13. Гринберг, Я. Р. Математическое моделирование последовательного заполнения телекоммуникационных сетей с топологией «колесо» потоками связи [текст] / Я. Р. Гринберг, И. И. Курочкин // Труды Института системного анализа Российской академии наук. – 2008. – Т. 32. – С. 82–108.
14. Стерин, В. Л. Маршрутизация с балансировкой нагрузки по длине очереди на узлах телекоммуникационной сети [Текст] / В. Л. Стерин, Т. В. Вавенко, Д. М. Еферов // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Нові рішення в сучасних технологіях. – 2013. – № 1 (977). – С. 45–49.
15. Парфьонов, Ю. Е. Вибір математичного апарату при розробленні імітаційних моделей інформаційних систем [Текст] / Ю. Е. Парфьонов // Системи обробки інформації. – 2011. – Вип. 3 (93). – С. 69–72.
16. Калекина, Т. Г. Обоснование критерия структурно-информационной связности при анализе надежности телекоммуникационных систем и сетей [Текст] / Т. Г. Калекина, Т. Н. Коваленко // Радіоелектроніка, інформатика, управління. – 2010. – № 1. – С. 66–70.
17. Шелухин, О. И. Моделирование информационных систем [Текст] / О. И. Шелухин. – М.: Горячая линия-Телеком, 2012. – 516 с.
18. Коновалов, Г. В. Многомерные сети — будущее инфокоммуникационных сетей [Текст] / Г. В. Коновалов // Электросвязь. – 2008. – № 4. – С. 28–32.
19. Климаш, М. М. Модель забезпечення параметрів якості обслуговування системи розподілу мультисервісного трафіку [Текст] / М. М. Климаш, О. А. Лаврів, Б. А. Бугиль, Р. І. Бак // Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка” “Радіоелектроніка та телекомунікації”. – 2011. – № 705. – С. 138–144.
20. Тимченко, О. В. Дослідження механізмів забезпечення якості обслуговування в мультисервісних мережах [Текст] / О. В. Тимченко, С. Аскар, А. Мухамад, А. Нашат // Моделювання та інформаційні технології. Зб. наук. пр. ІПМЕ НАН України. – 2008. – Вип.47. – С. 133–142.

УДК 519.213.7, 519.237.7
DOI: 10.15587/1729-4061.2015.50442

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ПОКАЗАТЕЛЯ ВЗАИМОСВЯЗИ МНОГОМЕРНЫХ УСТОЙЧИВЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ПОМОЩЬЮ ФАКТОРНОЙ МОДЕЛИ

В. Л. Шергин
Кандидат технических наук, доцент
Кафедра искусственного интеллекта
Харьковский национальный университет радиоэлектроники
пр. Ленина, 14, г. Харьков, Украина, 61166
E-mail: sherginvl@mail.ru

Досліджується проблема інтерпретації показників взаємозв'язку багатовимірних стійких випадкових величин. Запропоновано розглядати взаємозв'язок між ними в рамках факторної моделі. Серед досліджуваних законів розподілу виділено підклас таких, для яких можливе представлення величин, що наблюдаються, лінійною комбінацією незалежних. Показано, що в межах цього підкласу показник взаємозв'язку має такий саме сенс, як і коефіцієнт кореляції для нормального розподілу

Ключові слова: багатовимірні стійкі розподіли, показник взаємозв'язку, факторна модель, симетричне перемішування прихованих факторів

Рассмотрена проблема интерпретации показателей взаимосвязи многомерных устойчивых случайных величин. Предложено рассматривать взаимосвязь между ними в рамках факторной модели. Среди исследуемых законов распределения выделен подкласс таких, для которых возможно представление наблюдаемых величин линейной комбинацией независимых. Показано, что в рамках этого подкласса показатель взаимосвязи имеет тот же смысл, что и коэффициент корреляции для нормального распределения

Ключевые слова: многомерные устойчивые распределения, показатель взаимосвязи, факторная модель, симметричное перемешивание скрытых факторов

1. Введение

Одним из базовых понятий математической статистики является взаимосвязь случайных величин. Соответственно, построение количественных мер такой взаимосвязи является важным направлением этой отрасли науки. В рамках нормального закона распределения универсальными показателями взаимосвязи служат коэффициенты корреляции, однако за пределами этого закона они теряют свою универсальность и даже не всегда существуют.

В общем случае разработка и выбор показателей связи между случайными величинами обусловлены не только законом распределения, но и целью использования таких показателей, то есть на первый план выходит проблема интерпретации показателей взаимосвязи.

Среди множества разнообразных законов распределения случайных величин особое место занимают устойчивые распределения. Устойчивые случайные величины широко используются в моделях случайных процессов, описывающих временные ряды в различных предметных областях. При этом выбор и использование существующих показателей взаимосвязи для устойчивых законов осложняются параметризацией как самих законов, так и этих показателей в частотной области. В связи с этим проблема интерпретации показателей взаимосвязи в пространстве самих случайных величин является актуальной научной и важной практической задачей.

2. Анализ литературных данных и постановка проблемы

Традиционным показателем силы связи двух центрированных случайных величин является коэффициент корреляции, определяемый как смешанный момент второго порядка, нормированный на корень из произведения дисперсий:

$$r_{xy} = M(XY)\cdot\left(M(X^2)\cdot M(Y^2)\right)^{-1/2}. \qquad (1)$$

Для нормального закона распределения такой коэффициент является универсальным показателем, совпадающим в частности, с коэффициентами линейной регрессии y(x) и x(y) (для нормированных и центрированных величин). Вероятностному определению (1) прямо соответствует выборочный коэффициент корреляции Пирсона:

$$r_{xy} = \sum x_i y_i \cdot\left(\sum x_i^2 \cdot \sum y_i^2\right)^{-1/2}. \qquad (2)$$

Широкое использование нормального закона, наглядность и простота расчёта выборочного коэффициента служат причиной тотального доминирования (1) и (2) как в теоретических моделях, так и при практических расчётах.

Вместе с тем, за пределами гауссовского закона коэффициенты (1)–(2) теряют свою универсальность. Более того, непосредственно из определения (1) следует, что этот коэффициент существует только для случайных величин с конечными моментами второго порядка. Следовательно, при несоблюдении этого условия и выборочный коэффициент корреляции (2) не несёт никакого смысла. В то же время очевидно, что само явление взаимосвязи может быть присуще любым случайным величинам, в том числе и не имеющим моментов второго (или иного) порядков. Важным классом подобных законов распределения являются устойчивые законы [1].

Существует большое количество иных показателей связи между случайными величинами, выбор которых обусловлен не только законом распределения, но и целью использования таких показателей, интерпретацией понятий "мера сходства" и "мера различия". Детальный обзор существующих мер связи случайных величин дан в монографиях [2, 3].

Разработка и выбор показателей взаимосвязи для устойчивых законов осложняется неоднозначностью форм параметризации этих законов (а также отсутствием явных выражений для плотностей распределения). Тем не менее, такие показатели существуют [3–10]. Они выражаются через коэффициенты характеристических функций, т. е. определяются не в пространстве самих случайных величин, а в частотной области. В связи с этим на первый план выходит проблема интерпретации этих показателей взаимосвязи.

В частности, для приложений, связанных с факторным анализом (но не только), важное значение имеет вопрос представления наблюдаемых случайных величин линейной комбинацией независимых [11]. С этой точки зрения некоторые из известных показателей [4] вообще не информативны, а другие [5, 6] отражают лишь частные случаи. Это относится и к показателям, предложенным в [7] для моделирования процессов Орнштейна-Уленбека. В работе [8] для выявления взаимосвязи многомерных альфа-устойчивых величин использовалась модель авторегрессии - скользящего среднего. Такой подход является достаточно трудоёмким и, к тому же, получаемые показатели взаимосвязи не имеют внятной интерпретации. Достоинством показателя взаимосвязи [9], основанного на использовании дробных моментов, является то, что он задаётся в пространстве случайных величин, а не в частотной области. Вместе с тем, этот показатель нелинеен в том смысле, что не отражает силу линейной связи между случайными величинами.

Следует также отметить, что моделям многомерных устойчивых распределений присуща избыточность [4, 10], а, следовательно, показатель взаимосвязи может терять изначальный смысл при расширении набора параметров модели.

3. Цель и задачи исследования

Любая совокупность конечного числа случайных величин, следующих многомерному нормальному распределению, может быть представлена как линейная комбинация независимых нормально распределённых случайных величин. Коэффициенты корреляции отражают меру отличия этого линейного преобразования от тождественного.

Построение аналогичного показателя взаимосвязи для случайных величин, подчинённых многомерному устойчивому распределению, является основной целью настоящей работы.

Поставленная цель достигается решением следующих задач:

– разработка модели симметричного перемешивания скрытых факторов для нормального (гауссовского) распределения (раздел 4);

– анализ форм параметризации и соответствующих им показателей взаимосвязи многомерных устойчивых распределений (раздел 5);

– применение модели симметричного перемешивания случайных факторов к величинам, следующим многомерному устойчивому распределению; выделение подкласса рассматриваемых распределений, для которых возможно представление наблюдаемых случайных величин линейной комбинацией независимых (раздел 6).

4. Модель симметричного перемешивания скрытых факторов для нормально распределённых случайных величин

Одной из удобных моделей, наглядно поясняющей сущность взаимосвязи между двумя случайными величинами, является модель симметричного перемешивания скрытых факторов

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \text{ или } \mathbf{x} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}. \quad (3)$$

Согласно этой модели взаимосвязь наблюдаемых одинаково распределённых случайных величин (x, y) обусловлена перемешиванием независимых (и также одинаково между собой распределённых) ненаблюдаемых случайных величин (u, v). Весовые коэффициенты (a, b) в (3) определяются требованием совпадения масштабов частных законов распределения величин x, y, u, v.

Для двумерного гауссовского распределения коэффициенты модели (3) можно найти из условия

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}' = \mathbf{V}, \quad (4)$$

где $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{pmatrix}$ – корреляционная матрица наблюдаемых величин (x, y).

Так как $\mathbf{V}$ положительно полуопределена, то разложение (4) существует и единственно [12]. В этом случае

$$a = \cos\theta, b = \sin\theta, \text{ т. е. } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где $r = \sin(2\theta)$.

С точки зрения геометрической интерпретации, перемешивание (3), (5) представляет собой контравариантное преобразование координат между прямоугольной декартовой системой XOY и косоугольной UOV с координатным углом $\eta = \pi/2 - 2\theta$, повёрнутой на угол θ (рис. 1). При этом коэффициент корреляции равен косинусу координатного угла:

$$\cos\eta = \sin(2\theta) = r_{xy}. \quad (6)$$

Если измерить координаты точек эллипса рассеивания случайных величин (x, y) в косоугольной системе координат UOV, а затем «разжать ножницы» (т. е. расположить оси OU, OV под прямым углом), то эллипс рассеивания приобретёт форму круга, как и должно быть в случае независимых случайных величин.

Таким образом, наблюдатель интерпретирует наличие взаимосвязи между (x, y) как результат перехода от «естественной» косоугольной системы координат к прямоугольной. Возможна и обратная интерпретация сущности взаимосвязи (как на правой части рисунка): как переход от прямоугольной системы UOV к косоугольной XOY.

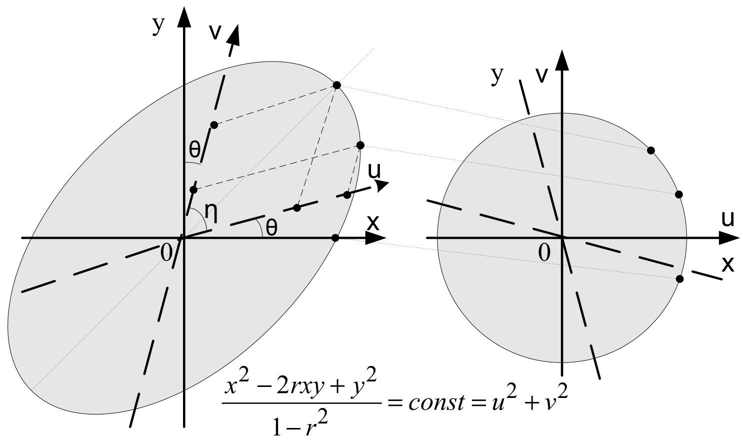

Рис. 1. Геометрическая интерпретация взаимосвязи (корреляции) двумерного нормального распределения

Модель симметричного перемешивания (3)–(5) легко обобщается на случай, когда рассматриваемые зависимые переменные имеют разный масштаб и/или их количество $n > 2$. Если обозначить $\mathbf{x} \in R^n$ – вектор наблюдаемых случайных величин, $\mathbf{G} = \mathrm{diag}(\gamma_1, ..., \gamma_n)$ – диагональная матрица, задающая их масштаб, $\mathbf{u} \in R^n$ – вектор скрытых факторов, $\mathbf{P}$ – положительно определённая симметрическая матрица, то факторное преобразование симметричного перемешивания (3) приобретает вид

$$\mathbf{x} = \mathbf{GPu}. \quad (7)$$

Для многомерного гауссовского распределения элементы матрицы $\mathbf{G}$ являются среднеквадратичными отклонениями (т. е. квадратными корнями из диагональных элементов дисперсионно-ковариационной матрицы $\mathbf{\Omega}$), а элементы матрицы факторного преобразования $\mathbf{P}$ – однозначно определяются по известной матрице $\mathbf{V}$ (согласно (4)), или по матрице $\mathbf{\Omega}$:

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{GPP'G}. \quad (8)$$

Геометрическая интерпретация модели (7), (8) остаётся такой же, как и для двумерного нормированного варианта (3), (4): компоненты матрицы $\mathbf{P}$ равны косинусам углов между осями прямоугольной системы координат, соответствующей наблюдаемым величинам $\mathbf{x}$ и осями косоугольной системы, соответствующей скрытым факторам $\mathbf{u}$. Коэффициенты корреляции равны косинусам координатных углов координатной системы скрытых факторов.

Важно отметить, что возможность интерпретации взаимосвязи случайных величин как результата перемешивания скрытых факторов (3), (7) и использование косинуса координатного угла (6) как числовой меры силы связи инвариантны по отношению к самим законам распределения рассматриваемых случайных величин. Более того, сама возможность построения факторной модели (3), (7) никак не связана с наличием или отсутствием моментов второго (или иного) порядка. А вот соотношения (4), (8), связывающие матрицу факторного преобразования с корреляционной или ковариационной матрицами, справедливы только для нормального закона распределения.

5. Анализ и выбор форм параметризации устойчивых распределений

Широким классом одномерных законов распределения, не обладающих моментами второго порядка, являются устойчивые законы $g(x;\alpha,\beta,\gamma,\delta)$. Параметры имеют следующий смысл [10]: $\alpha\in(0,2]$ – параметр устойчивости; $-1\le\beta\le1$ – параметр асимметрии; $\gamma>0$ – параметр масштаба; $-\infty<\delta<\infty$ – параметр положения (смещения).

Случай $\alpha=2$ соответствует гауссовскому (нормальному) закону, а при любых других значениях параметра устойчивости случайная величина, подчиняющаяся α-устойчивому распределению, имеет моменты, не превышающие α.

Линейная комбинация $Y=\sum c_k X_k$ конечного числа устойчивых случайных величин X_k, имеющих одинаковый индекс устойчивости (α) также является α-устойчивой. При этом параметры масштаба (γ) подчиняются соотношению

$$\gamma_y^\alpha=\sum|c_k|^\alpha\,\gamma_{x_k}^\alpha. \tag{9}$$

Важным частным случаем α-устойчивых законов являются симметричные α-устойчивые законы ($S\alpha S$-законы), для которых $\beta=\delta=0$.

Плотности распределений устойчивых законов не выражаются через элементарные функции (за исключением трёх случаев: $\alpha=1,\beta=0$; $\alpha=1/2,\beta=\pm1$; $\alpha=2$), поэтому обычно такие законы параметризуются в частотной области, т. е. с помощью характеристической функции:

$$\varphi(t)=M(e^{itx})=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}g(x;\alpha,\gamma)dx=\exp(-|\gamma t|^\alpha). \tag{10}$$

Согласно [1], характеристическая функция многомерного $S\alpha S$-распределения имеет вид:

$$\varphi(\mathbf{t})=\exp\left\{-\int_{S_n}|\mathbf{t}\mathbf{w}|^\alpha\,\Gamma(d\mathbf{w})\right\}, \tag{11}$$

где $\Gamma(d\mathbf{w})$ – спектральная мера на единичной сфере S_n рассматриваемого n-мерного пространства $(\mathbf{t}\in R^n)$.

Из вида (11) следует, что в общем случае многомерные $S\alpha S$-распределения не могут быть описаны конечным набором параметров. В работе [4] показано, что требуемый набор параметров является счётным и состоит из $1\le m\le\infty$ положительно полуопределённых симметрических матриц Ω_j:

$$\log\varphi(\mathbf{t})=-\sum_{j=1}^{m}\left(\mathbf{t}'\Omega_j\mathbf{t}\right)^{\alpha/2}. \tag{12}$$

Существуют и другие формы параметризации законов (11). Например, семейство форм, предложенных de Silva для двумерного случая, из которых наиболее употребимой является следующая [3]:

$$\log\varphi(s,t)=-\sum_{j=1}^{m}\left(a_j|s|^\lambda+b_j|t|^\lambda+c_j|s\pm t|^\lambda\right)^{\alpha/\lambda}, \tag{13}$$

где $a_j,b_j,c_j\ge0$, $0<\alpha\le\lambda\le2$.

Практическое применение форм (12), (13), равно как и других, сопряжено с проблемой интерпретации, оставляя открытым вопрос, какую из форм следует предпочесть и каким образом подбирать порядки моделей (m) и их коэффициенты.

Для обеих форм (12)–(13) существуют показатели взаимосвязи:

$$r_{kl}=\frac{\sum_{j=1}^{m}\omega_{kl}(j)}{\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\omega_{kk}(j)\cdot\sum_{j=1}^{m}\omega_{ll}(j)}},\ k,l=1,\dots,n, \tag{14}$$

$$r_{xy}=\frac{\sum_{j=1}^{m}\left((a_j+c_j)^{\alpha/\lambda}+(b_j+c_j)^{\alpha/\lambda}-(a_j+b_j)^{\alpha/\lambda}\right)}{2\sqrt{\sum_{j=1}^{m}(a_j+c_j)^{\alpha/\lambda}\cdot\sum_{j=1}^{m}(b_j+c_j)^{\alpha/\lambda}}}. \tag{15}$$

Основным недостатком коэффициентов (14), (15) является их определение в частотной плоскости (s,t). Они описывают форму характеристической функции (степень её симметрии), но не имеют какой-либо содержательной интерпретации в пространстве самих случайных величин (x,y). Соответственно, такие показатели не несут никакой информации о том, насколько совместная плотность распределения случайных величин $g(x,y)$ отклоняется от произведения частных плотностей $g(x)\cdot g(y)$.

Например, для приложений, связанных с факторным анализом (но не только), важное значение имеет вопрос, можно ли представить наблюдаемые случайные величины линейной комбинацией независимых. К сожалению, коэффициенты (14), (15) сами по себе малополезны для решения этого вопроса. Более того, нулевое значение коэффициента (14) вообще не свидетельствует о независимости случайных величин.

6. Применение модели перемешивания скрытых факторов к многомерным устойчивым распределениям

Как уже было отмечено, модель симметричного перемешивания (3), (7) и её геометрическая интерпретация могут использоваться при любом законе распределения наблюдаемых случайных величин. Рассмотрим применение этой модели для многомерного $S\alpha S$-распределения, начав с простейшего случая двух случайных величин, имеющих одинаковый масштаб (примем его без нарушения общности за единицу).

В силу линейности преобразования Фурье характеристическая функция $\varphi(\mathbf{t})$ вектора $\mathbf{x}$ $\mathbf{Pu}$ (3) связана с характеристической функцией $\psi(\mathbf{t}_1)$ вектора $\mathbf{u}$ простым соотношением:

$$\varphi(\mathbf{t}) = \psi(\mathbf{P'}\mathbf{t}) = \psi(sa + tb, sb + ta). \quad (16)$$

Поскольку компоненты вектора $\mathbf{u}$ независимы, то характеристическая функция их совместного распределения равна произведению одномерных характеристических функций компонент, т. е.

$$\varphi(\mathbf{t}) = \psi^{(1)}(sa + tb) \cdot \psi^{(1)}(sb + ta)\,. \quad (17)$$

Таким образом, с учётом (10), искомая характеристическая функция двумерного устойчивого распределения величин (x, y) имеет вид:

$$\log\varphi(s,t) = -|sa + tb|^{\alpha} - |sb + ta|^{\alpha}. \quad (18)$$

Из (3) и (9) следует, что коэффициенты масштабов (γ) частных законов распределения величин x,y и величин u,v связаны соотношением:

$$\gamma_x^{\alpha} = |a|^{\alpha}\,\gamma_u^{\alpha} + |b|^{\alpha}\,\gamma_v^{\alpha} = \gamma_y^{\alpha}. \quad (19)$$

Принимая (как и в гауссовском случае) все коэффициенты масштабов равными единице, получим:

$$|a|^{\alpha} + |b|^{\alpha} = 1. \quad (20)$$

Выражение (20) представляет собой уравнение единичной окружности в метрике L_{α}, а параметры a и b представляют собой абсциссу и ординату точки этой окружности, соответствующей полярному углу θ:

$$a = \frac{\cos\theta}{\left(|\cos\theta|^{\alpha} + |\sin\theta|^{\alpha}\right)^{1/\alpha}},\; b = \frac{\sin\theta}{\left(|\cos\theta|^{\alpha} + |\sin\theta|^{\alpha}\right)^{1/\alpha}}. \quad (21)$$

Сопоставив (18) с (12), легко заметить, что параметризация (18) является частным случаем (12), соответствующим

$$m = 2\,,\; \Omega_1 = PQ_1P' = \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix},\; \Omega_2 = PQ_2P' = \begin{pmatrix} b^2 & ab \\ ab & a^2 \end{pmatrix},$$

где $Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Тогда согласно (14) коэффициент взаимосвязи величин (x, y) имеет вид

$$r_{xy} = \frac{2ab}{a^2 + b^2}. \quad (22)$$

Подставив в (22) значения a и b из (21), получим:

$$r_{xy} = \sin(2\theta) = \cos(\eta). \quad (23)$$

Таким образом, коэффициент взаимосвязи (22) удовлетворяет тому же самому соотношению (6), что и в случае гауссовского распределения. Сохраняется и его геометрическая интерпретация: косинус координатного угла системы координат скрытых факторов. Отличие же от гауссовского случая проявляется в форме «эллипсов» рассеяния (т. е. кривых постоянной плотности), которые в случае $S\alpha S$-распределений имеют иную форму. Так, на рис.2 показаны соответствующие кривые для двумерного распределения Коши ($\alpha = 1$) для зависимых переменных (x,y) и скрытых факторов (u,v).

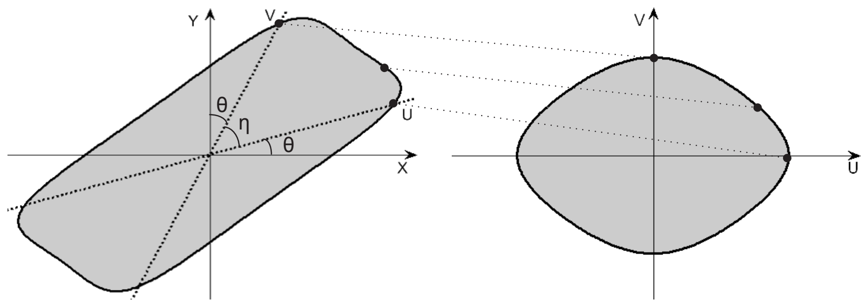

Рис. 2. Геометрическая интерпретация взаимосвязи (корреляции) двумерного распределения Коши

Как и в гауссовском случае, обобщение модели симметричного перемешивания (3) на случай, когда рассматриваемые зависимые переменные имеют разный масштаб и/или их количество $n > 2$, не представляет сложности. Для факторной модели (7) характеристическая функция многомерного $S\alpha S$-распределения (обобщающая (18)) будет иметь вид

$$\log\varphi(\mathbf{t}) = -\sum_{j=1}^{n}\left(\left|\sum_{k=1}^{n} p_{jk}\gamma_k t_k\right|^{\alpha}\right). \quad (24)$$

Полученное выражение является частным случаем общей модели многомерного устойчивого распределения (12), соответствующим выбору

$$m = n,\; \mathbf{\Omega}_j = \mathbf{G}\mathbf{P}_j\mathbf{P}_j'\mathbf{G}, \quad (25)$$

где $\mathbf{P}_j$ – j-й вектор-столбец матрицы факторного преобразования.

Коэффициенты матрицы $\mathbf{P}$ должны удовлетворять условиям симметрии $p_{jk} = p_{kj}$ и нормировки в метрике L_{α}, аналогичным (20):

$$\|\mathbf{P}_j\|_{\alpha} = \sum_{k=1}^{n} |p_{jk}|^{\alpha} = 1, \quad \forall j = 1,\ldots,n\,. \quad (26)$$

Нетрудно заметить, что при $\alpha = 2$ условие (26) означает равенство единице суммы квадратов направляющих косинусов координатных осей факторов относительно наблюдаемых величин, и, в силу симметрии, наоборот. При этом важно, что использование обобщённой метрики L_{α} и соответствующей ей нормировки (26) не меняет геометрической интерпретации факторного преобразования (7) по сравнению с гауссовским случаем (рис. 1). Изменяется лишь связь между элементами матрицы факторного преобразования и направляющими косинусами углов наклона θ_{jk} осей одной системы координат относительно другой: привычное соотношение $p_{jk} = \cos\theta_{jk}$, справедливое в гауссовом случае, переходит в более общее

$$p_{jk} = \cos(\theta_{jk}) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} |\cos(\theta_{jk})|^{\alpha} \right)^{-1/\alpha}. \quad (27)$$

Сравнив (25) и (8), легко убедиться, что при $\alpha = 2$ модель (24) соответствует многомерному гауссовскому распределению, дисперсионно-ковариационная матрица $\mathbf{\Omega}$ которого (8) является суммой матриц $\mathbf{\Omega}_j$ (25).

Важно отметить, что характеристическая функция (24) параметризуется вполне однозначно, в отличие от общего случая (12). Форма (24) выделяет из всего множества многомерных SαS-распределений такие, для которых сохраняется привычная (т. е. такая же, как и для многомерного нормального распределения) интерпретация понятия зависимости случайных величин. А именно, зависимость рассматривается как результат симметричного перемешивания скрытых факторов, что в свою очередь с точки зрения геометрической интерпретации трактуется как измерение величин в косоугольной системе координат. В этом случае косинусы координатных углов выступают естественными показателями взаимосвязи случайных величин. Именно так можно интерпретировать парные коэффициенты корреляции в случае многомерного нормального распределения и такой же смысл будут иметь коэффициенты взаимосвязи (14) случайных величин, следующих многомерному устойчивому распределению, параметризованному в форме (24).

7. Выводы

В работе предложена модель симметричного перемешивания скрытых факторов (3), (7), позволяющая рассматривать взаимосвязь между случайными величинами в рамках факторной модели. Согласно этому подходу, любая совокупность конечного числа одинаково распределённых наблюдаемых случайных величин рассматривается как результат линейного преобразования такого же количества независимых случайных величин (скрытых факторов), также одинаково распределённых. Показано, что коэффициент корреляции в случае многомерного нормального распределения служит мерой отличия этого линейного преобразования факторов от тождественного и имеет наглядную геометрическую интерпретацию.

Проведён анализ форм параметризации многомерных устойчивых законов распределения. Отмечено, что для рассматриваемого класса распределений представление наблюдаемых случайных величин линейной комбинацией независимых не всегда возможно. Применение модели симметричного перемешивания скрытых факторов (7) к многомерным устойчивым распределениям позволило выделить такой подкласс этих распределений (24)–(27), для которых разложение (7) возможно, что является первым результатом настоящей работы, обладающим научной новизной. Важно отметить, что выделенный подкласс распределений (24) параметризуется однозначно, в отличие от общего случая многомерных устойчивых законов (12).

Показано, что в рамках выделенного подкласса многомерных устойчивых распределений сохраняется привычная (т.е. такая же, как и для многомерного нормального распределения) интерпретация показателя взаимосвязи (14), что является вторым и основным результатом работы. Значимость его обусловлена тем, что этот показатель параметризуется в частотной области и в общем случае (т. е. за пределами выделенного подкласса распределений) не имеет интерпретации в пространстве самих случайных величин.

Литература

1. Uchaikin, V. V. Chance and stability.Stable distributions and their applications [Text] / V. V. Uchaikin, V. M. Zolotarev. – Netherlands, Utrecht, VSP, 1999. – 570 p.
2. Mari, D. D. Correlation and dependence [Text] / D. D. Mari, S. Kotz. – Imperial College Press, 2004. – 219 p.
3. Balakrishnan, N.·Continuous bivariate distributions [Text] / N. Balakrishnan, C.-D. Lai. – Springer, 2009. – 684 p. doi: 10.1007/b101765
4. Press, S. J. Multivariate stable distributions [Text] / S. J. Press // Journal of Multivariate Analysis. – 1972. – Vol. 2, Issue 4. – P. 444–462. doi: 10.1016/0047-259x(72)90038-3
5. DeSilva, B. M. A test of independence for bivariate symmetric stable distributions [Text] / B. M. DeSilva, R. C. Griffiths // Australian Journal of Statistics. – 1980. – Vol. 22. – P. 172–177. doi: 10.1111/j.1467-842x.1980.tb01164.x
6. Bickson, D. Inference with multivariate heavy-tails in linear models [Text] / D. Bickson, C. Guestrin // Advances in Neural Information Processing Systems, 2010. – P. 208–216.
7. Wyłomańska, A. Measures of dependence for Ornstein–Uhlenbeck processes with tempered stable distribution [Text] / A. Wyłomańska // Acta Physica Polonica B. – 2011. – Vol. 42, Issue 10. – P. 2049.
8. Szajnowski, W. J. Simulation of dependent samples of symmetric alpha-stable clutter [Text] / W. J. Szajnowski, J. B. Wynne // IEEE Signal Processing Letters. – 2001. – Vol. 8, Issue 5. – P. 151–152. doi: 10.1109/97.917700
9. Kring, S., Estimation of α-stable sub-Gaussian distributions for asset returns [Text] / S. Kring, S. T. Rachev, M. Höchstötter, F. J. Fabozzi. – Risk Assessment. – Physica-Verlag HD, 2009. – P. 111–152. doi: 10.1007/978-3-7908-2050-8_6
10. Nolan, J. P. Stable distributions - models for heavy tailed data [Electronic resource] / J. P. Nolan. – Boston: Birkhauser Unfinished manuscript, Chapter 1. – Available at: http://academic2.american.edu/~jpnolan/stable/chap1.pdf – 13.05.2009.
11. Айвазян, С. А. Прикладная статистика: Классификации и снижение размерности [Текст]: справ. изд. / С. А. Айвазян, В. М. Бухштабер, И. С. Енюков, Л. Д. Мешалкин; под ред. С. А. Айвазяна. – М.: Финансы и статистика, 1989. – 607 с.
12. Хорн, Р. Матричный анализ [Текст] / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 655 с.