

# АНАЛІЗ ПОШИРЕННЯ СЛАБКОНЕЛІНІЙНИХ ХВИЛЬ В ДВОШАРОВІЙ РІДИНІ З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ

**О. В. Авраменко**

Доктор фізико-математичних наук,  
професор, завідувач кафедри\*  
E-mail: oavramenko@rambler.ru

**В. В. Наратовий**  
Викладач\*

\*Кафедра прикладної математики,  
статистики та економіки

Кіровоградський державний педагогічний  
університет ім. В. Винниченка

вул. Шевченка, 1, м. Кіровоград, Україна, 25002  
E-mail: naradvova1986@gmail.com

*Розглянута нова нелінійна задача поширення хвиль в системі «рідкий шар з твердим дном – рідкий шар з вільною поверхнею». Для дослідження застосовано метод багатомасштабних розвинень. Отримані розв'язки перших наближень та еволюційні рівняння обвідних хвильових пакетів на поверхнях поширення хвиль. Проведено аналіз форми хвиль на поверхні контакту та на вільній поверхні. Вказані області, в яких хвилі мають затуплений гребінь і загострену подошву і навпаки*

*Ключові слова: нелінійні хвилі, двошарова рідина, форма хвильового пакету, вільна поверхня*

*Рассмотрена новая нелинейная задача распространения волн в системе «жидкий слой с твердым дном – жидкий слой со свободной поверхностью». Для исследования применен метод многомасштабных разложений. Получены решения первых приближений и эволюционные уравнения огибающих волновых пакетов на поверхностях распространения волн. Проведен анализ формы волн на поверхности контакта и на свободной поверхности. Указаны области, в которых волны имеют затупленный гребень и острую подошву и наоборот*

*Ключевые слова: нелинейные волны, двухслойная жидкость, форма волнового пакета, свободная поверхность*

## 1. Вступ

Дослідження хвильових рухів в рідинах в залежності від різних типів стратифікації є однією з важливих прикладних задач сучасної науки. Це обумовлено, наприклад, тим, що ці рухи є невід'ємною складовою вивчення динаміки Світового океану. Також дослідження хвиль в стратифікованих системах скінченного об'єму (резервуари різного типу) має багато практичних застосувань.

Моделювання хвильових рухів в шаруватих рідких системах, стратифікованих за густиною, потребує досить складного математичного апарату та громіздких аналітичних перетворень та чисельних обчислень. Тому для задач такого класу використовують, як допоміжні інструменти, комп'ютерні математичні пакети спеціального призначення, як то MatLab, Maple та ін.

Таким чином, актуальним є дослідження та аналіз проблеми про поширення внутрішніх та поверхневих хвильових пакетів в гідродинамічній системі «шар з твердим дном – шар з вільною поверхнею» із застосуванням методу багатомасштабних розвинень з врахуванням сили поверхневого натягу на вільній поверхні та на поверхні контакту.

## 2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми

Вивчення внутрішніх хвиль скінченної амплітуди отримало велику увагу численних дослідників: Останні дослідження довгих поодиноких хвиль як в

атмосфері, так і в океані надали додаткової зацікавленості до цього явища. Більша частка виконаної теоретичної роботи була пов'язана з аналізом хвильових рухів в системах, де внутрішні хвилі є слабколінійними і довгими по відношенню до повної товщини рідини. Подібні процедури приводять до рівняння Кортевега-де Вріза, що описують еволюцію хвильових рухів та баланс між нелінійністю і дисперсією. Це рівняння було досить добре вивчене, а також знайдені методи, що дають точні розв'язки для довільно визначених початкових умов.

З іншого боку, моделі для двовимірних хвиль були виведені лише для мілкої води (рівняння Буссінеска). Рівняння Кадомцева-Петвіашвілі для слабколінійних двовимірних хвиль були запропоновані для глибокої води. Всі ці моделі придатні лише для певного інтервалу відношень товщини і довжини хвилі.

Аналізом поширення хвиль-вбивць та хвиль типу цунамі активно займається Доценко. Зокрема, у роботі [1] на основі даних спостережень в північно-західній частині Чорного моря виконано аналіз аномальних вітрових хвиль (хвиль убивць). В [2] у рамках нелінійної теорії методом скінчених різниць виконано аналіз розповсюдження хвиль цунамі з басейну в прямолінійний канал сталого прямокутного поперечного перерізу. Виявлено, що максимальна висота хвиль у каналі реалізується для осередків цунамі, розташованих на материковому схилі навпроти входу в канал.

У [3, 4] експериментально досліджені профілі стоячих гравітаційних двовимірних хвиль. Показано, що

для даних хвиль має місце система вторинних циркуляційних течій, які охоплюють всю товщину рідини.

Найфе [5] використовував метод багатомасштабних розвинень для виведення пари диференціальних рівнянь у частинних похідних, які описують еволюцію хвильових пакетів скінченної амплітуди на поверхні контакту двох напівнескінченних рідин з різними густинами, враховуючи ефект поверхневого натягу. В результаті було отримано два альтернативні нелінійні рівняння Шредінгера та досліджено стійкість хвильових пакетів скінченної амплітуди.

Аналогічна задача про поширення хвильових пакетів на поверхні контакту рідкого півпростору і рідкого шару над ним вивчалась в [6]. Цими авторами досліджувалась проблема стійкості хвильових пакетів в системі «шар – півпростір» методом багатомасштабних розвинень до третього порядку [7]. В статтях, що опубліковані в останній час, розглянуті різні аспекти четвертого наближення проблеми еволюції нелінійних хвильових пакетів [8]. Також виведене еволюційне рівняння для хвильових чисел близьких до критичного [6], досліджено стійкість розв'язків указаних рівнянь [7]. Області резонансу другої гармоніки, напрямки поширення хвиль, форма хвильового пакету в системі «шар – півпростір» описані в статті [9].

В приведеному нижче аналізі представлені в основному сучасні дослідження. В [10] доведено виникнення вертикальних вібрацій при взаємодії верхньої рідини з нижнім селевим потоком. Дані вібрації обумовлені генеруванням внутрішніх хвиль в пінокліні. В роботі [11] в рамках другого наближення теорії мілкої води досліджується поширення внутрішніх хвиль в двошаровій рідині, яка обмежена зверху і знизу. В [12] в рамках капілярно-гравітаційної постановки досліджується поширення двох хвильових пакетів в одному напрямку але різної довжини хвиль. Експериментальне дослідження поширення хвиль в двошаровій рідині представлено в [13]. Хвилі генеруються розрідженням зверху, що призводить до формування струї вздовж дна. В [14] представлені експерименти по поширенню хвиль в двошаровій рідині з урахуванням скінченної товщини поверхні контакту. В [15] отримані аналітичні розв'язки задачі про поширення хвиль в кусково-постійній двошаровій рідині, обмеженої зверху і знизу жорсткими границями.

Представлене в даній роботі дослідження присвячене аналізу поширення хвиль в двошаровій рідкій системі скінченної глибини. Зокрема, в статті виведені еволюційні рівняння обвідних хвильових пакетів та проведено аналіз форми внутрішніх та поверхневих хвиль.

### 3. Цілі та задачі дослідження

Метою проведених досліджень було отримання якісних та кількісних характеристик поширення внутрішніх та поверхневих хвиль в двошаровій системі «рідкий шар з твердим дном – рідкий шар з вільною поверхнею».

Сформулюємо основні завдання дослідження:

- вивід еволюційних рівнянь обвідних хвильових пакетів для гідродинамічної системи «шар з твердим дном – шар з вільною поверхнею»;
- аналіз форми хвильових пакетів на поверхні контакту та на вільній поверхні;
- фізична інтерпретація результатів.

### 4. Постановка та методи дослідження поширення хвиль в системі «рідкий шар з твердим дном – рідкий шар з вільною поверхнею»

Розглянемо поширення хвильових пакетів в двошаровій гідродинамічній системі, яка складається з двох шарів  $\Omega_1 = \{(x,z) : |x| < \infty, -h_1 \leq z < 0\}$  та  $\Omega_2 = \{(x,z) : |x| < \infty, 0 \leq z \leq h_2\}$ . Густина шарів позначимо як  $\rho_1$  та  $\rho_2$  відповідно. Дану задачу розглядаємо в плоскому варіанті. Функції, що описують відхилення поверхні контакту двох шарів та вільної поверхні введемо як  $z = \eta(x,t)$  та  $z = \eta_0(x,t)$ . Наведемо математичну постановку задачі:

$$\frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial z^2} = 0 \quad \text{у } \Omega_j, j=1,2, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \phi_j}{\partial z} = -\alpha \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \quad \text{при } z = \alpha \eta(x,t), (j=1,2) \tag{2}$$

$$\frac{\partial \eta_0}{\partial t} - \frac{\partial \phi_2}{\partial z} = -\alpha \frac{\partial \eta_0}{\partial t} \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \quad \text{при } z = \alpha \eta_0(x,t), \tag{3}$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} - \rho \frac{\partial \phi_2}{\partial t} + (1-\rho)\eta + \frac{1}{2}\alpha(\nabla \phi_1)^2 - \frac{1}{2}\alpha\rho(\nabla \phi_2)^2 - T \left( 1 + \left( \alpha \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } z = \alpha \eta(x,t), \tag{4}$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \eta + \frac{1}{2}\alpha(\nabla \phi_2)^2 - T_0 \left( 1 + \left( \alpha \frac{\partial \eta_0}{\partial x} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}} \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } z = \alpha \eta_0(x,t), \tag{5}$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = -h_1 = -\frac{h_1}{L}, \tag{6}$$

тут  $\phi_j$  ( $j=1,2$ ) потенціали швидкості в  $\Omega_j$ ,  $\eta$  – відхилення поверхні контакту,  $\eta_0$  – відхилення вільної поверхні,  $T$  та  $T_0$  – коефіцієнти поверхневого натягу на поверхні контакту та на вільній поверхні,  $\alpha$  – коефіцієнт нелінійності,  $\rho = \rho_1 / \rho_2$  – відношення густин рідких шарів. Вважаємо, що коефіцієнт нелінійності  $\alpha$  значно менший за одиницю, тому дана модель описує слабконелінійну двошарову систему з дисперсією.

Для розв'язування задачі використаємо метод багатомасштабних розвинень до третього порядку. Представимо шукані функції відхилення поверхні контакту, відхилення вільної поверхні та потенціали швидкостей у вигляді

$$\eta(x,t) = \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \eta_n(x_0, x_1, x_2, t_0, t_1, t_2) + O(\alpha^3), \tag{7}$$

$$\eta_0(x,t) = \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \eta_{0n}(x_0, x_1, x_2, t_0, t_1, t_2) + O(\alpha^3), \tag{8}$$

$$\phi_j(x,z,t) = \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \phi_{jn}(x_0, x_1, x_2, z, t_0, t_1, t_2) + O(\alpha^3), j=1,2, \tag{9}$$

де  $x_j = \alpha^j x$  та  $t_j = \alpha^j t$  ( $j=0, 1, 2$ ).

**5. Результати дослідження поширення хвиль в двошаровій гідромеханічній системі**

**5.1. Перші лінійні наближення та їх розв'язки**

Підставляючи (7)–(9) у (1)–(6) та прирівнюючи вирази при однакових степенях  $\alpha$ , отримаємо три наближення досліджуваної задачі:

задача першого наближення (при  $\alpha^0$ )

$$\begin{aligned} \varphi_{j1,x_0x_0} + \varphi_{j1,zz} &= 0 \text{ в } \Omega_j, \\ \eta_{1,t_0} - \varphi_{j1,z} &= 0 \text{ на } z=0, \\ \eta_{01,t_0} - \varphi_{21,z} &= 0 \text{ на } z=h_2, \\ \varphi_{11,t_0} - \rho\varphi_{21,t_0} + (1-\rho)\eta_1 - T\eta_{1,x_0x_0} &= 0 \text{ на } z=0, \\ \varphi_{21,t_0} + \eta_{01} - T_0\eta_{01,x_0x_0} &= 0 \text{ на } z=h_2, \\ \varphi_{11,z} &= 0 \text{ на } z=-h_1. \end{aligned} \quad (10)$$

Задача другого наближення (при  $\alpha$ )

$$\begin{aligned} \varphi_{j2,x_0x_0} + \varphi_{j2,zz} &= -2\varphi_{j1,x_0x_1} \text{ в } \Omega_j, \\ \eta_{2,t_0} - \varphi_{j2,z} &= -\eta_{1,t_1} - \eta_{1,x_0}\varphi_{j1,x_0} + \eta_1\varphi_{j1,zz} \text{ на } z=0, \\ \eta_{02,t_0} - \varphi_{22,z} &= -\eta_{01,t_1} - \eta_{01,x_0}\varphi_{21,x_0} + \eta_{01}\varphi_{21,zz} \text{ на } z=h_2, \\ \varphi_{12,t_0} - \rho\varphi_{22,t_0} + (1-\rho)\eta_2 - T\eta_{2,x_0x_0} &= -\varphi_{11,t_1} - \\ -\eta_1\varphi_{11,t_0z} + \rho(\varphi_{21,t_1} + \eta_1\varphi_{21,t_0z}) - 0.5(\varphi_{11,x_0}^2 + \varphi_{11,z}^2) &+ \\ + 0.5\rho(\varphi_{21,x_0}^2 + \varphi_{21,z}^2) + 2T\eta_{1,x_0x_1} &\text{ на } z=0, \\ \varphi_{22,t_0} + \eta_{02} - T_0\eta_{02,x_0x_0} &= -\varphi_{21,t_1} - \eta_{01}\varphi_{21,t_0z} - \\ - 0.5(\varphi_{21,x_0}^2 + \varphi_{21,z}^2) + 2T_0\eta_{01,x_0x_1} &\text{ на } z=h_2, \\ \varphi_{12,z} &= 0 \text{ на } z=-h_1. \end{aligned} \quad (11)$$

Задачу третього наближення не наводимо через громіздкість аналітичного запису [16, 17].

Розв'язок задачі першого наближення (10) одержано у вигляді хвиль, що біжать

$$\begin{aligned} \eta_1 &= Ae^{i\theta} + \bar{A}e^{-i\theta}, \\ \varphi_{11} &= -\frac{i\omega}{k}(Ae^{i\theta} - \bar{A}e^{-i\theta})\frac{\text{ch}(k(h_1+z))}{\text{sh}(kh_1)}, \\ \varphi_{21} &= \frac{i\omega}{k}\left(\frac{\omega^2 \text{sh}(k(h_2-z)) - (k+T_0k^3)\text{ch}(k(h_2-z))}{\omega^2 \text{ch}(kh_2) - (k+T_0k^3)\text{sh}(kh_2)}\right) \times \\ &\times (Ae^{i\theta} - \bar{A}e^{-i\theta}), \\ \eta_{01} &= \frac{\omega^2}{\omega^2 \text{ch}(kh_2) - (k+T_0k^3)\text{sh}(kh_2)}(Ae^{i\theta} + \bar{A}e^{-i\theta}), \end{aligned} \quad (12)$$

де  $A(x_1, x_2, t_1, t_2)$  і  $\bar{A}(x_1, x_2, t_1, t_2)$  – обвідна хвильового пакету на поверхні контакту і комплексно спряжена до обвідної хвильового пакету  $A$ ,  $\theta = kx_0 - \omega t_0$ ,  $k$  – хвильове число центру хвильового пакету та  $\omega$  – частота центру хвильового пакету. З формул (12) неважко побачити зв'язок між обвідною внутрішнього хвильового

пакету  $A$  та обвідною хвильового пакету на вільній поверхні  $A^0$

$$A^0 = \frac{\omega^2}{\omega^2 \text{ch}(kh_2) - (k+T_0k^3)\text{sh}(kh_2)}A. \quad (13)$$

Підставляючи розв'язки (12) у динамічну умову на вільній поверхні задачі першого наближення (10), отримуємо дисперсійне рівняння

$$\begin{aligned} \omega^2 \text{cth}(kh_1) + \rho\omega^2 \left( \frac{\omega^2 - (k+T_0k^3)\text{cth}(kh_2)}{\omega^2 \text{ch}(kh_2) - (k+T_0k^3)} \right) &= \\ = (1-\rho)k + Tk^3. \end{aligned} \quad (14)$$

Частинний розв'язок системи (11) будемо шукати у вигляді, записаному через невідомі коефіцієнти

$$\begin{aligned} \varphi_{21} &= B_{11}(z+h_1)\text{sh}(k(z+h_1))e^{i\theta} + B_{10}\text{ch}(k(z+h_1))e^{i\theta} + \\ &+ B_{20}\text{ch}(2k(z+h_1))e^{2i\theta} + \text{cc}, \\ \varphi_{22} &= (C_{10} + C_{11}z)e^{i\theta+k(h_2-z)} + C_{20}e^{2i\theta+2k(h_2-z)} + \\ &+ (E_{10} + E_{11}z)e^{i\theta-k(h_2-z)} + E_{20}e^{2i\theta-2k(h_2-z)} + \text{cc}, \\ \eta_2 &= D_0 + D_1e^{i\theta} + D_2e^{2i\theta} + \text{cc}, \\ \eta_{02} &= F_0 + F_1e^{i\theta} + F_2e^{2i\theta} + \text{cc}, \end{aligned} \quad (15)$$

де  $B_{ij}, C_{ij}, E_{ij}, D_i, F_i$  – невизначені коефіцієнти,  $\text{cc}$  – означає комплексно спряжену величину до попередніх виразів.

Підставляючи далі (12) та (15) в (11) і прирівнюючи вирази при однакових функціях, приходимо до двох незалежних систем рівнянь відносно інших невідомих коефіцієнтів.

Система відносно коефіцієнтів  $B_{10}, C_{10}, E_{10}, D_1, F_1$  отримана прирівнюванням виразів при функції  $e^{i\theta}$  є несумісною [16], причому її умова розв'язуваності, за умови, що  $D_1 = 0$ , має вигляд

$$A_{,t_1} + \omega' A_{,x_1} = 0, \quad (16)$$

де  $\omega' = d\omega/dk$  – групова швидкість. В результаті знайдено неаналітичні вирази для всіх невідомих коефіцієнтів [16]. Нижче наведемо вирази для відхилення поверхні контакту та вільної поверхні у другому наближенні

$$\begin{aligned} \eta_2 &= \frac{0.5\omega^2}{1-\rho} \times \\ &\times \left( 1-\rho - \text{cth}^2(kh_1) + \rho \left[ \frac{(1-\rho)k + Tk^3 - \omega^2 \text{cth}(kh_1)}{\rho\omega^2} \right]^2 \right) A\bar{A} + \\ &+ \Lambda e^{2i\theta} A^2 + \text{cc}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\eta_{02} = \Lambda_0 e^{2i\theta} A^2 + \frac{0.5\omega^2(\omega^4 - (k+T_0k^3)^2)}{\omega^2 \text{ch}(kh_2) - (k+T_0k^3)\text{sh}(kh_2)} + \text{cc}.$$

Умова розв'язуваності третього наближення має вигляд

$$W_1 A_{,t_2} + W_2 A_{,x_2} + W_3 A_{,x_1x_1} + W_4 A^2 \bar{A} = 0, \quad (18)$$

де  $W_i (i=1,4)$  коефіцієнти, що залежать від  $(k, \rho, \omega, h_1, h_2, T, T_0)$ , які мають досить громіздкий вигляд і отримані за допомогою пакетів символьних обчислень.

**5. 2. Еволюційні рівняння обвідних**

Знайшовши вираз для  $\omega'' = d^2\omega/dk^2$ , умову розв'язуваності третього наближення (18) можна записати у вигляді

$$A_{,t_2} + \omega' A_{,x_2} - 0.5\omega'' A_{,x_1 x_1} = iA^2 \bar{A}. \tag{19}$$

Частинні похідні  $A_{,t}$ ,  $A_{,x}$ ,  $A_{,xx}$  запишемо у вигляді сум

$$\begin{aligned} A_{,t} &= \sum_{n=1}^2 \alpha^n A_{,t_n} + O(\alpha^3), \quad A_{,x} = \\ &= \sum_{n=1}^2 \alpha^n A_{,x_n} + O(\alpha^3), \quad A_{,xx} = \alpha^2 A_{,x_1 x_1} + O(\alpha^3), \end{aligned} \tag{20}$$

де похідні  $A_{,t_n}$  та  $A_{,x_n}$  визначають внесок членів порядку  $\alpha^n$  у загальне значення похідних  $A_{,t}$  та  $A_{,x}$ .

Помножимо співвідношення (16) та (19) на  $\alpha$  та  $\alpha^2$  відповідно, та додамо одне до одного. Враховуючи (20), отримаємо шукане еволюційне рівняння обвідної на поверхні контакту двох рідких шарів

$$A_{,t} + \omega' A_{,x} - 0.5\omega'' A_{,xx} = i\alpha^2 I A^2 \bar{A}. \tag{21}$$

Враховуючи співвідношення (13) та використовуючи рівняння (21) легко отримати еволюційне рівняння на вільній поверхні. Воно матиме вигляд

$$A_{,t}^0 + \omega' A_{,x}^0 - 0.5\omega'' A_{,xx}^0 = i\alpha^2 I_0 (A^0)^2 \bar{A}^0, \tag{22}$$

де  $I_0 = \frac{(\omega^2 \operatorname{ch}(kh_2) - (k + T_0 k^3) \operatorname{sh}(kh_2))^2}{\omega^4} I$ .

Таким чином, виведені еволюційні рівняння обвідних хвильових пакетів на поверхні контакту та на вільній поверхні для досліджуваної задачі [18].

**6. Обговорення результатів проведеного дослідження та аналіз форми хвиль**

Відхилення поверхні контакту враховуючи (7), (12) та (17) можна записати у вигляді

$$\eta(x,t) = 2a \cos(kx - \tilde{\omega}t) + \alpha^2 [2B + \Lambda \cos 2(kx - \tilde{\omega}t)], \tag{23}$$

де

$$\begin{aligned} B &= \frac{0.5\omega^2}{1-\rho} \times \\ &\times \left[ 1 - \rho - \operatorname{cth}^2(kh_1) + \rho \left[ \frac{(1-\rho)k + Tk^3 - \omega^2 \operatorname{cth}(kh_1)}{\rho\omega^2} \right]^2 \right]. \end{aligned}$$

Видно, що для визначення форми поверхні контакту  $\eta(x,t)$  важливий знак коефіцієнту  $\Lambda(\rho, k, h_1, h_2, T, T_0) = \frac{L_1}{L_2}$ , який є дробом [17]. Знак величини  $\Lambda$  змінюється за умови переходу через криву  $L_1=0$ , вздовж якої  $\Lambda(\rho, k, h_1, h_2, T, T_0)=0$ , або при переході через криву  $L_2=0$ , вздовж якої  $\Lambda(\rho, k, h_1, h_2, T, T_0) \rightarrow \infty$ .

Графіки  $L_1=0$  та  $L_2=0$  зображені на рис. 1 для фіксованого значення товщини верхнього шару  $h_2=1$  і товщини нижнього шару  $h_1=10$ . Як бачимо, криві розбивають площину  $(\rho, k)$  на чотири області. В областях  $S_2, S_3, S_4 - \Lambda(\rho, k, h_1, h_2, T, T_0) > 0$ , а в області  $S_1 - \Lambda(\rho, k, h_1, h_2, T, T_0) < 0$ . Це означає, що в областях, де  $\Lambda(\rho, k, h_1, h_2, T, T_0) > 0$ , відбуватиметься заглиблення підшов та загострення гребенів хвильового пакету, а в областях, де  $\Lambda(\rho, k, h_1, h_2, T, T_0) < 0$  – навпаки.

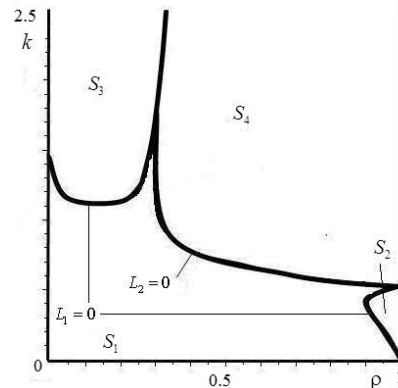


Рис. 1. Области знакосталості  $\Lambda$

На рис. 2, 3 представлені перші дві гармоніки  $\eta_1(x, t)$  та  $\eta_2(x, t)$  та відхилення вільної поверхні  $\eta(x, t)$  за таких значень параметрів  $\alpha=0.1, h_1=10, h_2=1, T_0=0.001, T=0, t=0, a=1, \rho=0.96, k=1.96$  (рис. 2) та  $\rho=0.1, k=1$  (рис. 3).

Якщо розглядати розв'язок (23) за умови модуляційної стійкості в момент, коли вже відбувся баланс лінійності і дисперсії, тоді відхилення поверхні контакту  $\eta(x,t)$  є сумою двох косинусоїд, амплітуда першої гармоніки значно більше за амплітуду другої. Якщо  $\Lambda(\rho, k, h_1, h_2, T, T_0) > 0$ , то максимуми  $\eta_1(x, t)$  та  $\eta_2(x, t)$  співпадають (рис. 2, а), а мінімум  $\eta_1(x, t)$  накладається на наступний максимум  $\eta_2(x, t)$ . Отже, в областях  $S_2, S_3, S_4$  хвиля має U-образну форму, як на рис. 2, б. Як бачимо на рис. 2, б накладання мінімумів першої гармоніки та максимумів другої гармоніки призводить до заглиблення підшов та загострення гребенів.

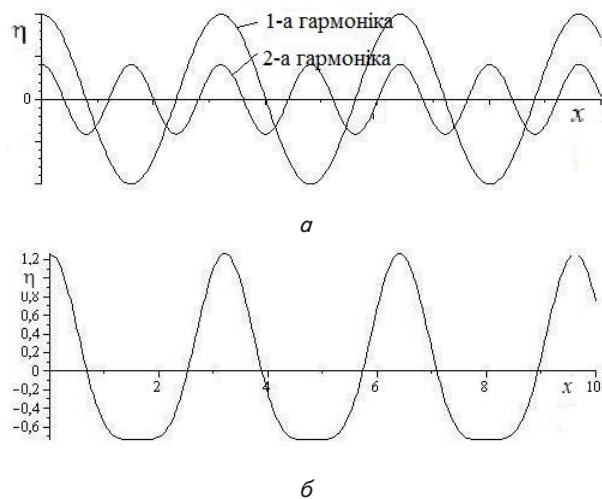


Рис. 2. Відхилення поверхні контакту при  $\Lambda(\rho, k, h_1, h_2, T, T_0) > 0$ : а – перші дві гармоніки  $\eta_1(x, t)$  та  $\eta_2(x, t)$ ; б –  $\eta(x, t) = \eta_1(x, t) + \alpha\eta_2(x, t)$

Якщо  $\Lambda(\rho, k, h_1, h_2, T, T_0) < 0$ , то максимум  $\eta_1(x, t)$  співпадає з мінімумом  $\eta_2(x, t)$  (рис. 3, а), а мінімум  $\eta_1(x, t)$  співпадає з наступним мінімумом  $\eta_2(x, t)$ . Таким чином, в області  $S_1$  поверхня контакту  $\eta(x, t)$  має  $\Gamma$ -образну форму (рис. 3, б). Отже, накладання мінімумів перших двох гармонік веде до загострення підшош та затууплення гребенів.

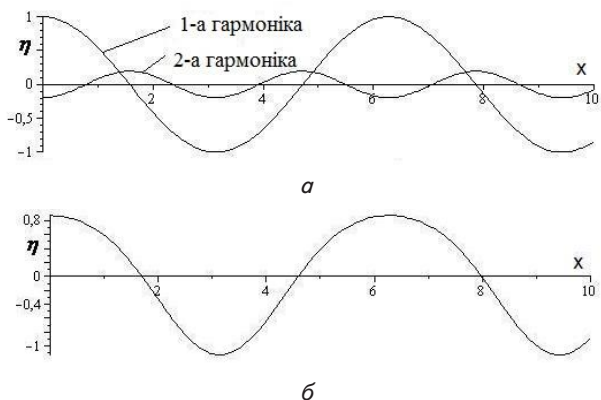


Рис. 3. Відхилення поверхні контакту при  $\Lambda(\rho, k, h_1, h_2, T, T_0) < 0$ : а – перші дві гармоніки  $\eta_1(x, t)$  та  $\eta_2(x, t)$ ; б –  $\eta(x, t) = \eta_1(x, t) + \alpha\eta_2(x, t)$

Рівняння, яким визначається форма хвильового пакету на вільній поверхні

$$\eta_0(x, t) = 2a^0 \cos(kx - \omega t) + \alpha(a^0)^2 [2B_0 + \Lambda_0 \cos 2(kx - \omega t)],$$

де  $a^0 = \frac{\omega^2}{\omega^2 \operatorname{ch}(kh_2) - (k + T_0 k^3) \operatorname{sh}(kh_2)} a$ ,

$$B_0 = \frac{0.5\omega^2 (\omega^4 - (k + T_0 k^3)^2)}{\omega^2 \operatorname{ch}(kh_2) - (k + T_0 k^3) \operatorname{sh}(kh_2)}. \quad (24)$$

Як і в випадку поверхні контакту, на вільній поверхні для визначення форми вільної поверхні  $\eta_0(x, t)$  важливий знак величини  $\Lambda_0(\rho, k, h_1, h_2, T, T_0) = \frac{M_1}{M_2}$ , який змінюється за умови переходу через криву  $M_1=0$ , вздовж якої  $\Lambda_0(\rho, k, h_1, h_2, T, T_0)=0$ , або при переході через криву  $M_2=0$  вздовж якої  $\Lambda_0(\rho, k, h_1, h_2, T, T_0) \rightarrow \infty$ . Графіки  $M_1=0$  та  $M_2=0$  зображені на рис. 4 для фіксованого значення товщини верхнього шару  $h_2=1$  і товщини нижнього шару  $h_1=10$ .

Як бачимо, криві розбивають площину  $(\rho, k)$  на шість областей. В областях  $S_1, S_3, S_5 - \Lambda(\rho, k, h_1, h_2, T, T_0) > 0$ , а в областях  $S_2, S_4, S_6 - \Lambda(\rho, k, h_1, h_2, T, T_0) < 0$ .

Якщо  $\Lambda(\rho, k, h_1, h_2, T, T_0) < 0$ , то максимум  $\eta_{01}(x, t)$  співпадає з мінімумом  $\eta_{02}(x, t)$ , а мінімум  $\eta_{01}(x, t)$  співпадає з наступним мінімумом  $\eta_{02}(x, t)$ . Таким чином, в областях  $S_2, S_4, S_6$  поверхня контакту  $\eta_0(x, t)$  має  $\Gamma$ -образну форму.

Якщо  $\Lambda(\rho, k, h_1, h_2, T, T_0) > 0$ , то максимуми  $\eta_{01}(x, t)$  та  $\eta_{02}(x, t)$  співпадають, а мінімум  $\eta_{01}(x, t)$  накладається на наступний максимум  $\eta_{02}(x, t)$ . Отже, в областях  $S_1, S_3, S_5$  хвиля має  $\cup$ -образну форму.

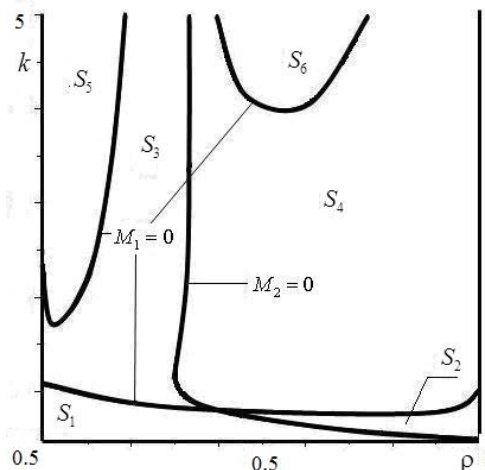


Рис. 4. Области знакосталості  $\Lambda_0$

### 7. Висновки

Під час аналізу поширення хвильових пакетів в двошаровій гідродинамічній системі «шар з твердим дном – шар з вільною поверхнею» були отримані еволюційні рівняння обвідних хвильових пакетів на поверхні контакту двох рідких шарів та на вільній поверхні. Введені еволюційні рівняння є нелінійними рівняннями типу рівняння Шредінгера другого порядку.

Аналізуючи форму внутрішніх та поверхневих хвиль було виявлено вплив урахування другого наближення, що призводить до появи областей, в яких хвилі мають різну форму. Так, наявні області, в яких є затуупленою підшош та загострений гребінь, а також області, де спостерігається протилежна картина. Відмітимо, що дані ефекти відповідають натурним спостереженням.

### Література

1. Доценко, С. Ф. Связь образования волн-убийц и метеорологических условий в северо-западной части Черного моря [Текст] / С. Ф. Доценко, В. А. Иванов, Ю. А. Побережный // Доповіді НАН України. – 2010. – № 12. – С. 105–109.
2. Доценко, С. Ф. Анализ двумерного распространения волн цунами из эллиптического очага в прямолинейный канал [Текст] / С. Ф. Доценко, Н. К. В. Санникова. – МГИ НАН Украины, 2011. – С. 419–428.
3. Килиниченко, В. А. Экспериментальное исследование волн Фарадея максимальной высоты [Текст] / В. А. Килиниченко, С. Я. Секерж-Зенькович // Изв. РАН МЖГ. – 2007. – № 6. – С. 103–110.
4. Килиниченко, В. А. Экспериментальное исследование вторичных стационарных течений в поверхностных волнах Фарадея [Текст] / В. А. Килиниченко, С. Я. Секерж-Зенькович // Изв. РАН МЖГ. – 2008. – № 1. – С. 141–148.
5. Nayfeh, A. H. Nonlinear propagation of wave-packets on fluid interface [Text] / A. H. Nayfeh // Journal of Applied Mechanics. – 1976. – Vol. 43, Issue 4. – P. 584–588. doi: 10.1115/1.3423936



6. Селезов, И. Т. Структура нелинейных волновых пакетов на поверхности контакта жидких сред [Текст] / И. Т. Селезов, О. В. Авраменко // Прикладна гідромеханіка. – 2002. – Т. 4 (76). – С. 3–13.
7. Селезов, И. Т. Устойчивость волновых пакетов в слоистых гидродинамических системах с учетом поверхностного натяжения [Текст] / И. Т. Селезов, О. В. Авраменко // Прикладна гідромеханіка. – 2001. – Т. 3 (75), № 4. – С. 38–46.
8. Селезов, И. Т. Эволюционное уравнение третьего порядка для нелинейных волновых пакетов при околоритических волновых числах [Текст] / И. Т. Селезов, О. В. Авраменко // Динамические системы. – 2001. – Вып. 17. – С. 58–67.
9. Селезов, И. Т. Эволюция нелинейных волновых пакетов в гидродинамической системе «слой-полупространство» с учетом поверхностного натяжения [Текст] / И. Т. Селезов, О. В. Авраменко // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2001. – Т. 44, № 2. – С. 113–122.
10. Vincze, M. Amplified internal pulsations on a stratified exchange flow excited by interaction between a thin sill and external seiche [Text] / M. Vincze, P. Kozma, B. Gyure, I. M. Janosi, K. G. Szabo, T. Tel // Physics of Fluids. – 2007. – Vol. 19, Issue 10. – P. 108108-1–108108-4. doi: 10.1063/1.2796182
11. Макаренко, Н. Н. Асимптотические модели внутренних стационарных волн [Текст] / Н. Н. Макаренко, Ж. Л. Мальцева // Прикл. механика и тех. физика. – 2008. – Т. 49, № 4. – С. 151–161.
12. Debsarma, S. Fourth-order nonlinear evolution equations for a capillary-gravity wave packet in the presence of another wave packet in deep water [Text] / S. Debsarma, K. P. Das // Physics of Fluids. – 2007. – Vol. 19, Issue 9. – P. 097101-1–097101-16. doi: 10.1063/1.2772252
13. Carr, M. The motion of an internal solitary wave of depression over a fixed bottom boundary in a shallow, two-layer fluid [Text] / M. Carr, P. A. Davies // Physics of Fluids. – 2006. – Vol. 18, Issue 1. – P. 016601-1–016601-10. doi: 10.1063/1.2162033
14. Sutherland, B. S. Intrusive gravity currents propagating along thin and thick interfaces [Text] / B. S. Sutherland, J. T. Nault // Journal of Fluid Mechanics. – 2007. – Vol. 586. – P. 109–118. doi: 10.1017/s0022112007007288
15. Hacıyev, B. I. Unstationary waves in two-layered fluid caused by normal loading at the interface [Text] / B. I. Hacıyev // Proc. IMM (Inst. Mathematics and Mechanics) NAS of Azerbaijan, 2006. – P. 119–126.
16. Селезов, И. Т. Нелинейное взаимодействие внутренних и поверхностных гравитационных волн в двухслойной жидкости со свободной поверхностью [Текст] / И. Т. Селезов, О. В. Авраменко, Ю. В. Гуртовй, В. В. Наратовый // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – Т. 52, № 1. – С. 72–83.
17. Селезов, И. Т. Математические методы в задачах распространения и дифракции волн [Текст] / И. Т. Селезов, Ю. Г. Кривонос. – К: Наукова думка, 2012. – 232 с.
18. Naradovyy, V. Interaction of internal and surface waves in two-layer fluid with free surface [Text] / V. Naradovyy // Challenges of Modern Tehnology. – 2013. – Vol. 3, Issue 4. – P 103–106.