частини ω_i утворюють область, в якій відсутній контакт штампів з основою.

8. Вважаємо, що сукупність усіх частин $\omega_i \subset \Omega$, кожна з яких знаходиться в області контакту та задовольняє умові

$$\sqrt{(x_{3i-1}^{(m+1)})^2 + (x_{3i}^{(m+1)})^2} < \mu \cdot x_{3i-2}^{(m)}$$

утворюють область зчеплення штампів з основою. Тут μ – коефіцієнт тертя. Усі інші частини ω_i області контакту утворюють область прослизання поверхні основи відносно штампів.

5. Чисельні результати розв'язання контактної задачі про дію штампів з плоскою підшвою на двошарову основу

У статті [12] розв'язана вище поставлена контактна задача для циліндричного штампів на двошаровій основі без урахування тертя. Встановлено, що штамп при певних умовах може відокремлюватися від основи (область відокремлення має форму кільця). У даній статті розв'язано задачу [12] з урахуванням тертя між штампом та основою. Встановлено, що наявність тертя між штампом і основою може призводити до зникнення області відставання.

Наведемо чисельні результати розв'язку запропонованим в цій статті алгоритмом про вдавлення циліндричного штампів з плоскою підшвою у пружну двошарову основу для двох випадків. У першому випадку тертя між штампом та основою не враховується (задача [12]). У другому випадку враховується тертя між штампом та основою. Товщина першого шару основи $h_1 = 0.01$ м, модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу цього шару: $E_1 = 21 \cdot 10^{10}$ Па, $\nu_1 = 0.3$. Другий шар основи є пружним півпростором з модулем Юнга $E_2 = 21 \cdot 10^9$ Па та коефіцієнтом Пуассона $\nu_2 = 0.3$. Перший шар зчеплений з другим. Радіус підшви штампів становить $a = 0.04$ м. Осьова сила, що діє на штамп, $Q = 20$ кН. Чисельними розрахунками встановлено, що для значень коефіцієнта кулонова тертя $\mu \geq 0.2$ відставання основи від штампів зникає.

Чисельні результати для значень $q(r) = \sigma_z(r)$ наведено на рис. 2 та 3. Графіки, помічені кільцями, відповідають розв'язку задачі для першого випадку, а графіки, помічені квадратами – для другого випадку.

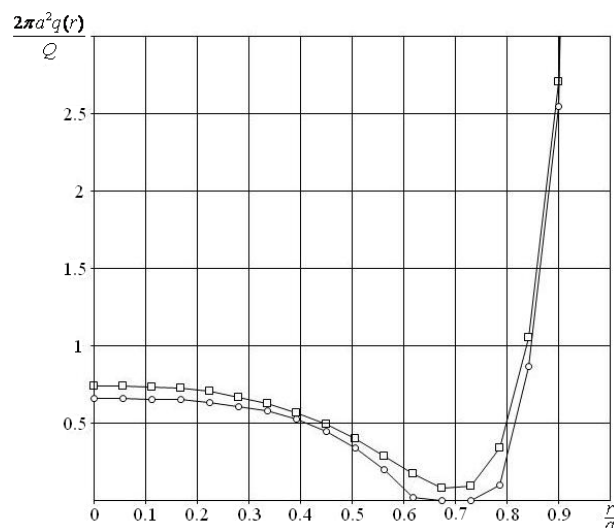


Рис. 2. Розподіл контактних тисків під штампом

На рис. 2 r – відстань від центра підшви штампів у радіальному напрямку, $q(r)$ – контактний тиск, Q – осьова сила, що діє на штамп, a – радіус підшви штампів.

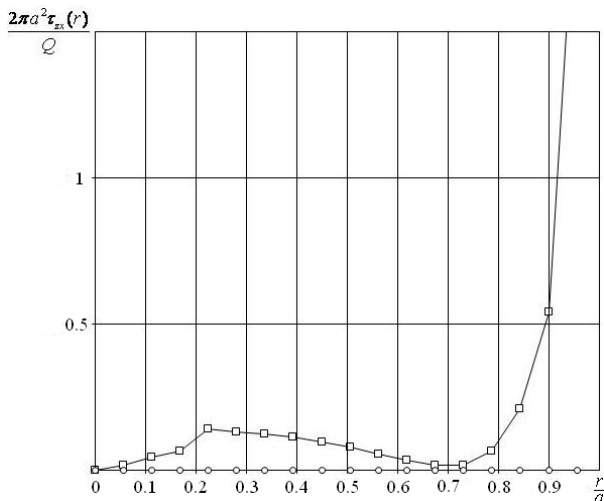


Рис. 3. Розподіл дотичних контактних напружень під штампом

На рис. 3 r – відстань від центра підшви штампa у радіальному напрямку, $\tau_{zx}(r)$ – дотичний тиск, Q – осьова сила, що діє на штамп, a – радіус підшви штампa.

Як видно з рис. 2, у першому випадку $0.675 < \frac{r}{a} < 0.731$ – зона відставання підшви штампa від основи ($q(r)=0$). Ця зона має форму кільця, центр якого співпадає з центром підшви штампa. Відмітимо, що значення відношень $\frac{r}{a} = 0.675$ та $\frac{r}{a} = 0.731$ узгоджуються з результатами роботи [12].

6. Висновки

Виявлено, що наявність тертя між штампом з плоскою підшвою і шаровою основою сприяє зникненню області відставання штампa від основи.

Виявлено, що двошарова пружна основа з параметрами $h_1=0.01$ м, $E_1 = 21 \cdot 10^{10}$ Па, $\nu_1 = 0.3$, $E_2 = 21 \cdot 10^9$ Па, відокремлюється від плоского циліндричного штампa з радіусом підшви $a = 0.04$ м. Площина підшви штампa паралельна межі основи. Область відставання має форму кільця.

Виявлена область значень коефіцієнтів тертя ($\mu \geq 0.2$) при яких відокремлення такої двошарової основи від штампa не відбувається.

Література

1. Кравчук, А. С. Вариационный метод в контактных задачах. Состояние проблемы, направления развития [Текст] / А. С. Кравчук // Прикл. математ. и механика. – 2009. – Т. 73, Вып. 3. – С. 492–502.
2. Reina, S. A quadratic programming formulation for the solution of layered elastic contact problems [Text] / S. Reina, D. Dini, D. A. Hills, Y. Lida // European Journal of Mechanics – A/Solids. – 2011. – Vol. 30, Issue 3. – P. 236–247. doi: 10.1016/j.euromechsol.2010.12.003
3. Александров, А. И. Решение задач о контакте упругих тел с использованием нелинейных интегральных уравнений [Текст] / А. И. Александров // Доп. Національної академії наук України. – 2012. – № 11. – С. 47–52.
4. Александров, В. М. Пространственная контактная задача для двухслойного упругого основания с заранее неизвестной областью контакта [Текст] / В. М. Александров, J. J. Kalker, Д. А. Пожарский // Изв. РАН. МТТ. – 1999. – № 4. – С. 51–55.
5. Чебаков, М. И. Трёхмерная контактная задача для слоя с учётом сил трения в области контакта [Текст] / М. И. Чебаков // Изв. РАН. Механика твёрдого тела. – 2002. – № 6. – С. 29–42.
6. Sundaram, N. Mechanics of advancing pin-loaded contact with friction [Text] / N. Sandaran, T. N. Farris // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2010. – Vol. 58, Issue 11. – P. 1819–1833. doi: 10.1016/j.jmps.2010.08.004
7. Острик, В. И. Контактное взаимодействие штампa с упругой полуплоскостью при наличии трения и сцепления [Текст] / В. И. Острик // Теор. и прикл. механика. – 2004. – Вып. 39. – С. 94–101.
8. Острик, В. И. Вдавливание штампa в упругую полосу при наличии трения и сцепления [Текст] / В. И. Острик // Изв. РАН. Механика твёрдого тела. – 2011. – № 5. – С. 119–129.
9. Колосова, Е. М. Контактные задачи для трёхслойной полосы при наличии сил трения [Текст] / Е. М. Колосова, М. И. Чебаков // Прикл. математ. и механика. – 2012. – Т. 76, Вып. 5. – С. 795–802.
10. Столярчук, І. А. Періодична контактна задача плоскої теорії пружності для багатшарових основ [Текст]: матер. V Міжнар. наук.- практ. конф./ І. А. Столярчук // Динаміка наукових досліджень – 2006. – Дніпропетровськ. – 2006. – Т. 7. – С. 11–15.
11. Матушко, Ю. О. Просторові контактні задачі для пружної багатшарової основи з гладкою межею [Текст] : автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук: спец. / Ю. О. Матушко. – Донецьк, 2004. – 22 с.
12. Приварников, А. К. Упругие многослойные основания [Текст] / А. К. Приварников, В. Д. Ламзюк. // Деп. в ВИНТИ 23.12.8. – 1985. – № 8789 –В. – 162 с.
13. Александров, І. О. Просторова контактна задача про дію штампa з плоскою підшвою на пружну багатшарову основу з урахуванням тертя між штампом і основою [Текст] / І. О. Александров // Вісник ЗНУ. Фізико-математичні науки. – 2015. – № 3. – С. 54–64.