Розглянуто звичайні та фігурні наближення гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду з двома гілками розгалуження (дробів Сємашка). Використовуючи метод мажорант, встановлено деякі достатні умови абсолютної та фігурно абсолютної збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду до одної і тої ж самої границі, а також вказано область, якій належать значення цієї границі та розглянутих наближень

Ключові слова: неперервні дроби, гіллясті ланцюгові дроби, наближення, абсолютна збіжність, фігурно абсолютна збіжність, мажорантний дріб

Рассмотрены обычные и фигурные приближения ветвящихся цепных дробей специального вида с двумя ветвями разветвления (дробей Семашко). Используя метод мажорант, установлены некоторые достаточные условия абсолютной и фигурно абсолютной сходимости ветвящихся цепных дробей специального вида к одному и тому же пределу, а также указана область, которой принадлежат значения этого предела и рассмотренных приближений

Ключевые слова: непрерывные дроби, ветвящиеся цепные дроби, приближение, абсолютная сходимость, фигурно абсолютная сходимость, мажорантная дробь

УДК 517.524
DOI: 10.15587/1729-4061.2015.54116

ДОСЛІДЖЕННЯ АБСОЛЮТНОЇ ТА ФІГУРНО АБСОЛЮТНОЇ ЗБІЖНОСТІ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

Т. М. Антонова
Кандидат фізико-математичних наук, доцент*
E-mail: tamara_antonova@ukr.net
С. М. Возна
Кандидат фізико-математичних наук*
E-mail: svitlanavozna@gmail.com
*Кафедра прикладної математики
Національний університет «Львівська політехніка»
вул. С. Бандери, 12, м. Львів, Україна, 79000

1. Вступ

Неперервні (ланцюгові) дроби були об'єктом вивчення і засобом наукових досліджень багатьох видатних математиків минулого. За допомогою неперервних дробів розв'язано важливі задачі теорії функцій і диференціальних рівнянь, теорії чисел і обчислювальної математики.

Історично в теорії неперервних дробів сформувалось два напрямки: теоретико-числовий і аналітичний. Перший напрямок займається вивченням регулярних неперервних дробів, їх застосуванням до наближення дійсних чисел і розв'язування діофантових рівнянь. Важливі результати у цьому напрямку були одержані у роботах Швентера, Гюйгенса, Валліса, Ейлера, Лагранжа, Лежандра, Галуа, Якобі та їх послідовників.

Основний предмет досліджень аналітичної теорії неперервних дробів – теорія розвинення і збіжності неперервних дробів, елементами яких є функції комплексної змінної z. Важливість таких досліджень полягає у тому, що скінченні ланцюгові дроби є раціональними функціями від z і можуть використовуватись як ефективний апарат наближення аналітичних функцій одної змінної. Говорячи про неперервні дроби, а також тісно пов'язані з ними апроксимації Паде, їх порівнюють з такими засобами зображення аналітичних функцій, як ряди або нескінченні добутки. Виявилось, що області збіжності ланцюгових дробів, у які розвиваються деякі аналітичні функції, є значно ширшими, ніж області збіжності відповідних степеневих рядів.

З аналітичною теорією неперервних дробів пов'язані імена таких відомих математиків як Гаус, Лаплас, Лежандр, Якобі, Гейне, Ріман, Стілтьєс, Чебишев.

За останні 50 років саме поняття ланцюгового дробу розширилось. З'явились такі важливі для застосувань поняття як операторні і багатовимірні ланцюгові дроби. У 60-х роках XX-го століття В. Я. Скоробогатьком на основі інтерпретації ланцюгового дробу у вигляді графу було запропоновано дискретне багатовимірне узагальнення неперервних дробів – гіллясті ланцюгові дроби. Континуальний аналог гіллястого ланцюгового дробу одержав назву інтегрального ланцюгового дробу. В основі цих понять лежать різні ідеї узагальнення ланцюгового (неперервного) дробу.

2. Аналіз літературних даних і постановка задачі

Застосування апарату неперервних дробів для побудови чисельних методів розв'язування конкретної задачі вимагає вибору того чи іншого різновиду такого дробу: звичайного, матричного, операторного, гіллястого, інтегрального тощо. Ланцюгові дроби застосовуються, зокрема, для зображення гіпергеометричних функцій, для розв'язування проблеми моментів, для побудови аналітичного продовження функцій, заданих у вигляді рядів. Аналітичній теорії неперервних дробів присвячено монографії [1–5]. Гіллястий ланцюговий дріб (ГЛД) відіграє стосовно до функцій багатьох змінних таку ж роль, як звичайний неперервний дріб відносно функцій однієї змінної. Такі питання аналітичної теорії ГЛД, як збіжність, оцінки похибок наближення, стійкість, розвинення функцій у різні типи дробів та інші, розглянуто у монографіях [6–8] та у численних журнальних публікаціях.

Одним з ефективних алгоритмів розвинення аналітичних функцій у неперервні дроби є побудова відповідних неперервних дробів для степеневих рядів, в які розвиваються дані функції [4, 5]. Проблема побудови відповідних ГЛД для подвійних степеневих рядів не має однозначного розв'язку. В роботі [9] побудовано відповідний ГЛД загального вигляду з двома гілками розгалуження. Різним конструкціям відповідних ГЛД спеціального вигляду (із змінною кількістю гілок розгалуження) присвячено роботи [10–13]. Багатовимірні аналоги неперервних дробів, побудовані у роботах [10, 11], пізніше стали називати двовимірними неперервними дробами (ДНД). Основи аналітичної теорії ДНД викладені у монографії [14]. ГЛД, розглянуті в роботі [13], – частковий випадок гіллястих ланцюгових дробів з N нерівнозначними змінними, які є засобом наближення функцій багатьох змінних.

Запропоновані у роботі [12] ГЛД спеціального вигляду теж можна вважати двовимірними неперервними дробами [8]. На даний час є досить мало публікацій, присвячених таким ГЛД. Це зумовлює доцільність розгляду задач та методів, аналогічних наведеним у монографії [14].

Для застосувань неперервних дробів та їх багатовимірних узагальнень важливе значення мають їх збіжність і обчислювальна стійкість. Тому при вивченні ланцюгових дробів різної структури в першу чергу розглядалось питання збіжності. Такі дослідження продовжуються дотепер [15–19].

У даній роботі об'єктом дослідження є гіллясті ланцюгові дроби (ГЛД) спеціального вигляду

$$b_0+F_{0,0}+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{i=1}^{\infty}\frac{a_{i,0}}{b_{i,0}+F_{i,0}}+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{i=1}^{\infty}\frac{a_{0,i}}{b_{0,i}+F_{0,i}}, \tag{1}$$

де $F_{i,j}$ – звичайні ланцюгові (неперервні) дроби

$$F_{i,j}=\mathop{\mathrm{D}}\limits_{p=1}^{\infty}\frac{a_{p+i,p+j}}{b_{p+i,p+j}}=\cfrac{a_{1+i,1+j}}{b_{1+i,1+j}+\cfrac{a_{2+i,2+j}}{b_{2+i,2+j}+\cfrac{a_{3+i,3+j}}{b_{3+i,3+j}+\ddots}}},$$

$$i=0,1,\ldots,\ j=0,1,\ldots, \tag{2}$$

а $b_0, a_{i,j}, b_{i,j}$, – $i=0,1,\ldots$, $j=0,1,\ldots$, $i+j\ge 1$ – комплексні сталі або комплекснозначні функції двох комплексних змінних z_1,z_2, визначені в області $D\subset C^2$. ГЛД, всі елементи якого сталі, називатимемо числовим ГЛД. Якщо серед елементів ГЛД є функції комплексних змінних z_1,z_2, то такий ГЛД називатимемо функціональним.

Вивчення ГЛД вигляду (1)–(2) започаткував польський математик В. Сємашко.

На відміну від звичайних ланцюгових (неперервних) дробів, наближення яких будуються однозначно, наближення (підхідні дроби) ГЛД загального і спеціального вигляду можна будувати різними способами [8, 14].

Звичайне n-е наближення (звичайний n-й підхідний дріб) ГЛД (1)–(2) означимо так:

$$f_0=b_0\,,\ f_n=b_0+F_{0,0}^{(n)}+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{i=1}^{n}\frac{a_{i,0}}{b_{i,0}+F_{i,0}^{(n-i)}}+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{i=1}^{n}\frac{a_{0,i}}{b_{0,i}+F_{0,i}^{(n-i)}}\,,$$

$$n=1,2,\ldots, \tag{3}$$

де

$$F_{i,0}^{(0)}=F_{0,i}^{(0)}=0\,,\ F_{i0}^{(k)}=\mathop{\mathrm{D}}\limits_{p=1}^{k}\frac{a_{p+i,p}}{b_{p+i,p}}\,,$$

$$F_{0,i}^{(k)}=\mathop{\mathrm{D}}\limits_{p=1}^{k}\frac{a_{p,p+i}}{b_{p,p+i}}\,,\ i=0,1,\ldots\,,\ k=1,2,\ldots\,. \tag{4}$$

Фігурне n-е наближення (n-й підхідний дріб за Сємашком) ГЛД (1)–(2) означається у такий спосіб:

$$\tilde{f}_0=b_0\,,$$

$$\tilde{f}_n=b_0+F_{0,0}^{([n/2])}+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{i=1}^{n}\frac{a_{i,0}}{b_{i,0}+F_{i,0}^{([(n-i)/2])}}+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{i=1}^{n}\frac{a_{0,i}}{b_{0,i}+F_{0,i}^{([(n-i)/2])}}\,,$$

$$n=1,2,\ldots, \tag{5}$$

де $[a]$ – ціла частина дійсного числа a.

Залишками звичайних наближень (3), (4) ГЛД (1)–(2) називаються такі вирази:

$$Q_{i,0}^{(0)}=b_{i,0},\qquad Q_{i,0}^{(k+1)}=b_{i,0}+F_{i,0}^{(k+1)}+\frac{a_{i+1,0}}{Q_{i+1,0}^{(k)}}\,,$$

$$i=1,2,\ldots\,,\ k=0,1,\ldots\,, \tag{6}$$

$$Q_{0,i}^{(0)}=b_{0,i}\,,$$

$$Q_{0,i}^{(k+1)}=b_{0,i}+F_{0,i}^{(k+1)}+\frac{a_{0,i+1}}{Q_{0,i+1}^{(k)}}\,,\ i=1,2,\ldots\,,\ k=0,1,\ldots\,, \tag{7}$$

а залишками наближень (4) звичайних ланцюгових дробів (2) – вирази

$$Q_{k+i,k}^{(0)}=b_{k+i,k}\,,\ Q_{k+i,k}^{(p)}=b_{k+i,k}+\frac{a_{k+1+i,k+1}}{Q_{k+1+i,k+1}^{(p-1)}}\,,$$

$$p=1,2,\ldots\,,\ k=1,2,\ldots\,,\ i=0,1,\ldots\,, \tag{8}$$

$$Q_{k,k+i}^{(0)}=b_{k,k+i}\,,\ Q_{k,k+i}^{(p)}=b_{k,k+i}+\frac{a_{k+1,k+1+i}}{Q_{k+1,k+1+i}^{(p-1)}}\,,$$

$$p=1,2,\ldots\,,\ k=1,2,\ldots\,,\ i=0,1,\ldots\,. \tag{9}$$

Залишками фігурних наближень (5) ГЛД (1)–(2) є вирази:

$$\tilde{Q}_{i,0}^{(0)}=b_{i,0}\,,\ \tilde{Q}_{i,0}^{(k+1)}=b_{i,0}+F_{i,0}^{([(k+1)/2])}+\frac{a_{i+1,0}}{\tilde{Q}_{i+1,0}^{(k)}}\,,$$

$$i=1,2,\ldots\,,\ k=0,1,\ldots\,, \tag{10}$$

$$\tilde{Q}_{0,i}^{(0)}=b_{0,i}\,,\ \tilde{Q}_{0,i}^{(k+1)}=b_{0,i}+F_{0,i}^{([(k+1)/2])}+\frac{a_{0,i+1}}{\tilde{Q}_{0,i+1}^{(k)}}\,,$$

$$i=1,2,\ldots\,,\ k=0,1,\ldots\,. \tag{11}$$

Враховуючи позначення (6)–(11), можна записати:

$$f_n = b_0 + F_{0,0}^{(n)} + \frac{a_{1,0}}{Q_{1,0}^{(n-1)}} + \frac{a_{0,1}}{Q_{0,1}^{(n-1)}},\ n = 1,2,\dots, \tag{12}$$

або

$$f_n = b_0 + \frac{a_{1,1}}{Q_{1,1}^{(n-1)}} + \frac{a_{1,0}}{Q_{1,0}^{(n-1)}} + \frac{a_{0,1}}{Q_{0,1}^{(n-1)}},\ n = 1,2,\dots, \tag{13}$$

а також

$$\tilde{f}_n = b_0 + F_{0,0}^{([n/2])} + \frac{a_{1,0}}{\tilde{Q}_{1,0}^{(n-1)}} + \frac{a_{0,1}}{\tilde{Q}_{0,1}^{(n-1)}},\ n = 1,2,\dots, \tag{14}$$

або

$$\tilde{f}_1 = b_0 + \frac{a_{1,0}}{\tilde{Q}_{1,0}^{(0)}} + \frac{a_{0,1}}{\tilde{Q}_{0,1}^{(0)}},$$

$$\tilde{f}_n = b_0 + \frac{a_{1,1}}{Q_{1,1}^{([n/2]-1)}} + \frac{a_{1,0}}{\tilde{Q}_{1,0}^{(n-1)}} + \frac{a_{0,1}}{\tilde{Q}_{0,1}^{(n-1)}},\ n = 2,3,\dots. \tag{15}$$

Вважається, що наближення f_k, $\tilde{f}_k$, мають сенс, якщо у процесі згортання дробу (обчислення їх значень за формулами (6)–(15)) не виникне невизначеність типу $\frac{0}{0}$ (припускаємо, що $\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$ і $\frac{\alpha_1}{0} + \dots + \frac{\alpha_m}{0} = \frac{0}{0}$, якщо $m > 1$).

Функціональний гіллястий ланцюговий дріб (загального або спеціального вигляду) називається відповідним до формального степеневого ряду

$$c_0 + \sum_{i+j\ge 1}^{\infty} c_{i,j} z_1^i z_2^j, \tag{16}$$

якщо розвинення його n-го наближення $f_n(z_1,z_2)$ у степеневий ряд

$$c_0 + \sum_{i+j\ge 1}^{\infty} c_{i,j}^{(n)} z_1^i z_2^j$$

збігається з заданим рядом до всіх членів степеня n включно, тобто $c_{i,j}^{(n)} = c_{i,j}$, $i + j \le n$. У роботі [12] показано, що ГЛД

$$c_0 + \tilde{F}_{0,0}(z_1,z_2) + \mathop{D}_{i=1}^{\infty} \frac{a_{i,0} z_1}{1 + \tilde{F}_{i,0}(z_1,z_2)} + \mathop{D}_{i=1}^{\infty} \frac{a_{0,i} z_2}{1 + \tilde{F}_{0,i}(z_1,z_2)},$$

$$\tilde{F}_{i,j}(z_1,z_2) = \mathop{D}_{p=1}^{\infty} \frac{a_{p+i,p+j} z_1 z_2}{1},\ i,j = 0,1,\dots, \tag{17}$$

де $a_{k,0}, a_{0,k}, a_{k,j}$, $j = 1,2,\dots$, $k = 1,2,\dots$, обчислюються за певними формулами від коефіцієнтів ряду (16), а n-і наближення $\tilde{f}_n(z_1,z_2)$ – за формулами типу (5), (4), є відповідним до ряду (16).

ГЛД (1)–(2) називається *збіжним* (*фігурно збіжним за Сємашком*), якщо, починаючи з деякого номеру n_0, всі його звичайні (фігурні) наближення мають сенс, і існує скінченна границя $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ ($\tilde{f} = \lim_{n\to\infty} \tilde{f}_n$). Значення цієї границі можна вважати значенням збіжного ГЛД. Важливо встановити умови, за яких $f = \tilde{f}$.

ГЛД (1)–(2) називається *абсолютно збіжним (фігурно абсолютно збіжним)*, якщо збігається ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_{k+1} - f_k|,$$

складений з його наближень (ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |\tilde{f}_{k+1} - \tilde{f}_k|$, складений з його фігурних наближень).

Говорять, що функціональний ГЛД (1)–(2) фігурно рівномірно збігається в області $D \subset C^2$, якщо, починаючи з деякого номеру n_0, всюди в D його фігурні наближення $\tilde{f}_k(z_1,z_2)$, $k \ge n_0$, мають сенс і скінченні, і для довільного $\varepsilon > 0$ існує такий номер $n_1 \ge n_0$, що для всіх $n, m \ge n_1$ і довільних $(z_1,z_2) \in D$ виконується нерівність $|\tilde{f}_n(z_1,z_2) - \tilde{f}_m(z_1,z_2)| < \varepsilon$. Можна також говорити про рівномірну збіжність ГЛД (1)–(2) в області D.

3. Мета і задача досліджень

Мета даної роботи – встановити деякі достатні умови еквівалентності абсолютної та фігурно абсолютної збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду (1)–(2).

Для досягнення поставленої мети були поставлені наступні завдання:

– побудова мажорантного та фігурно мажорантного дробу для ГЛД (1)–(2);

– встановлення умов, за яких ГЛД вигляду (1)–(2) збігається абсолютно та фігурно абсолютно до однієї і тієї ж самої границі;

– встановлення вигляду області, якій належить значення цієї границі.

4. Застосування методу мажорант для дослідження абсолютної та фігурно абсолютної збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду

Одним з методів дослідження збіжності неперервних дробів з комплексними елементами та їх багатовимірних узагальнень є метод мажорант. Застосування цього методу до дослідження збіжності гіллястих ланцюгових дробів загального вигляду та двовимірних неперервних дробів розглянуто у монографіях [8, 14]. Застосуємо цей метод для дослідження абсолютної збіжності гіллястих ланцюгових дробів вигляду (1)–(2).

Гіллястий ланцюговий дріб вигляду

$$\overline{b}_0 + \overline{F}_{0,0} + \mathop{D}_{i=1}^{\infty} \frac{\overline{a}_{i,0}}{\overline{b}_{i,0} + \overline{F}_{i,0}} + \mathop{D}_{i=1}^{\infty} \frac{\overline{a}_{0,i}}{\overline{b}_{0,i} + \overline{F}_{0,i}}, \tag{18}$$

$$\overline{F}_{i,j} = \mathop{D}_{p=1}^{\infty} \frac{\overline{a}_{p+i,p+j}}{\overline{b}_{p+i,p+j}},\ i = 0,1,\dots,\ j = 0,1,\dots, \tag{19}$$

де $\overline{b}_0, \overline{a}_{i,j}, \overline{b}_{i,j}$, $i = 0,1,\dots$, $j = 0,1,\dots$, $i + j \ge 1$, – комплексні сталі або комплекснозначні функції двох комплексних змінних, визначені в області $D \subset C^2$, називається *мажорантним* (або *фігурно мажорантним*) дробом для ГЛД (1), (2), якщо існують додатне число m_0 і додатна стала M така, що для всіх натуральних m, n, таких, що $m > m_0, n > m_0$, виконується умова

$$\left|f_n - f_m\right| \le M\left|\overline{f}_n - \overline{f}_m\right|, \text{ (або } \left|\tilde{f}_n - \tilde{f}_m\right| \le M\left|\tilde{\overline{f}}_n - \tilde{\overline{f}}_m\right|\text{)}, \qquad (20)$$

де f_k, $\overline{f}_k$, $k = 1,2,...$ – k-і наближення ($\tilde{f}_k$, $\tilde{\overline{f}}_k$, $k = 1,2,...$ – k-і фігурні наближення) ГЛД (1)–(2) і (18)–(19) відповідно.

Твердження 2. 1. *Достатньою умовою абсолютної збіжності (фігурно абсолютної збіжності) ГЛД (1)–(2) є абсолютна (фігурно абсолютна) збіжність його мажорантного (фігурно мажорантного) дробу.*

Твердження 2. 2. *Якщо числовий мажорантний дріб (фігурно мажорантний дріб) для функціонального ГЛД (1)–(2) збігається абсолютно (фігурно абсолютно), сам дріб (1)–(2) збігається абсолютно і рівномірно (фігурно абсолютно і фігурно рівномірно) в області* D.

При застосуванні методу мажорант для дослідження збіжності гіллястих ланцюгових дробів загального та спеціального вигляду використовуються формули різниці їх наближень. У монографії [8] наведено таку формулу:

$$\tilde{f}_n - \tilde{f}_m = F_{0,0}^{([n/2])} - F_{0,0}^{([m/2])} + \sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^i \left(F_{i,0}^{([(n-i)/2])} - F_{i,0}^{([(m-i)/2])}\right)\prod_{j=1}^{i} a_{j,0}}{\prod_{j=1}^{i} \tilde{Q}_{j,0}^{(n-j)}\tilde{Q}_{j,0}^{(m-j)}} + \frac{(-1)^m \prod_{j=1}^{m+1} a_{0,j}}{\prod_{j=1}^{m+1} \tilde{Q}_{0,j}^{(n-j)} \prod_{j=1}^{m} \tilde{Q}_{0,j}^{(m-j)}} +$$
$$+\sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^i \left(F_{0,i}^{([(n-i)/2])} - F_{0,i}^{([(m-i)/2])}\right)\prod_{j=1}^{i} a_{0,j}}{\prod_{j=1}^{i} \tilde{Q}_{0,j}^{(n-j)}\tilde{Q}_{0,j}^{(m-j)}} + \frac{(-1)^m \prod_{j=1}^{m+1} a_{j,0}}{\prod_{j=1}^{m+1} \tilde{Q}_{j,0}^{(n-j)} \prod_{j=1}^{m} \tilde{Q}_{j,0}^{(m-j)}},$$

$$n > m. \qquad (21)$$

Формулу різниці двох наближень неперервних дробів (2) можна записати у вигляді

$$F_{i,j}^{(p)} - F_{i,j}^{(r)} = (-1)^r \frac{\prod_{k=1}^{r+1} a_{k+i,k+j}}{\prod_{k=1}^{r+1} Q_{k+i,k+j}^{(p-j)} \prod_{k=1}^{r} Q_{k+i,k+j}^{(r-j)}},$$

$$r = 0, 1, ..., p > r, \ i, j = 0, 1, \dots . \qquad (22)$$

Використовуючи методику виведення формули (21), встановлено наступні формули:

$$f_n - f_m = F_{0,0}^{(n)} - F_{0,0}^{(m)} + \sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^i \left(F_{i,0}^{(n-i)} - F_{i,0}^{(m-i)}\right)\prod_{j=1}^{i} a_{j,0}}{\prod_{j=1}^{i} Q_{j,0}^{(n-j)} Q_{j,0}^{(m-j)}} + \frac{(-1)^m \prod_{j=1}^{m+1} a_{0,j}}{\prod_{j=1}^{m+1} Q_{0,j}^{(n-j)} \prod_{j=1}^{m} Q_{0,j}^{(m-j)}} +$$
$$+\sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^i \left(F_{0,i}^{(n-i)} - F_{0,i}^{(m-i)}\right)\prod_{j=1}^{i} a_{0,j}}{\prod_{j=1}^{i} Q_{0,j}^{(n-j)} Q_{0,j}^{(m-j)}} + \frac{(-1)^m \prod_{j=1}^{m+1} a_{j,0}}{\prod_{j=1}^{m+1} Q_{j,0}^{(n-j)} \prod_{j=1}^{m} Q_{j,0}^{(m-j)}},$$

$$n > m, \qquad (23)$$

$$\tilde{f}_n - f_m = F_{0,0}^{([n/2])} - F_{0,0}^{(m)} + \sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^i \left(F_{i,0}^{([(n-i)/2])} - F_{i,0}^{(m-i)}\right)\prod_{j=1}^{i} a_{j,0}}{\prod_{j=1}^{i} \tilde{Q}_{j,0}^{(n-j)} Q_{j,0}^{(m-j)}} +$$
$$+\frac{(-1)^m \prod_{j=1}^{m+1} a_{j,0}}{\prod_{j=1}^{m+1} \tilde{Q}_{j,0}^{(n-j)} \prod_{j=1}^{m} Q_{j,0}^{(m-j)}} + \sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^i \left(F_{0,i}^{([(n-i)/2])} - F_{0,i}^{(m-i)}\right)\prod_{j=1}^{i} a_{0,j}}{\prod_{j=1}^{i} \tilde{Q}_{0,j}^{(n-j)} Q_{0,j}^{(m-j)}} +$$
$$+\frac{(-1)^m \prod_{j=1}^{m+1} a_{0,j}}{\prod_{j=1}^{m+1} \tilde{Q}_{0,j}^{(n-j)} \prod_{j=1}^{m} Q_{0,j}^{(m-j)}},$$

$$m = 1,2,\dots, \ n \ge 2m + 2 . \qquad (24)$$

Формули (21)–(24) встановлено у припущенні, що значення всіх залишків

$$\tilde{Q}_{k,0}^{(p)}, \tilde{Q}_{0,k}^{(p)}, Q_{k,0}^{(p)}, Q_{0,k}^{(p)}, Q_{k,j}^{(r)}, Q_{j,k}^{(r)},$$

які фігурують у цих формулах, не дорівнюють 0. Ці формули надалі використовуватимемо для вивчення поведінки послідовностей $\{f_n\}, \{\tilde{f}_n\}$.

5. Деякі достатні умови абсолютної та фігурно абсолютної збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду

Лема. *ГЛД*

$$\left|b_0\right| + \overline{F}_{0,0} + \mathop{D}_{i=1}^{\infty} \frac{-\left|a_{i0}\right|}{1 + \overline{F}_{i0}} + \mathop{D}_{i=1}^{\infty} \frac{-\left|a_{0i}\right|}{1 + \overline{F}_{0,i}}, \qquad (25)$$

$$\overline{F}_{i,j} = \mathop{D}_{p=1}^{\infty} \frac{-\left|a_{p+i,p+j}\right|}{1}, \ i = 0,1,\dots, \ j = 0,1,\dots, \qquad (26)$$

є мажорантним і фігурно мажорантним дробом для ГЛД (1)–(2), елементи якого задовольняють такі умови:

$$\left|a_{i+1,0}\right| + \left|a_{i+1,1}\right| \le \frac{p_{i+1} - 1}{p_i p_{i+1}},$$

$$\left|a_{0,i+1}\right| + \left|a_{1,i+1}\right| \le \frac{p_{i+1} - 1}{p_i p_{i+1}}, \ i = 1,2,\dots, \qquad (27)$$

$$\left|a_{i+k,k}\right| \le \frac{p_{i+k} - 1}{p_{i+k-1} p_{i+k}},$$

$$\left|a_{k,i+k}\right| \le \frac{p_{i+k} - 1}{p_{i+k-1} p_{i+k}}, \ i = 0,1,\dots, \ k=2,3,\dots, \qquad (28)$$

де $p_1, p_2, ...,$ – члени деякої числової послідовності,

$$p_1 \ge 1, p_k > 1, k = 2, 3, \dots .$$

Доведення. Нехай $\overline{Q}_{k,0}^{(p)}, \overline{Q}_{0,k}^{(p)}, \tilde{\overline{Q}}_{k,0}^{(p)}, \tilde{\overline{Q}}_{0,k}^{(p)}, \overline{Q}_{k+j,k}^{(p)}, \overline{Q}_{k,j+k}^{(p)}$ – залишки для звичайних та фігурних (за Сємашком) наближень ГЛД (25)–(26), тобто

$$\bar{Q}^{(0)}_{i,0} = 1,\ \ \bar{Q}^{(k+1)}_{i,0} = 1 + \bar{F}^{(k+1)}_{i,0} - \frac{\left|a_{i+1,0}\right|}{\bar{Q}^{(k)}_{i+1,0}},$$

$$i = 1,2,\ldots,\ \ k = 0,1,\ldots, \tag{29}$$

$$\bar{Q}^{(0)}_{0,i} = 1, \qquad \bar{Q}^{(k+1)}_{0,i} = 1 + \bar{F}^{(k)}_{0,i} - \frac{\left|a_{0,i+1}\right|}{\bar{Q}^{(k)}_{0,i+1}},$$

$$i = 1,2,\ldots, \qquad k = 0,1,\ldots, \tag{30}$$

$$\tilde{\bar{Q}}^{(0)}_{i,0} = 1, \qquad \tilde{\bar{Q}}^{(k+1)}_{i,0} = 1 + \bar{F}^{\left(\left[(k+1)/2\right]\right)}_{i,0} - \frac{\left|a_{i+1,0}\right|}{\tilde{\bar{Q}}^{(k)}_{i+1,0}},$$

$$i = 1,2,\ldots, \qquad k = 0,1,\ldots, \tag{31}$$

$$\tilde{\bar{Q}}^{(0)}_{0,i} = 1, \qquad \tilde{\bar{Q}}^{(k+1)}_{0,i} = 1 + \bar{F}^{\left(\left[(k+1)/2\right]\right)}_{0,i} - \frac{\left|a_{0,i+1}\right|}{\tilde{\bar{Q}}^{(k)}_{0,i+1}},$$

$$i = 1,2,\ldots, \qquad k = 0,1,\ldots, \tag{32}$$

$$\bar{Q}^{(0)}_{k+i,k} = 1,\ \ \bar{Q}^{(p)}_{k+i,k} = 1 - \frac{\left|a_{k+1+i,k+1}\right|}{\bar{Q}^{(p-1)}_{k+1+i,k+1}},$$

$$p = 1,2,\ldots,\ \ k = 1,2,\ldots,\ \ i = 0,1,\ldots, \tag{33}$$

$$\bar{Q}^{(0)}_{k,k+i} = 1,\ \ \bar{Q}^{(p)}_{k,k+i} = 1 - \frac{\left|a_{k+1,k+1+i}\right|}{\bar{Q}^{(p-1)}_{k+1,k+1+i}},$$

$$p = 1,2,\ldots,\ \ k = 1,2,\ldots,\ \ i = 0,1,\ldots. \tag{34}$$

Переконаємось, що для залишків ГЛД (1)–(2) і (25)–(26) справджуються такі нерівності:

$$\left|Q^{(p)}_{k+i,k}\right| \ge \bar{Q}^{(p)}_{k+i,k} \ge H^{(p)}_{k+i},\ \ \left|Q^{(p)}_{k,k+i}\right| \ge \bar{Q}^{(p)}_{k,k+i} \ge H^{(p)}_{k+i}, \tag{35}$$

$$i = 0,1,\ldots,\ \ k = 1,2,\ldots,\ \ p = 0,1,\ldots,$$

$$\left|\tilde{Q}^{(p)}_{i,0}\right| \ge \tilde{\bar{Q}}^{(p)}_{i,0} \ge \bar{Q}^{(p)}_{i,0} \ge H^{(p)}_{i},$$

$$\left|\tilde{Q}^{(p)}_{0,i}\right| \ge \tilde{\bar{Q}}^{(p)}_{0,i} \ge \bar{Q}^{(p)}_{0,i} \ge H^{(p)}_{i},\ \ i = 1,2,\ldots,\ \ p = 0,1,\ldots, \tag{36}$$

де

$$H^{(0)}_i = 1,\ \ H^{(p)}_i = 1 + \mathrm{D}_{j=1}^{p} \frac{\omega_{i+j}}{1},$$

$$i,p = 1,2,\ldots, \quad \omega_k = \frac{p_k - 1}{p_{k-1}p_k},\ \ k = 2,3,\ldots. \tag{37}$$

При $p = 0$ і довільних $i = 0,1,\ldots$, $k = 1,2,\ldots$, нерівності (35) набувають такого вигляду:

$$\left|Q^{(0)}_{k+i,k}\right| = \bar{Q}^{(0)}_{k+i,k} = H^{(0)}_{k+i} = 1 > 1 - \frac{1}{p_{k+i}},$$

$$\left|Q^{(0)}_{k,k+i}\right| = \bar{Q}^{(0)}_{k,k+i} = H^{(0)}_{k+i} = 1 > 1 - \frac{1}{p_{k+i}}.$$

Припустимо, що перша з нерівностей (35) виконується для деякого значення $p \ge 0$ і довільних k, i. З формул (8), (33) випливає, що

$$\left|Q^{(p+1)}_{k+i,k}\right| = \left|1 + \frac{a_{k+1+i,k+1}}{Q^{(p)}_{k+1+i,k+1}}\right| \ge 1 - \frac{\left|a_{k+1+i,k+1}\right|}{\left|Q^{(p)}_{k+1+i,k+1}\right|} \ge 1 - \frac{\left|a_{k+1+i,k+1}\right|}{\bar{Q}^{(p)}_{k+1+i,k+1}} =$$

$$= \bar{Q}^{(p+1)}_{k+i,k} \ge 1 - \frac{\omega_{k+i+1}}{\bar{Q}^{(p)}_{k+i+1,k}} \ge 1 - \frac{\omega_{k+i+1}}{H^{(p)}_{k+i+1}} = H^{(p+1)}_{k+i} > 1 - \frac{1}{p_{k+i}},$$

тобто перша з нерівностей (35) виконується і при $p+1$. Правильність другої з нерівностей (35) при $p+1$ і довільних k, i доводиться аналогічно.

Беручи до уваги формулу (22) і нерівності (35), одержимо

$$\left|F^{(p)}_{i,0} - F^{(r)}_{i,0}\right| = \frac{\prod_{j=1}^{r+1}\left|a_{j+i,j}\right|}{\prod_{j=1}^{r+1}\left|Q^{(p-j)}_{j+i,j}\right|\prod_{j=1}^{r}\left|Q^{(r-j)}_{j+i,j}\right|} \le \frac{(-1)^{r+1}\prod_{j=1}^{r+1}\left(-\left|a_{j+i,j}\right|\right)}{\prod_{j=1}^{r+1}\bar{Q}^{(p-j)}_{j+i,j}\prod_{j=1}^{r}\bar{Q}^{(r-j)}_{j+i,j}} =$$

$$= -\left(\bar{F}^{(p)}_{i,0} - \bar{F}^{(r)}_{i,0}\right) = \bar{F}^{(r)}_{i,0} - \bar{F}^{(p)}_{i,0} = \left|\bar{F}^{(p)}_{i,0} - \bar{F}^{(r)}_{i,0}\right|,$$

$$i = 0,1,\ldots,\ \ r = 0,1,\ldots,\ \ p > r,$$

отже, для довільних $i = 0,1,\ldots$, послідовності $\left\{\bar{F}^{(p)}_{i,0}\right\}$ монотонно спадають:

$$\bar{F}^{(0)}_{i,0} \ge \bar{F}^{(1)}_{i,0} \ge \bar{F}^{(2)}_{i,0} \ge \ldots. \tag{38}$$

Розглянемо нерівності (36) для $p = 0$, $p = 1$ і довільних $i = 1,2,\ldots$.

$$\left|\tilde{Q}^{(0)}_{i,0}\right| = \tilde{\bar{Q}}^{(0)}_{i,0} = \bar{Q}^{(0)}_{i,0} = H^{(0)}_i = 1 > 1 - \frac{1}{p_i},$$

$$\left|\tilde{Q}^{(0)}_{i,0}\right| = \tilde{\bar{Q}}^{(0)}_{0,i} = \bar{Q}^{(0)}_{0,i} = H^{(0)}_i = 1 > 1 - \frac{1}{p_i};$$

$$\left|\tilde{Q}^{(1)}_{i,0}\right| = \left|1 + \frac{a_{i+1,0}}{\tilde{Q}^{(0)}_{i+1,0}}\right| \ge 1 - \frac{\left|a_{i+1,1}\right|}{\left|Q^{(0)}_{i+1,1}\right|} - \frac{\left|a_{i+1,0}\right|}{\left|\tilde{Q}^{(0)}_{i+1,0}\right|} \ge$$

$$\ge 1 - \frac{\left|a_{i+1,1}\right|}{\bar{Q}^{(0)}_{i+1,1}} - \frac{\left|a_{i+1,0}\right|}{\tilde{\bar{Q}}^{(0)}_{i+1,0}} = \tilde{\bar{Q}}^{(1)}_{i,0} \ge$$

$$\ge 1 - \frac{\left|a_{i+1,1}\right|}{\bar{Q}^{(0)}_{i+1,1}} - \frac{\left|a_{i+1,0}\right|}{\bar{Q}^{(0)}_{i+1,0}} = \bar{Q}^{(1)}_{i,0} \ge$$

$$\ge 1 - \frac{\left|a_{i+1,1}\right|}{H^{(0)}_{i+1}} - \frac{\left|a_{i+1,0}\right|}{H^{(0)}_{i+1}} \ge 1 - \frac{\omega_{i+1}}{H^{(0)}_{i+1}} = H^{(1)}_i > 1 - \frac{1}{p_i};$$

$$\left|\tilde{Q}^{(1)}_{0,i}\right| \ge \tilde{\bar{Q}}^{(1)}_{0,i} \ge \bar{Q}^{(1)}_{0,i} \ge H^{(1)}_i.$$

Припускаючи тепер, що перша з нерівностей (36) правильна для деякого значення $p = k \ge 0$ та довільних i, доведемо її правильність для $p = k+1$:

$$\left|\tilde{Q}_{i,0}^{(k+1)}\right| = \left|1 + F_{i,0}^{\left(\left[(k+1)/2\right]\right)} + \frac{a_{i+1,0}}{\tilde{Q}_{i+1,0}^{(k)}}\right| \geq$$

$$\geq 1 - \left|F_{i,0}^{\left(\left[(k+1)/2\right]\right)}\right| - \frac{\left|a_{i+1,0}\right|}{\left|\tilde{Q}_{i+1,0}^{(k)}\right|} =$$

$$= 1 - \frac{\left|a_{i+1,1}\right|}{\left|Q_{i+1,1}^{\left(\left[(k+1)/2\right]-1\right)}\right|} - \frac{\left|a_{i+1,0}\right|}{\left|\tilde{Q}_{i+1,0}^{(k)}\right|} \geq 1 - \frac{\left|a_{i+1,1}\right|}{\bar{Q}_{i+1,1}^{\left(\left[(k+1)/2\right]-1\right)}} -$$

$$- \frac{\left|a_{i+1,0}\right|}{\tilde{\bar{Q}}_{i+1,0}^{(k)}} = 1 + F_{i,0}^{\left(\left[(k+1)/2\right]\right)} - \frac{\left|a_{i+1,0}\right|}{\tilde{\bar{Q}}_{i+1,0}^{(k)}} =$$

$$= \tilde{\bar{Q}}_{i+1,0}^{(k)} \geq 1 + \bar{F}_{i,0}^{(k+1)} - \frac{\left|a_{i+1,0}\right|}{\tilde{\bar{Q}}_{i+1,0}^{(k)}} = \bar{Q}_{i,0}^{(k)} \geq$$

$$\geq 1 - \frac{\left|a_{i+1,1}\right|}{H_{i+1}^{(k)}} - \frac{\left|a_{i+1,0}\right|}{H_{i+1}^{(k)}} \geq 1 - \frac{\omega_{i+1}}{H_{i+1}^{(k)}} = H_i^{(k+1)}.$$

Діючи аналогічно і беручи до уваги формулу (11), переконаємось у правильності другої з нерівностей (36) для деякого значення p і довільних i.

Використовуючи метод математичної індукції, доходимо висновку про правильність нерівностей (35)–(37) для всіх можливих значень i, k, p.

Враховуючи формулу різниці (21) та нерівності (35)–(38), одержимо

$$\left|\tilde{f}_n - \tilde{f}_m\right| \leq \left|F_{0,0}^{([n/2])} - F_{0,0}^{([m/2])}\right| +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \frac{\left|F_{i,0}^{[(n-i)/2]} - F_{i,0}^{[(m-i)/2]}\right| \prod_{j=1}^{i} \left|a_{j,0}\right|}{\prod_{j=1}^{i} \left|\tilde{Q}_{j,0}^{(n-j)} \tilde{Q}_{j,0}^{(m-j)}\right|} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \frac{\left|F_{0,i}^{\left(\left[(n-i)/2\right]\right)} - F_{0,i}^{\left(\left[(m-i)/2\right]\right)}\right| \prod_{j=1}^{i} \left|a_{0,j}\right|}{\prod_{j=1}^{i} \left|\tilde{Q}_{0,j}^{(n-j)} \tilde{Q}_{0,j}^{(m-j)}\right|} +$$

$$+ \frac{\prod_{j=1}^{m+1} \left|a_{j,0}\right|}{\prod_{j=1}^{m+1} \left|\tilde{Q}_{j,0}^{(n-j)}\right| \prod_{j=1}^{m} \left|\tilde{Q}_{j,0}^{(m-j)}\right|} + \frac{\prod_{j=1}^{m+1} \left|a_{0,j}\right|}{\prod_{j=1}^{m+1} \left|\tilde{Q}_{0,j}^{(n-j)}\right| \prod_{j=1}^{m} \left|\tilde{Q}_{0,j}^{(m-j)}\right|} \leq \bar{F}_{0,0}^{(m/2)} - \bar{F}_{0,0}^{(n/2)} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} (-1)^i \frac{\left(\bar{F}_{i,0}^{[(m-i)/2]} - \bar{F}_{i,0}^{[(n-i)/2]}\right) \prod_{j=1}^{i} \left(-\left|a_{j,0}\right|\right)}{\prod_{j=1}^{i} \left|\tilde{\bar{Q}}_{j,0}^{(n-j)} \tilde{\bar{Q}}_{j,0}^{(m-j)}\right|} + \frac{(-1)^{m+1} \prod_{j=1}^{m+1} \left(-\left|a_{j,0}\right|\right)}{\prod_{j=1}^{m+1} \tilde{\bar{Q}}_{j,0}^{(n-j)} \prod_{j=1}^{m} \tilde{\bar{Q}}_{j,0}^{(m-j)}} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} (-1)^i \frac{\left(\bar{F}_{0,i}^{[(m-i)/2]} - \bar{F}_{0,i}^{[(n-i)/2]}\right) \prod_{j=1}^{i} \left(-\left|a_{0,j}\right|\right)}{\prod_{j=1}^{i} \left|\tilde{\bar{Q}}_{0,j}^{(n-j)} \tilde{\bar{Q}}_{0,j}^{(m-j)}\right|} +$$

$$+ \frac{(-1)^{m+1} \prod_{j=1}^{m+1} \left(-\left|a_{0,j}\right|\right)}{\prod_{j=1}^{m+1} \tilde{\bar{Q}}_{0,j}^{(n-j)} \prod_{j=1}^{m} \tilde{\bar{Q}}_{0,j}^{(m-j)}} = \tilde{\bar{f}}_m - \tilde{\bar{f}}_n,$$

тобто

$$\left|\tilde{f}_n - \tilde{f}_m\right| \leq \tilde{\bar{f}}_m - \tilde{\bar{f}}_n, \quad m = 0, 1, \ldots, \quad n > m. \tag{39}$$

З нерівності (39) випливає, що ГЛД (25)–(26) є фігурно мажорантним дробом для ГЛД (1)–(2). Аналогічно, беручи до уваги формулу (23) та нерівності (35)–(38), доходимо висновку, що ГЛД (25)–(26) – мажорантний дріб для ГЛД (1)–(2).

Теорема. *Нехай елементи ГЛД (1)–(2) задовольняють умови (27)–(28), де* $p_1, p_2, \ldots,$ *– члени деякої числової послідовності такі, що:*

$$p_k > 1, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{40}$$

або

$$p \quad 1, \; p_k > 1, \; k = 2, 3, \ldots,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (p_2 - 1) \ldots (p_{k+1} - 1) < \infty. \tag{41}$$

Тоді ГЛД (1)–(2) збігається абсолютно і фігурно абсолютно до одної і тої ж самої границі, значення якої належить області

$$\left|z - b_0\right| \leq K\left(\left|a_{1,1}\right| + \left|a_{1,0}\right| + \left|a_{0,1}\right|\right), \tag{42}$$

де

$$K = \frac{p_1}{p_1 - 1}\left(1 - \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} (p_1 - 1) \ldots (p_k - 1)}\right), \tag{43}$$

якщо виконується умова (40), або

$$K = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (p_2 - 1) \ldots (p_{k+1} - 1), \tag{44}$$

якщо виконується умова (41).

Доведення. З аналітичної теорії неперервних дробів відомо [1, 2], що неперервний дріб

$$\frac{1}{1 + \underset{j=2}{\overset{\infty}{D}} \frac{\omega_j}{1}}, \quad \omega_k = -\frac{p_k - 1}{p_{k-1} p_k}, \quad k = 2, 3, \ldots, \tag{45}$$

збігається, причому його залишки

$$H_i^{(p)}, i = 1, 2, \ldots, p = 0, 1, \ldots,$$

визначаються згідно з (37), а значення K – згідно з (43) або (44).

При доведенні леми показано, що послідовність $\left\{\tilde{\bar{f}}_n\right\}$ монотонно спадає. Крім того, використовуючи нерівності (35)–(37), доходимо висновку, що

$$\left|\tilde{f}_n - b_0\right| \leq \frac{\left|a_{1,1}\right|}{\left|Q_{1,1}^{([n/2]-1)}\right|} + \frac{\left|a_{1,0}\right|}{\left|\tilde{Q}_{1,0}^{(n-1)}\right|} + \frac{\left|a_{0,1}\right|}{\left|\tilde{Q}_{0,1}^{(n-1)}\right|} \leq$$

$$\leq \frac{\left|a_{1,1}\right|}{\bar{Q}_{1,1}^{([n/2]-1)}} + \frac{\left|a_{1,0}\right|}{\tilde{\bar{Q}}_{1,0}^{(n-1)}} + \frac{\left|a_{0,1}\right|}{\tilde{\bar{Q}}_{0,1}^{(n-1)}} = \left|b_0\right| - \tilde{\bar{f}}_n \leq \frac{\left|a_{1,1}\right| + \left|a_{1,0}\right| + \left|a_{0,1}\right|}{\lim\limits_{k \to \infty} H_1^{(k)}},$$

а це означає, що послідовність $\left\{\tilde{\bar{f}}_n\right\}$ обмежена, а значення всіх підхідних дробів ГЛД (1)–(2) належать області (42).

З монотонності і обмеженості послідовності $\left\{\tilde{\bar{f}}_n\right\}$ випливає її збіжність. Оскільки

$$\sum_{k=0}^{n}\left|\tilde{f}_{k+1}-\tilde{f}_k\right| \le \sum_{k=0}^{n}\left|\tilde{\bar{f}}_{k+1}-\tilde{\bar{f}}_k\right| = \sum_{k=1}^{n}\left(\tilde{\bar{f}}_k-\tilde{\bar{f}}_{k+1}\right)=$$
$$=\left|b_0\right|-\tilde{\bar{f}}_{n+1} \le K\left(\left|a_{1,1}\right|+\left|a_{1,0}\right|+\left|a_{0,1}\right|\right),$$

то ряди

$$\sum_{k=0}^{n}\left|\tilde{\bar{f}}_{k+1}-\tilde{\bar{f}}_k\right|,\ \sum_{k=0}^{n}\left|\tilde{f}_{k+1}-\tilde{f}_k\right|$$

збігаються, тобто ГЛД (25)–(26) і ГЛД (1)–(2) збігаються фігурно абсолютно.

Аналогічно, з використанням формули (23) і нерівностей (35)–(37) доводимо абсолютну збіжність ГЛД (25)–(26) і ГЛД (1)–(2), тобто збіжність рядів

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\bar{f}_{k+1}-\bar{f}_k\right|,\ \sum_{k=0}^{\infty}\left|f_{k+1}-f_k\right|.$$

Використовуючи формулу (24) та нерівності (35), (36), (38), доходимо висновку, що

$$\left|\tilde{f}_n-f_m\right| \le \left|\bar{F}_{0,0}^{(m)}-\bar{F}_{0,0}^{([n/2])}\right| + \sum_{i=1}^{m}\frac{(-1)^i\left(\bar{F}_{i,0}^{(m-i)}-\bar{F}_{i,0}^{[(n-i)/2]}\right)\prod_{j=1}^{i}\left(-\left|a_{j,0}\right|\right)}{\prod_{j=1}^{i}\left|\tilde{\bar{Q}}_{j,0}^{(n-j)}\bar{Q}_{j,0}^{(m-j)}\right|}+$$
$$+\frac{(-1)^m\prod_{j=1}^{m+1}\left(-\left|a_{j,0}\right|\right)}{\prod_{j=1}^{m+1}\tilde{\bar{Q}}_{j,0}^{(n-j)}\prod_{j=1}^{m}\bar{Q}_{j,0}^{(m-j)}}+\sum_{i=1}^{m}\frac{(-1)^i\left(\bar{F}_{0,i}^{(m-i)}-\bar{F}_{0,i}^{[(n-i)/2]}\right)\prod_{j=1}^{i}\left(-\left|a_{0,j}\right|\right)}{\prod_{j=1}^{i}\left|\tilde{\bar{Q}}_{0,j}^{(n-j)}\bar{Q}_{0,j}^{(m-j)}\right|}+$$
$$+\frac{(-1)^m\prod_{j=1}^{m+1}\left(-\left|a_{0,j}\right|\right)}{\prod_{j=1}^{m+1}\tilde{\bar{Q}}_{0,j}^{(n-j)}\prod_{j=1}^{m}\bar{Q}_{0,j}^{(m-j)}} \le \bar{F}_{0,0}^{(m)}-\bar{F}_{0,0}^{(n)}+$$
$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{(-1)^i\left(\bar{F}_{i,0}^{(m-i)}-\bar{F}_{i,0}^{(n)}\right)\prod_{j=1}^{i}\left(-\left|a_{j,0}\right|\right)}{\prod_{j=1}^{i}\bar{Q}_{j,0}^{(n-j)}\bar{Q}_{j,0}^{(m-j)}}+$$
$$+\frac{(-1)^m\prod_{j=1}^{m+1}\left(-\left|a_{j,0}\right|\right)}{\prod_{j=1}^{m+1}\bar{Q}_{j,0}^{(n-j)}\prod_{j=1}^{m}\bar{Q}_{0,j}^{(m-j)}}+\sum_{i=1}^{m}\frac{(-1)^i\left(\bar{F}_{0,i}^{(m-i)}-\bar{F}_{0,i}^{(n-i)}\right)\prod_{j=1}^{i}\left(-\left|a_{0,j}\right|\right)}{\prod_{j=1}^{i}\bar{Q}_{0,j}^{(n-j)}\bar{Q}_{0,j}^{(m-j)}}+$$
$$+\frac{(-1)^m\prod_{j=1}^{m+1}\left(-\left|a_{0,j}\right|\right)}{\prod_{j=1}^{m+1}\bar{Q}_{0,j}^{(n-j)}\prod_{j=1}^{m}\bar{Q}_{0,j}^{(m-j)}}=\bar{f}_m-\bar{f}_n=\left|\bar{f}_n-\bar{f}_m\right|,$$

$m=1,2,\ldots,\ \ n\ge 2m+2$, звідки випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{f}_n=\lim\limits_{m\to\infty}f_m$.

6. Наслідки результатів дослідження абсолютної і фігурно абсолютної збіжності ГЛД (1)–(2)

Наслідок 1. *Сукупність умов*

$$\left|a_{i+1,0}\right|+\left|a_{i+1,1}\right|\le\frac{1}{4},\ \left|a_{0,i+1}\right|+\left|a_{1,i+1}\right|\le\frac{1}{4},\ i=1,2,\ldots,$$
$$\left|a_{i+p,p}\right|\le\frac{1}{4},\ \left|a_{p,p+i}\right|\le\frac{1}{4},\ i=0,1,\ldots,\ \ p=2,3,\ldots,$$

достатня для абсолютної і фігурно абсолютної збіжності ГЛД (1)–(2).

Поклавши в умовах теореми

$$p_i=2,\ i=1,2,\ldots,$$

легко переконатись у правильності даного наслідку.

Дана ознака абсолютної збіжності узгоджується з раніше встановленими достатніми умовами збіжності ГЛД досліджуваного вигляду, які були сформульовані в [8, 20].

Наслідок 2. *Функціональний ГЛД вигляду (17), де* z_1, z_2 *– комплексні змінні,* $c_0, a_{k,j}, j=0,1,\ldots,\ \ k=0,1,\ldots,$ $k+j\ge 1,$ *– комплексні сталі, що задовольняють умови (27)–(28), а також (40) або (41), збігається абсолютно і рівномірно та фігурно абсолютно і рівномірно у полікрузі* $D=\left\{\left|z_1\right|\le 1,\left|z_2\right|\le 1\right\},\ \lim\limits_{n\to\infty}f_n\left(z_1,z_2\right)=\lim\limits_{m\to\infty}\tilde{f}_m\left(z_1,z_2\right).$

7. Висновки

Накладаючи певні умови на елементи гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду з двома гілками розгалужень (дробів Сємашка), побудовано мажорантний та фігурно мажорантний дроби такої самої структури. Застосовуючи метод мажорант, використовуючи результати теорії збіжності неперервних дробів та формули різниць різних наближень досліджуваних ГЛД, встановлено достатні умови, за яких ГЛД збігається абсолютно та фігурно абсолютно до однієї і тієї ж самої границі. Показано, що значення досліджуваного ГЛД та його наближень належать кругу, радіус якого залежить від значень елементів ГЛД на першому поверсі та від сталих, що фігурують у формулюванні теореми.

Вибираючи конкретні значення цих сталих можна отримати різні ознаки абсолютної та фігурно абсолютної збіжності ГЛД Сємашка. Запропоновану методику можна використати при дослідженні збіжності двовимірних неперервних дробів. Оскільки метод мажорант встановлює лише факт збіжності досліджуваних ГЛД, тому доцільно продовжити аналітичне дослідження збіжності ГЛД даного класу і встановити аналог фундаментальних нерівностей для дослідження збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду (дробів Сємашка).

Література

1. Wall, H. S. Analytic theory of continued fractions [Text] / H. S. Wall. – New York : Van Nostrand, 1948. – 433 p.
2. Khovanskii, A. N. The Application of Continued Fractions and Their Generalizations to Problems in Approximation Theory [Text] / A. N. Khovanskii. – Groningen, Netherlands : P. Noordhoff, 1963. – 212 p.
3. Perron, O. Die Lehre von den Kettenbruchen [Text] / O. Perron. – Leipzig; Berlin; Stuttgart : Teubner, 1957. – 606 p.
4. Jones, W. B. Continued Fractions: Analytic Theory and Applications [Text] / W. B. Jones, W. J. Thron. – Reading, Massacusetts : Addison-Wesley, Publishing Company, 1980. – 428 p.

5. Lorentzen, L. Continued fractions with application [Text] / L. Lorentzen, H. Waadeland. – Amsterdam : Elsevier Publisher B. V., 1992. – 606 p.
6. Боднарчук, П. І. Гіллясті ланцюгові дроби та їх застосування [Текст] / П. І. Боднарчук, В. Я. Скоробогатько. – Київ : Наук. думка, 1974. – 272 с.
7. Скоробогатько, В. Я. Теория ветвящихся цепных дробей и её применение в вычислительной математике [Текст] / В. Я. Скоробогатько. – М. : Наука, 1983. – 312 с.
8. Боднар, Д. И. Ветвящиеся цепные дроби [Текст] / Д. И. Боднар. − Киев : Наук. думка, 1986. − 176 с.
9. Боднар, Д. И. Соответствующие ветвящиеся цепные дроби с линейными частными числителями для двойного степенного ряда [Текст] / Д. И. Боднар // Український математичний журнал. − 1991. − Т. 43, № 4. − С. 474–482.
10. Кучмінська, Х. Й. Відповідний і приєднаний гіллясті ланцюгові дроби для подвійного степеневого ряду [Текст] / Х. Й. Кучмінська // Доповіді АН УРСР. Серія А. − 1978. − № 7. − С. 614–618.
11. Murphy, J. A two–variable generalization of the Stieltjes-type continued fractions [Text] / J. Murphy, M. R. O'Donohoe // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 1978. – Vol. 4, Issue 3. – P. 181–190. doi: 10.1016/0771-050x(78)90002-5
12. Siemaszko, W. Branched continued fractions for double power series [Text] / W. Siemaszko // Journal of Computational and Applied Mathematics. − 1980. − Vol. 6, Issue 2. − P. 121−125. doi: 10.1016/0771-050x(80)90005-4
13. Kuchminskaya, Kh. Rational Approximation and Interpolation of Functions by Branched Continued Fractions [Text] / Kh. Kuchminskaya, W. Siemaszko // Rational approximation and its applications in Mathematics and Physics. Lecture Notes in Mathematics. – 1987. – Vol. 1237. – P. 24–40. doi: 10.1007/bfb0072451
14. Кучмінська, Х. Й. Двовимірні неперервні дроби [Текст] / Х. Й. Кучмінська. − Львів : ІППММ ім. Я. С.Підстригача НАН України, 2010. − 218 с.
15. McLaughlin, J. A convergence theorem for continued fractions of the form $K_{n=1}^{\infty} a_n / 1$ [Text] / J. McLaughlin, N. J. Wyshinski // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2005. – Vol. 179, Issue 1–2. – P. 255–262. doi: 10.1016/j.cam.2004.09.055
16. Lorentzen, L. Continued fractions with circular twin value sets [Text] / L. Lorentzen // Transactions of the American Mathematical Society. – 2008. – Vol. 360, Issue 8. – P. 4287–4304. doi: 10.1090/s0002-9947-08-04475-9
17. Antonova, T. M. On one criterion for the figured convergence of two-dimensional continued fractions with complex elements [Text] / T. M. Antonova, O. M. Sus' // Journal of Mathematical Sciences. – 2010. – Vol. 170, Issue 5. – P. 594–603. doi: 10.1007/s10958-010-0104-x
18. Дмитришин, Р. Про деякі області збіжності багатовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними [Текст] / Р. Дмитришин // Математичний вісник НТШ. – 2011. – № 8. – С. 69–77.
19. Баран, О. Є. Деякі області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду [Текст] / О. Є. Баран // Карпатські математичні публікації. – 2013. – Т. 5, № 1. – С. 4–13.
20. Siemaszko, W. On some conditions for convergence of branched continued fraction [Text] / W. Siemaszko // Lecture Notes in Mathematics. – 1982. – Vol. 888. – P. 367–370. doi: 10.1007/bfb0095601