

ВЛИЯНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ПУАССОНА НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕРМОУПРУГИХ НАПРЯЖЕНИЙ В ЭЛЕМЕНТАХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

А. В. Бондарь

Кандидат технических наук, доцент, заведующий
секцией информационных технологий
проектирования

Кафедра компьютерных наук*

Контактный тел. 096-233-68-75

E-mail: Oleksandr.v.bondar@gmail.com

Н. В. Бондарь

Аспирант

Кафедра прикладной и вычислительной математики*

Контактный тел. 095-015-03-76

E-mail: couper@pisem.net

*Сумской государственной университет

ул. Римского-Корсакова, 2, г. Сумы, Украина, 40007

Просторова задача зв'язаної термopужності зведена до системи одновимірних сингулярних інтегральних рівнянь за допомогою метода Ф-розв'язків. Отриманий аналітичний алгоритм реалізований чисельно, в результаті досліджено вплив коефіцієнта Пуассона на динамічну концентрацію зв'язаних термopужних напружень в плиті, послабленій наскрізним отвором досить довільного поперечного перетину, і на амплітудно-частотні характеристики суцільних циліндрів скінченної довжини

Ключові слова: зв'язана термopужність, коефіцієнт Пуассона, амплітудно-частотні характеристики, динамічна концентрація напружень

Пространственная задача связанной термоупругости сведена к системе одномерных сингулярных интегральных уравнений при помощи метода Ф-решений. Полученный аналитический алгоритм реализован численно, в результате исследовано влияние коэффициента Пуассона на динамическую концентрацию связанных термоупругих напряжений в плите, ослабленной отверстием достаточно произвольного поперечного сечения, и на амплитудно-частотные характеристики сплошных цилиндров конечной длины

Ключевые слова: связанная термоупругость, коэффициент Пуассона, амплитудно-частотные характеристики, динамическая концентрация напряжений

1. Введение

Плиты, ослабленные отверстиями, и сплошные цилиндры конечной длины являются важными элементами современных строительных и машиностроительных конструкций. Ослабленные отверстия плиты используются в качестве составных или самостоятельных элементов перекрытий строений различного предназначения, а также в качестве фундаментов или кожухов подвижных механизмов и стационарно установленного оборудования. Сплошные цилиндры конечной длины функционируют как составные элементы различных узлов и агрегатов, например в роликовых подшипниках, а также как элементы опор зданий и строительных конструкций. Такие конструктивные элементы обычно работают под воздействием существенных механических и тепловых нагрузок, поэтому задачи исследования их на прочность сохраняют свою актуальность на сегодняшний день. Для уточнения результатов, получаемых при математическом и компьютерном моделировании распределения термоупругих напряжений в таких элементах пространственных конструкций, необходимо использовать модель связанной термоупругости. Существует большое ко-

личество трудов [1-13], посвященных данной проблематике, однако серьезные математические трудности, вызванные учетом взаимосвязи тепловых и механических полей, постоянно заставляют исследователей искать новые и совершенствовать существующие методы решения граничных задач связанной термоупругости. Таким образом, развитие и модификация одного из новых современных подходов для решения граничных задач упругости и связанной термоупругости (метода Ф-решений) есть актуальными.

Наиболее общим и точным при расчетах массивных конструкций является подход, основанный на трехмерных уравнениях теории упругости [2-3]. В литературе существуют решения различных задач для тонкостенных пластин и оболочек, пространственных тел и т.п. [1 - 7, 9, 11, 13]. Однако разработка аналитических и численных процедур решения задач связанной термоупругости остается актуальной проблемой механики деформируемого твердого тела.

В работах [4 - 9] авторы указывают на практическую необходимость расчетов связанных полей в термоупругих материалах, используемых в различных отраслях машиностроения в условиях высоких температур и сильных механических нагрузок. Особенный

интерес представляют расчеты амплитудно-частотных характеристик для материалов с достаточно большим коэффициентом связанности полей, к которым относят полимерные материалы альдегидных групп, такие как поливинилформаль, поливинилбутираль, полистирол и другие. Одним из ключевых параметров, характеризующих физические свойства тела, является коэффициент Пуассона, поэтому большой практический интерес представляет анализ влияния данного коэффициента на распределение напряжений в трехмерных телах.

Одним из эффективных математических методов решения подобных задач является метод однородных решений, хорошо зарекомендовавший себя для тел, обладающих простой геометрией. Однако для объектов более сложной формы данный метод является неэффективным, поскольку приводит к громоздким аналитическим результатам, сложно поддающимся последующей численной реализации. В данной статье используется новый метод решения пространственных задач связанной термоупругости, который опирается на Ф-решения для слоя [8] и позволяет решать задачи связанной термоупругости для многосвязных плит и цилиндрических тел. В результате задача сводится к достаточно хорошо изученным системам одномерных интегральных уравнений, которые могут быть реализованы численно без особых затруднений.

2. Исходные соотношения и Ф-решения для слоя

В системе прямолинейных декартовых координат $0x_1x_2x_3$ рассмотрим слой $-\infty < x_1, x_2 < \infty, |x_3| \leq h$, на основаниях которого заданы граничные условия смешанного типа

$$u_3 = \sigma_{13} = \sigma_{23} = \partial_3 u_4 = 0, \quad x_3 = \pm h, \tag{1}$$

где σ_{ij} и u_j – компоненты тензора напряжений и вектора перемещений соответственно.

Однородные решения для этого случая построены в [8].

Основная система уравнений связанной термоупругости [2 – 4] после исключения из нее временного множителя $e^{-i\omega t}$ имеет вид:

$$\Delta U_j + \sigma \partial_j e - \frac{3\lambda + 2\mu}{\mu} \alpha_T \partial_j U_4 + \gamma_2^2 U_j + \frac{1}{\mu} X_j^* = 0, \quad (j=1,2,3) \tag{2}$$

$$\Delta U_4 + (\gamma_T^2 + i\gamma^2) U_4 + i m \omega e + \frac{Q^*}{\lambda_T} = 0$$

$$\gamma_T^2 = \frac{\omega^2}{V_T^2}, \quad \gamma^2 = \frac{\omega}{a^2}, \quad \gamma_2^2 = \frac{\omega^2}{V_2^2}, \quad m = \sigma E T_0 \frac{\alpha_T}{\lambda_T},$$

$$a^2 = \frac{\lambda_T}{\rho c_\epsilon}, \quad \sigma = \frac{1}{1 - 2\nu},$$

$$\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \Delta = \partial_j \partial_j, \quad e = \partial_k U_k, \quad (k=1,2,3)$$

Здесь U_j ($j=1, \bar{4}$), X_j^* и Q^* – амплитуды перемещений u_j , температуры $\theta = T - T_0$, интенсивностей объемных сил F_j и тепловых источников Q соответ-

ственно; E, ν, ρ – модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность вещества, $\alpha_T, \lambda_T, c_\epsilon$ – коэффициенты линейного теплового расширения, теплопроводности и теплоемкости материала; λ, μ – параметры Ламе, V_T и V_2 – скорости распространения тепловых и механических сдвиговых возбуждений; T_0 – температура тела в начальном невозбужденном состоянии, ω – круговая частота.

Предполагаем, что вдоль отрезка

$$x_1 = x_{10}, x_2 = x_{20}, |x_3| \leq h$$

распределены усилия $Y_j = \text{Re}(e^{-i\omega t} X_j)$ или тепловые источники $q = \text{Re}(e^{-i\omega t} Q)$ с амплитудами

$$\{X_1, X_2, Q\} = \sum_{n=0}^{\infty} \{P_{1n}, P_{2n}, P_{4n}\} \sin(\lambda_n x_3), \tag{3}$$

$$X_3 = \sum_{n=1}^{\infty} P_{3n} \cos(\lambda_n x_3), \quad \lambda_n = \frac{\pi(1 + 2n)}{2h}$$

В этом случае полевые величины целесообразно представить в следующем виде

$$\{U_1, U_2, U_4\} = \sum_{n=0}^{\infty} \{U_{1n}, U_{2n}, U_{4n}\} \sin(\lambda_n x_3),$$

$$U_3 = \sum_{n=0}^{\infty} U_{3n} \cos(\lambda_n x_3), \tag{4}$$

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} e_n \sin(\lambda_n x_3), \quad e_n = \partial_1 U_{1n} + \partial_2 U_{2n} - \lambda_n U_{3n},$$

$$T^e - T_0 = \text{Re}\{e^{-i\omega t} U^e\}, \quad U^e = \sum_{n=0}^{\infty} U_n^e \sin(\lambda_n x_3),$$

где T^e – температура внешней среды.

Исключая при помощи стандартных преобразований из системы (2) толщинную координату x_3 , получаем систему дифференциальных уравнений относительно коэффициентов Фурье полевых величин. Рассматривая отдельно каждый из четырех вариантов возбуждения, получаем согласно [8] матрицу Ф-решений $\|g_{kn}^{(m)}\|$ в следующем виде:

$$U_{kn}^{(m)} = \frac{P_{mn}}{4i\mu} g_{kn}^{(m)} \quad \left(k, m = \bar{1,4}; n = 0, 1, \dots \right) \tag{5}$$

$$g_{1n}^{(1)} = -H_0^{(1)}(\mu_n r) + \sigma \alpha_n \sum_{j=0}^2 (-1)^j B_{jn} \partial_1^2 H_0^{(1)}(\mu_{jn} r),$$

$$g_{2n}^{(1)} = \sigma \alpha_n \sum_{j=0}^2 (-1)^j B_{jn} \partial_1 \partial_2 H_0^{(1)}(\mu_{jn} r),$$

$$g_{3n}^{(1)} = \sigma \alpha_n \lambda_n \sum_{j=0}^2 (-1)^j B_{jn} \partial_1 H_0^{(1)}(\mu_{jn} r), \quad g_{4n}^{(1)} = -\omega \alpha_n m^* \partial_1 H_n(r),$$

$$g_{1n}^{(2)} = g_{2n}^{(1)}, \quad g_{2n}^{(2)} = -H_0^{(1)}(\mu_n r) + \sigma \alpha_n \sum_{j=0}^2 (-1)^j B_{jn} \partial_2^2 H_0^{(1)}(\mu_{jn} r),$$

$$g_{3n}^{(2)} = \sigma \alpha_n \lambda_n \sum_{j=0}^2 (-1)^j B_{jn} \partial_2 H_0^{(1)}(\mu_{jn} r), \quad g_{4n}^{(2)} = -\omega \alpha_n m^* \partial_2 H_n(r),$$

$$\begin{aligned} g_{1n}^{(3)} &= -g_{3n}^{(1)}, \quad g_{2n}^{(3)} = -g_{3n}^{(2)}, \\ g_{3n}^{(3)} &= -H_0^{(1)}(\mu_n r) - \alpha_n \lambda_n^2 \sigma \sum_{j=0}^2 (-1)^j B_{jn} H_0^{(1)}(\mu_{jn} r), \\ g_{4n}^{(3)} &= \alpha_n \lambda_n \omega m^* H_n(r), \\ g_{1n}^{(4)} &= \sigma \beta_n \alpha_T \mu (1+\nu) \sum_{j=1}^2 (-1)^j C_{jn} \partial_1 H_0^{(1)}(\mu_{jn} r), \\ g_{2n}^{(4)} &= \sigma \beta_n \alpha_T \mu (1+\nu) \sum_{j=1}^2 (-1)^j C_{jn} \partial_2 H_0^{(1)}(\mu_{jn} r), \\ g_{3n}^{(4)} &= \sigma \beta_n \alpha_T \mu \lambda_n (1+\nu) \sum_{j=1}^2 (-1)^j C_{jn} H_0^{(1)}(\mu_{jn} r), \\ g_{4n}^{(4)} &= \beta_n \mu \sum_{j=1}^2 (-1)^j (\gamma_1^2 - \mu_{jn}^2 - \lambda_n^2) H_0^{(1)}(\mu_{jn} r), \end{aligned}$$

$$H_n(r) = H_0^{(1)}(\mu_{1n} r) - H_0^{(1)}(\mu_{2n} r).$$

Здесь $H_p^{(1)}(x)$ – функция Ганкеля первого рода порядка p , μ_{1n} и μ_{2n} – корни характеристического уравнения

$$\begin{aligned} Z^4 - A_n Z^2 + B_n &= 0; \tag{6} \\ A_n &= \gamma_T^2 + i\gamma^2 + \gamma_1^2 + \frac{1+\nu}{1-\nu} \omega \alpha_T m^* - 2\lambda_n^2; \\ B_n &= (\gamma_1^2 - \lambda_n^2)(\gamma_T^2 + i\gamma^2 - \lambda_n^2) - \frac{1+\nu}{1-\nu} \omega \alpha_T m^* \lambda_n^2; \\ \text{Im}\{\mu_{1n}\} > 0; \text{Im}\{\mu_{2n}\} > 0; \mu_{0n}^2 &= \mu_n^2 = \gamma_2^2 - \lambda_n^2; \\ \text{Im}\{\mu_n\} > 0; \alpha_n &= \frac{1}{(1+\sigma)(\mu_{1n}^2 - \mu_{2n}^2)}; \\ \beta_n &= \frac{1}{\lambda_T(\mu_{2n}^2 - \mu_{1n}^2)}; m^* = im; d_n^2 = \gamma_T^2 + i\gamma^2 - \lambda_n^2; \\ \rho_{jn} &= d_n^2 - \mu_{jn}^2 + 2(1+\nu)\alpha_T \omega m^*; \\ B_{jn} &= \frac{\rho_{jn}}{\mu_n^2 - \mu_{jn}^2}; B_{0n} = \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} B_{jn}; \\ \delta_{jn}^* &= \frac{\mu_{jn}^2 + \lambda_n^2}{1-\nu} - 2(\mu_{jn}^2 + \lambda_n^2 - \gamma_1^2); \\ C_{jn} &= \frac{\delta_{jn}^*}{\mu_n^2 - \mu_{jn}^2}; C_{0n} = 0; \\ (j=1,2; n=0,1,\dots) \end{aligned}$$

3. Интегральные уравнения связанной термоупругости для слоя в R^3

Воспользовавшись полученными выше Φ -решениями, рассмотрим связанную динамическую задачу термоупругости для цилиндра конечной длины или для слоя с отверстием. Интегральные представления полевых величин, описывающих термоупругое состояние тела, введем как свертку матрицы фундаментальных решений (5) с компонентами вектора перемещения и температуры.

Соответственно получим

$$\begin{aligned} U_{kn}(z) &= \int_{\Gamma} \sum_{m=1}^4 Z_m^{(n)}(\zeta) g_{kn}^{(m)}(\zeta, z) ds, \\ \zeta \in \Gamma &\left(k=1,4; n=0,1,\dots \right), \end{aligned} \tag{7}$$

где $Z_m^{(n)}(\zeta)$ – подлежащие определению «плотности», Γ – контур поперечного сечения цилиндра или полости в слое.

Тогда компоненты тензора напряжения представим в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \text{Re}\{e^{-i\omega t} S_{ij}\}; S_{ij} = \mu(\partial_i U_j + \partial_j U_i) + \\ &+ (\lambda \delta_{ij} U_i - 2\mu(1+\nu)\sigma \alpha_T U_4) \delta_{ij} \quad (i, j=1,2,3), \end{aligned} \tag{8}$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

Пусть теперь на поверхности цилиндра или полости S задан вектор напряжения, а тепловой поток удовлетворяет условию теплообмена с внешней средой по закону Ньютона. Тогда граничные условия на S можно записать следующим образом

$$\begin{aligned} S_1^{(n)} - e^{2i\psi} S_2^{(n)} &= 2(N^{(n)} - iT^{(n)}), \\ S_1^{(n)} - e^{-2i\psi} \tilde{S}_2^{(n)} &= 2(N^{(n)} + iT^{(n)}), \\ S_3^{(n)} e^{i\psi} + \tilde{S}_3^{(n)} e^{-i\psi} &= 2Z^{(n)}, \\ \frac{\partial U_{4n}}{\partial n} + h^*(U_{4n} - U_n^e) &= 0, \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned} S_1^{(n)} &= S_{11}^{(n)} + S_{22}^{(n)}; S_2^{(n)} = S_{22}^{(n)} - S_{11}^{(n)} + 2iS_{12}^{(n)}; \\ \tilde{S}_2^{(n)} &= S_{22}^{(n)} - S_{11}^{(n)} - 2iS_{12}^{(n)}; \\ S_3^{(n)} &= S_{13}^{(n)} - iS_{23}^{(n)}; \tilde{S}_3^{(n)} = S_{13}^{(n)} + iS_{23}^{(n)}. \end{aligned}$$

Используя соотношения (7) и (8), получаем представления для амплитуд тензора напряжений

$$\begin{aligned} S_j^{(n)} &= \mu \int_{\Gamma} \sum_{m=1}^4 Z_m^{(n)}(\zeta) G_{jn}^{(m)}(\zeta, z) ds \quad (j=1,2,3), \\ \tilde{S}_i^{(n)} &= \mu \int_{\Gamma} \sum_{m=1}^4 Z_m^{(n)}(\zeta) \tilde{G}_{in}^{(m)}(\zeta, z) ds \quad (i=2,3), \\ \frac{\partial}{\partial n} \int_{\Gamma} \sum_{m=1}^4 Z_m^{(n)}(\zeta) g_{4n}^{(m)}(\zeta, z) ds + h^* \int_{\Gamma} \sum_{m=1}^4 Z_m^{(n)}(\zeta) g_{4n}^{(m)}(\zeta, z) ds &= h^* U_n^e, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{1n}^{(m)} &= \\ &= 2\sigma \left[\frac{\partial}{\partial z} (g_{1n}^{(m)} + ig_{2n}^{(m)}) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (g_{1n}^{(m)} - ig_{2n}^{(m)}) - 2\nu \lambda_n g_{3n}^{(m)} - 2(1+\nu)\alpha_T g_{4n}^{(m)} \right], \\ G_{2n}^{(m)} &= -4 \frac{\partial}{\partial z} (g_{1n}^{(m)} - ig_{2n}^{(m)}), \quad G_{3n}^{(m)} = 2 \frac{\partial}{\partial z} g_{3n}^{(m)} + \lambda_n (g_{1n}^{(m)} - ig_{2n}^{(m)}), \\ \tilde{G}_{2n}^{(m)} &= -4 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (g_{1n}^{(m)} + ig_{2n}^{(m)}), \quad \tilde{G}_{3n}^{(m)} = 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} g_{3n}^{(m)} + \lambda_n (g_{1n}^{(m)} + ig_{2n}^{(m)}). \end{aligned}$$

Здесь h^* – относительный коэффициент теплообмена, ψ – угол между внешней нормалью к контуру Γ в точке ζ и осью $0x_1$.

После выполнения операции предельного перехода в комбинациях (9) получаем систему из 4n одномерных сингулярных интегральных уравнений второго рода для каждого фиксированного n = 0,1,...

$$\pm 4iW_p^{(n)}(\zeta_0) + \int_{\Gamma} \sum_{m=1}^4 W_m^{(n)}(\zeta) K_{pm}^{(n)}(\zeta, \zeta_0) ds = F_p(\zeta_0), \quad (10)$$

$$\zeta_0 \in \Gamma \quad (p = \overline{1,4}).$$

где

$$Z_1^{(n)} = W_1^{(n)}e^{i\psi} + W_2^{(n)}e^{-i\psi},$$

$$Z_2^{(n)} = -i(W_1^{(n)}e^{i\psi} - W_2^{(n)}e^{-i\psi}),$$

$$Z_3^{(n)} = W_3^{(n)},$$

$$Z_4^{(n)} = \frac{1}{\mu\alpha_T} W_4^{(n)},$$

$$F_1^{(n)}(\zeta_0) = \frac{1}{\mu}(N^{(n)} + iT^{(n)}), \quad F_2^{(n)}(\zeta_0) = \frac{1}{\mu}(N^{(n)} - iT^{(n)}),$$

$$F_3^{(n)}(\zeta_0) = \frac{2}{\mu}Y_3^{(n)}, \quad F_4^{(n)}(\zeta_0) = 2\alpha_T\lambda_T h^* U_n^c.$$

При этом следует отметить, что в приведенных формулах (10) знак «+» при внеинтегральном слагаемом соответствует так называемой внутренней задаче (цилиндр конечной длины), а знак «-» относится к внешней задаче (слой с полостью). Таким образом, приведенный выше универсальный алгоритм позволяет решить две задачи одновременно. Ядра интегральных уравнений не приводятся в виду их громоздкости.

Окружное нормальное напряжение $\sigma_{\theta\theta}$ на боковой поверхности цилиндра (полости в слое) имеет вид

$$\sigma_{\theta\theta} = |S_{\theta\theta}| \cos(\omega t - \phi), \quad \phi = \arg S_{\theta\theta}, \quad (11)$$

$$S_{\theta\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} S_{\theta\theta}^{(n)} \sin \lambda_n x_3,$$

$$S_{\theta\theta}^{(n)} = S_{11}^{(n)} + S_{22}^{(n)} - N^{(n)} = S_1^{(n)} - N^{(n)}, \quad n = 0,1,2,...$$

В результате выполнения операции предельного перехода по формулам Сохоцкого-Племеля на контуре цилиндра или отверстия в слое получаем следующее соотношение:

$$S_1^{(n)}(\zeta_0) = \pm 2i\mu \frac{W_1^{(n)}(\zeta_0) + W_2^{(n)}(\zeta_0)}{1 - \nu} + 2\mu\sigma \int_{\Gamma} \sum_{m=1}^4 W_m^{(n)}(\zeta) R_m^{(n)}(\zeta, \zeta_0) ds, \quad n = 0,1,2,...$$

Ядра $R_m^{(n)}(\zeta, \zeta_0)$ также не приводятся в силу их громоздкости.

4. Численные результаты

Для определения напряженно-деформированного состояния конечного цилиндра или слоя с полостью

рассчитывалась амплитуда окружного нормального напряжения $|S_{\theta\theta}|$, фигурирующая в формулах (11)-(12), здесь r – характерный линейный размер рассматриваемого тела.

Интегральные уравнения (10) решались численно методом механических квадратур, затем восстанавливались компоненты полевых величин. В результате численного эксперимента получены амплитудно-частотные характеристики конечных цилиндров различных поперечных сечений в зависимости от первого относительного волнового числа $\gamma_1 r$, а также исследована динамическая концентрация напряжений для слоя конечной толщины с полостями различных поперечных сечений. Показано влияние коэффициента Пуассона на распределение амплитудно-частотных характеристик и динамическую концентрацию напряжений. При этом параметризация контуров поперечных сечений цилиндров или отверстий имеет вид

$$\zeta = r_1(\cos\theta + C_3 \cos 3\theta) + ir_2(\sin\theta - C_3 \sin 3\theta). \quad (13)$$

Формула (13) может быть применена для параметризации круговых, эллиптических и квадратных контуров, причем для данных контуров соответственно принимаем: для окружности $r = r_1 = r_2, C_3 = 0$, для эллипса $r = \frac{r_1 + r_2}{2}, C_3 = 0$, для квадрата $r = r_1 = r_2, C_3 = 0,14036$.

На рис. 1 – 4 представлены результаты расчетов влияния коэффициента Пуассона на распределение напряжений в трехмерных телах в предположении, что на тело действует гармонически изменяющееся во времени нормальное давление с амплитудой, распределенной по закону $N = N_0 \frac{x_3}{h}$. Основные физические величины, участвующие в расчетах, были зафиксированы для поливинилбутирала, для которого коэффициент связности полей весьма высок и равен 0.44. Расчеты проводились для значений коэффициента Пуассона $\nu = 0,1; \nu = 0,2; \nu = 0,3; \nu = 0,4$. Соответствие кривых и коэффициентов Пуассона обозначено подписями на рис. 1-4.

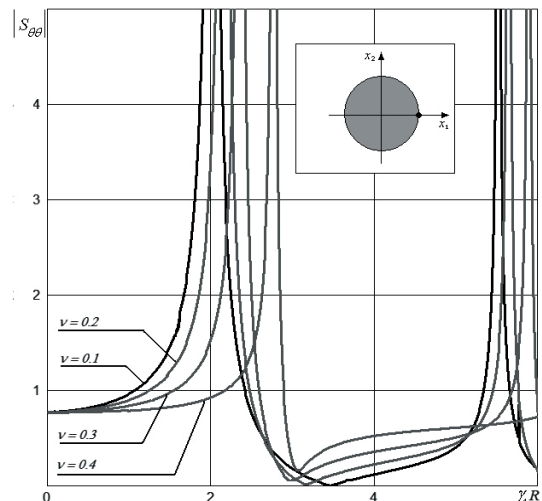


Рис. 1. Амплитудно-частотные характеристики сплошных цилиндров кругового поперечного сечения для различных значений коэффициента Пуассона

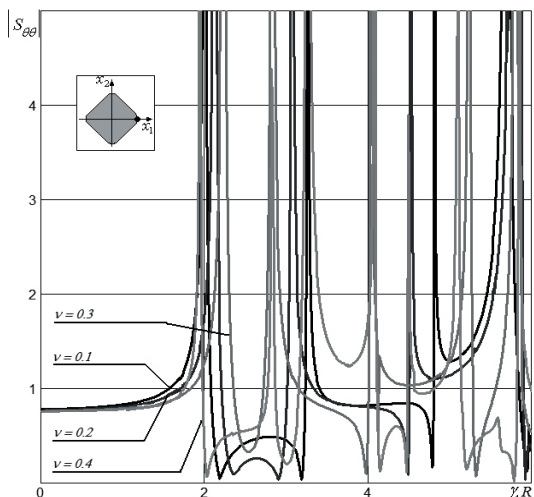


Рис. 2. Амплитудно-частотные характеристики сплошных цилиндров квадратного (квадрат со скругленными углами) поперечного сечения для различных значений коэффициента Пуассона

Результаты на рис. 1 соответствуют сплошному цилиндру конечной длины кругового поперечного сечения при $h=1, r=0.1, x_3=h$. Рис. 2 построен для сплошного цилиндра с поперечным сечением в виде квадрата со скругленными углами при аналогичных геометрических параметрах $h=1, r=0.1, x_3=h$. Выделенные точки на вставках-схемах обозначают расчетные точки.

Из результатов расчетов следует, что для сплошных цилиндров кругового поперечного сечения с увеличением значений коэффициента Пуассона происходит заметное смещение резонансных частот вправо, что является важным научным и практическим результатом, поскольку знание резонансных частот имеет большое значение при проектировании механизмов и конструкций, работающих под воздействием механических и температурных нагрузок. Также наблюдаются незначительные флуктуации амплитуды относительного нормального окружного напряжения – уменьшение амплитуды с ростом значений коэффициента Пуассона при малых значениях относительного волнового числа, и ее увеличение при больших значениях γ_1R . Для сплошных цилиндров квадратного поперечного сечения наблюдаем некоторое смещение резонансных частот влево, а также уменьшение амплитуд напряжений с ростом коэффициента Пуассона.

Это дает возможность в тех случаях, когда это допустимо, рекомендовать к использованию цилиндры с поперечным сечением в виде квадрата со скругленными углами.

На рис. 3 представлены результаты расчетов динамической концентрации напряжений в слое (плите), ослабленной отверстием кругового поперечного сечения при $h=1, r=0.1, x_3=h$. Рис. 4 построен для слоя (плиты) с отверстием, поперечное сечение которого имеет вид квадрата со скругленными углами при $h=1, r=0.1, x_3=h$.

Выделенными точками на вставках-схемах, как и ранее, обозначены положения точек, в которых проводились расчеты.

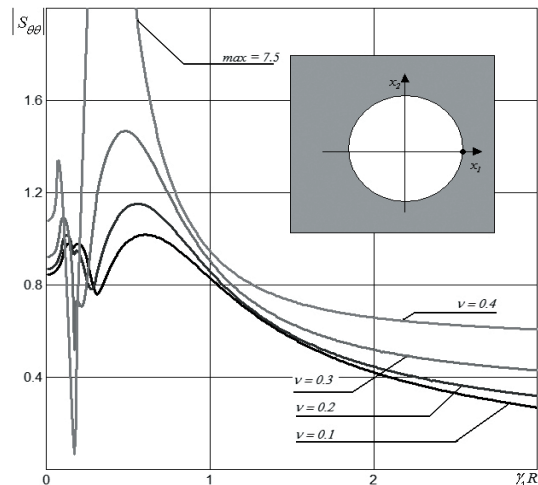


Рис. 3. Динамическая концентрация напряжений в плите (слое), ослабленном отверстием кругового поперечного сечения для различных значений коэффициента Пуассона

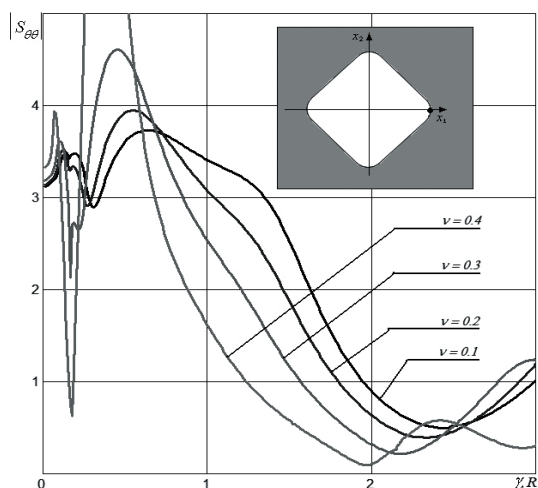


Рис. 4. Динамическая концентрация напряжений в плите (слое), ослабленном отверстием квадратного поперечного сечения (квадрат со скругленными углами) для различных значений коэффициента Пуассона

Для плиты, ослабленной отверстием кругового поперечного сечения, наблюдаем отчетливый рост амплитуд значений относительного окружного нормального напряжения с увеличением значений коэффициента Пуассона, причем данный эффект наблюдается как при малых частотах в окрестности «пиков», так и при больших частотах. С увеличением относительного волнового числа напряжения, рассчитанные для минимального $\nu=0,1$ и максимальных значений $\nu=0,4$, отличаются по величине в два раза и более. Для плиты, ослабленной отверстием с поперечным сечением в виде квадрата со скругленными углами, наблюдаем несколько иную картину. При малых частотах, как и в случае кругового отверстия, прослеживается рост амплитуд значений относительного окружного напряжения с увеличением коэффициента Пуассона, в то время как при больших частотах отчетливо видим, что увеличение коэффициента Пуассона уменьшает амплитуду значений относительного окружного нормального напряжения почти вдвое. Таким образом, в

случае использования материалов с большими значениями коэффициента Пуассона, можно сделать вывод о целесообразности проектирования плит, ослабленных отверстиями с поперечными сечениями в виде квадратов со скругленными углами, поскольку при высоких частотах это позволит существенно снизить напряжения, возникающие в подобных элементах пространственных конструкций.

5. Выводы

Разработана методика решения динамической задачи связанной термоупругости с учетом конечной скорости распространения тепла для элементов пространственных конструкций. Построена система Ф-решений, при помощи которой граничная задача сведена к системе $4n$ одномерных сингулярных интегральных уравнений при каждом фиксированном n . Создана численная схема реализации полученного аналитического алгоритма и соответствующее при-

кладное программное обеспечение для проведения численного эксперимента. Исследованы амплитудно-частотные характеристики цилиндров конечной длины различных поперечных сечений, и рассмотрена динамическая концентрация напряжений для слоя с полостями различных поперечных сечений, показано влияние коэффициента Пуассона на распределение напряжений в таких телах. Результаты расчетов могут быть использованы в строительстве и машиностроении при расчете на прочность элементов конструктивных опор, фундаментов и кожухов машин и механизмов, работающих под воздействием механических и температурных нагрузок. Также полученные результаты станут основой для проведения дальнейших исследований в данной области.

Результаты, представленные в данной статье, были получены при поддержке Президента Украины в рамках гранта Президента Украины для молодых ученых, предоставляемого Государственным фондом фундаментальных исследований Украины, научно-исследовательская работа № 0112U007317.

Литература

1. Даниловская В.И. Температурные напряжения в упругом полупространстве при внезапном нагреве его границы. // Прикладная математика и механика – 1950. – 14, № 3. – С. 316 – 318.
2. Коваленко А.Д. Термоупругость. – Киев: Вища школа, 1975. – 216 с.
3. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Обобщенная термомеханика. – Киев: Наукова думка, 1976. – 312 с.
4. Грибанов В.Ф., Паничкин Н.Р. Связанные и динамические задачи термоупругости. – М.: Машиностроение, 1984. – 184 с.
5. Молотов М.В., Киль И.Д. Связанная динамическая задача термоупругости для полупространства // Прикладная математика и механика. – 1996. – № 4 (60). – С. 687 – 696.
6. Suh C.S., Burger C.P. Effects of Thermomechanical Coupling and Relaxation Times on Wave Spectrum in Dynamic Theory of Generalized Thermoelasticity // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1998. – № 3 (65). – Pp. 605 – 613.
7. Пырьев Ю.А. Распространение волн в упругих средах с учетом связанности физико-механических полей. – М.: СИП РИА, 1999. – 206 с.
8. Фильштинский Л., Бондар О. Зв'язані термопружні поля в шарі при зосереджених збудженнях (кососиметричний розв'язок) // Машинознавство. – 2004, № 6 (84). – С. 30 – 38.
9. Norris A.N., Pholadias D.M. Thermoelastic Relaxation in Elastic Structures With Application to Thin Plates. // Quart. J. Mech. Appl. Math. 58 (1). – 2005. – Pp. 145-163.
10. Фильштинский Л.А., Бондарь А.В. Влияние связанности механических и температурных полей на амплитудно-частотные характеристики цилиндра // Прикладная механика. – 2006. – Т. 42, № 10. – С. 86 – 95.
11. A. Bahtui, M.R. Eslami. Coupled Thermoelasticity of Functionally Graded Cylindrical Shells // Mechanics Research Communications (Elsevier), V. 34. – 2007. – Pp. 1 – 18.
12. Фильштинский Л.А., Бондарь А.В. Прочность толстостенных элементов конструкций с учетом термоупругих напряжений // Проблемы машиностроения. – 2008. – Т. 11, № 5 – 6. – С. 60 – 69.
13. L. Stainier, M. Ortiz. Study and validation of a variational theory of thermo-mechanical coupling in finite visco-plasticity // International Journal of Solids and Structures. – 2010. – no 47 – Pp. 705–715.

Abstract

Modern three-dimensional construction elements, which are modeled by finite length cylinders and layers, weakened by through-the-thickness holes of rather different cross-sections, usually work under the influence of great physical and mechanical fields. It leads to a necessity of solving a generalized coupled thermoelasticity problem in the case of finite heat spreading velocity. Using F-solutions method the pointed problem was reduced to well-known systems of one-dimensional singular integral equations of the second order, which was reduced to the system of linear algebraic equations by mechanical quadrature method. Effective numeric schemes and software has been developed and used to solve the problems of thermoelastic coupling influence on frequency-amplitude characteristics of finite cylinders and dynamic stresses concentration in a layer, weakened by through-the-thickness holes. Poisson's ratio influence on thermoelastic stresses distribution in three-dimensional construction elements was showed

Keywords: *coupled thermoelasticity, Poisson's ratio, amplitude-frequency characteristics, dynamic stresses concentration*