

4. Трошин, А.Г. О режимах движения жидкой фазы в роторном вихревом массообменном аппарате/Трошин А.Г., Питак И.В.//Интегри-  
вані технології та енергозбереження //Щоквартальний науково-практичний журнал. – Х.: Національний технічний університет  
«ХПІ», 2007. - №4. – С. 31-37.
5. Питак, И.В. Аппарат для проведения процессов абсорбции и газоочистки/И.В. Питак, П.П. Хусточкин, В.Ф. Моисеев, В.П. Шапоров  
//Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Нові рішення в сучасних  
технологіях. – Х.:НТУ «ХПІ» - 2005. -№9. – С.3-6.
6. Карепанов, С.К. Математическая модель течения рабочей жидкости в каналах ротора и статора гидромеханического диспергатора  
/С.К. Карепанов//Применение роторных гидромеханических диспергаторов в горнодобывающей промышленности : теория и прак-  
тика : сб. докл. Междунар. науч.-практ. семинара. – Минск : Беларус. АН БЖ, 1998. – С. 57– 67.

□                      □

*Дана лінеаризована математична модель дискретного гідроприводу з урахуванням інерційного навантаження, стисливості рідини і витоків, в основі якої лежить заміна нелінійної залежності не дотичними, а раціонально підібраними січними*

*Ключові слова: дискретні гідроприводи, лінеаризована математична модель, метод січних*

□                      □

*Дана линеаризованная математическая модель дискретного гидропривода с учетом инерционной нагрузки, сжимаемости жидкости и утечек, в основе которой лежит замена нелинейной зависимости не касательными, а рационально подобранными секущими*

*Ключевые слова: дискретные гидроприводы, линеаризованная математическая модель, метод секущих*

□                      □

*A linearize mathematical model of discrete hydraulic taking into account the inertial loads, compressibility and leakage, which is based on replacement of non-linear dependence is not tangent and secant rationally chosen is given in this article*

*Keywords: pneumatic aggregates discrete, linearize mathematical model, the method of secants*

□                      □

УДК 621.05

# ЛИНЕАРИЗОВАННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИСКРЕТНОГО ГИДРОПРИВОДА НА ОСНОВЕ МЕТОДА СЕКУЩИХ

**Г.А. Крутиков**

Доктор технических наук, профессор\*  
Контактный тел.: (057) 707-61-28  
E-mail: gkrutikov@gmail.com

**М.Г. Стрижак**

Аспирант\*  
Контактный тел.: (057) 707-61-28  
E-mail: mp9753@mail.ru

\*Кафедра «Гидропневмоавтоматика и гидропривод»  
Национальный технический университет  
«Харьковский политехнический институт»  
ул. Фрунзе, 21, г. Харьков, Украина, 61002

## Введение

При решении задач управления дискретным гидроприводом необходимо иметь сравнительно точные аналитические решения уравнений, описывающих функционирование гидропривода, которые невозможно получить на основе нелинейной модели. Предлагаемые в статье пути решения задачи динамического расчёта гидропривода являются компромиссом между численными нелинейными решениями на ЭВМ, что требует больших затрат машинного времени, и общепринятыми линейными решениями, которые пригодны лишь для замкнутых гидроприводов, но дают большую погрешность применительно к разомкнутым (дискретным) приводам.

## Постановка задачи

Решается задача получения достаточно точных аналитических решений для всех переменных состояния гидропривода на основе замены нелинейной расходно-перепадной характеристики золотника рационально подобранной секущей. Исходная нелинейная математическая модель в безразмерной форме для дискретного гидропривода (рис. 1), полученная в работе [1], имеет вид:

$$\frac{d^3\xi}{d\tau^3} + \left(\frac{\gamma}{\beta} + \phi\beta\right) \frac{d^2\xi}{d\tau^2} + (\phi\gamma + 1) \frac{d\xi}{d\tau} + \chi\phi = \bar{f} \sqrt{1 - \left(\beta \frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \gamma \frac{d\xi}{d\tau} + \chi\right)} \tag{1}$$

где  $\bar{f}$  и  $\xi$  – входная и выходная координаты гидропривода;  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\chi$  и  $\varphi$  – критерии динамического подобия гидропривода [1]. Линеаризации подлежит нелинейная зависимость расхода от перепада давления. Для прямоугольных или кольцевых окон золотника:

$$\bar{Q} = x^* \sqrt{1 - \bar{p}}, \quad (2)$$

где  $x^* = x/x_{\max}$  – относительное смещение золотника;

$$\bar{Q} = Q/Q_m \text{ – относительный расход.}$$

Линеаризации подлежит нелинейная расходно-перепадная характеристика золотника (2). При срабатывании дискретных (разомкнутых) приводов его параметры (скорость, давление и т.д.) меняются в широких пределах. Поэтому общепринятая линеаризация с помощью касательных (замена первыми членами разложения в ряд Тейлора) непригодна из-за больших ошибок. Для дискретных гидроприводов целесообразным представляется использование метода секущих для замены нелинейных характеристик. При этом в данном случае наиболее рациональной будет такая линеаризация выражения (2), при которой за одну из опорных точек для секущей выбирается точка на расходно-перепадной характеристике, соответствующая установившейся скорости поршня.

$$v_y = \bar{Q}_y = \bar{x} \sqrt{1 - \bar{p}_y - \chi}; \quad (3)$$

т.е. координатами опорной точки могут служить:

$$v_y = -\frac{\bar{\chi}^2}{2} + \sqrt{\frac{\bar{\chi}^2}{2} + \bar{x}^2(1 - \chi)}; \quad \bar{p}_y = \chi + \bar{p}_y, \quad (4)$$

где  $v_y$ ,  $\bar{p}_y$  – координаты опорной точки на расходно-перепадной характеристике (рис. 2).

За вторую опорную точку можно выбрать точку с координатами  $\bar{p} = 0$ ,  $\bar{Q} = v = \bar{x}$  (прямая 3 на рис. 2). Такой выбор целесообразен при малой и средней инерционной нагрузке, когда скорость поршня при разгоне носит колебательный характер (рис. 3). При большой инерционной нагрузке, когда разгон начинается при относительном перепаде давлений  $\bar{p}$ , близком к единице и носит характер, близкий к экспоненциальному, в качестве второй опорной точки желательно брать точку с координатами  $\bar{p} = 1$ ,  $v = 0$  (прямая 2 на рис. 2).

Уравнение секущей в общем случае имеет вид:

$$y(\bar{p}) = \frac{y(\bar{p}_y) - y(0)}{\bar{p}_y - \bar{p}_0} (\bar{p} - \bar{p}_0) + y(0), \quad (5)$$

где  $\bar{p}_y$ ,  $y(\bar{p}_y)$  – координаты, соответствующие установившемуся движению поршня;  $\bar{p}_0$ ,  $y(0)$  – координаты второй опорной точки.

Таким образом, в результате линеаризации имеем:

$$\bar{x} \sqrt{1 - \bar{p}} = L_1 - L_2 \bar{p}. \quad (6)$$

Для прямой 3 (рис. 2)  $L_1 = \bar{x}$ ,  $L_2 = \frac{\bar{x} - v_y}{\bar{p}_y}$ ,

для прямой 2  $L_1 = L_2 = \frac{v_y}{1 - \bar{p}_y}$ .

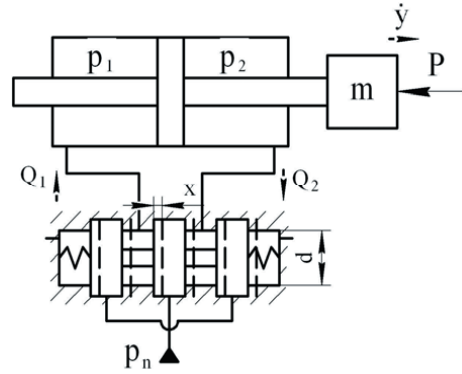


Рис. 1. Расчётная схема гидропривода

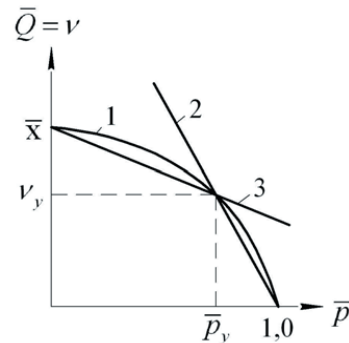


Рис. 2. Выбор рациональных секущих на расходно-перепадной характеристике золотника

После линеаризации дифференциальное уравнение гидропривода примет вид:

$$\frac{d^3 \xi}{d\tau^3} + \left( \frac{\gamma}{\beta} + (L_2 \bar{x} - \varphi) \beta \right) \frac{d^2 \xi}{d\tau^2} + (1 + (\varphi + L_2 \bar{x})) \frac{d\xi}{d\tau} + \chi(\varphi + L_2 \bar{x}) = L_1 \bar{x} \quad (7)$$

Последнее уравнение можно представить в виде неоднородного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2 v}{d\tau^2} + k_1 \frac{dv}{d\tau} + k_2 = k_3, \quad (8)$$

где

$$k_1 = \left[ \frac{\gamma}{\beta} + (L_2 \bar{x} + \varphi) \beta \right];$$

$$k_2 = [1 + (L_2 \bar{x} + \varphi) \gamma];$$

$$k_3 = L_1 \bar{x} - \chi(\varphi + L_2 \bar{x}).$$

Решение характеристического уравнения:

$$\lambda_{1,2} = -\sigma \pm \sqrt{D} = -\sigma \pm \varphi, \quad (9)$$

где  $\sigma = \frac{k_1}{2}$ ,  $D = \frac{k_1^2}{4} - k_2$ .

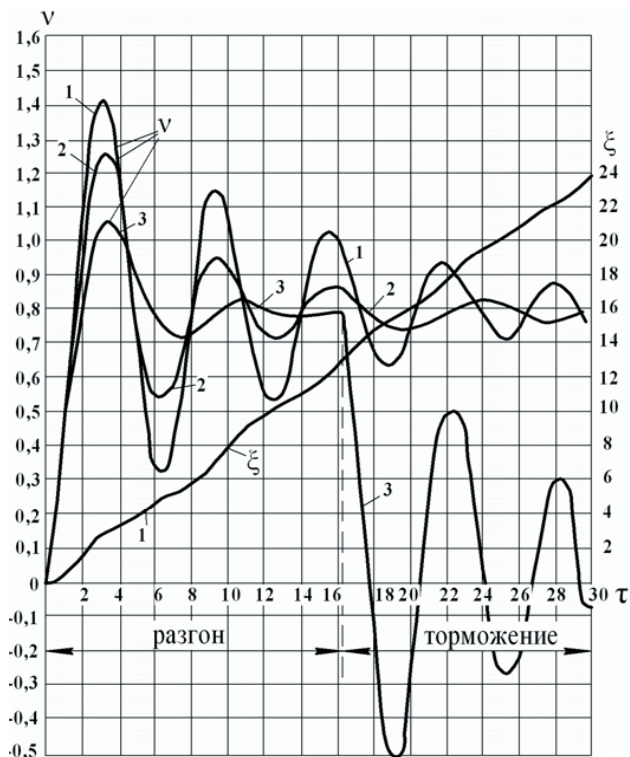


Рис. 3. Результаты расчёта процесса разгона и торможения для гидропривода по линеаризованной модели (1 –  $\beta=0,1$ ; 2 –  $\beta=0,5$ ; 3 –  $\beta=1$ )

Однако случай, когда  $D > 0$  носит гипотетический характер. В реальных гидроприводах, у которых критерий инерционности  $\beta$  лежит в пределах от 0,1 до 1  $D < 0$ . Поэтому вместо (9) следует рассмотреть решение характеристического уравнения в виде:

$$\lambda_{1,2} = -\sigma \pm i\sqrt{D} = -\sigma \pm i\phi. \tag{10}$$

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения, как известно, складывается из суммы общего решения однородного уравнения  $U$  и частного решения неоднородного уравнения  $U^*$ :

$$v = U + U^*. \tag{11}$$

В случае действительных корней ( $D > 0$ ):

$$v = \frac{k_3}{k_2} + e^{-\sigma\tau} (c_1 \text{sh}\phi\tau + c_2 \text{ch}\phi\tau). \tag{12}$$

Постоянные интегрирования  $c_1$  и  $c_2$  для случая разгона находятся из нулевых начальных условий (при  $\tau=0, v=0, \omega=0$ ):

$$c_1 = -\frac{k_3}{2k_2} \frac{k_1}{\sqrt{|D|}}; c_2 = -\frac{k_3}{k_2}.$$

Для случая мнимых корней ( $D < 0$ ) выражение для безразмерной скорости  $v$  при разгоне имеет вид:

$$v = \frac{k_3}{k_2} \left[ 1 - e^{-\sigma\tau} \left( \frac{\sigma}{\sqrt{-D}} \sin \sqrt{-D}\tau + \cos \sqrt{-D}\tau \right) \right], \tag{13}$$

где  $\sigma$  и  $D$  находятся из (9).

Координата поршня в этом случае находится из выражения:

$$\xi = \int v d\tau = \frac{k_3}{k_2} \left[ \tau + \frac{e^{-\sigma\tau}}{k_2} (\sqrt{-D} \sin \sqrt{-D}\tau + k_1 \cos \sqrt{-D}\tau) - \frac{k_1}{2} \right]. \tag{14}$$

Как для линейной (7), так и для нелинейной модели (1) разгон моделируется за счёт ступенчатого перехода золотника от состояния полного перекрытия до состояния полного открытия  $\bar{x}=1$  (рис. 3).

Режим торможения создавался при скачкообразном уменьшении открытия золотника от  $\bar{x}=1$  до  $\bar{x}=0,1$ . При этом постоянные  $c_1$  и  $c_2$  в уравнении (13) находятся при других (не нулевых) начальных условиях (при  $\tau=0, v_0=v_y, \omega_0=0, \xi=\xi_B$ , где  $\xi_B$  – координата торможения).

$$c_1 = -\frac{k_3}{k_2} \left[ \frac{k_1}{2} \left( 1 - v_0 \frac{k_2}{k_3} \right) - \omega_0 \frac{k_2}{k_3} \right] / \sqrt{D};$$

$$c_2 = -\frac{k_3}{k_2} \left( 1 - v_0 \frac{k_2}{k_3} \right);$$

Таким образом, для расчётов можно ограничиться формулой (13), придав ей вид:

$$v = \frac{k_3}{k_2} \left\{ 1 - e^{-\sigma\tau} \sqrt{\frac{\sigma^2}{-D}} \cos \left[ \sqrt{-D}\tau + \arctg \left( \frac{-\sigma}{\sqrt{-D}} \right) \right] \right\}. \tag{15}$$

При этом уравнение секущей следует представлять в виде прямой 3 (рис. 2):

$$\bar{x} = L_1 - L_2 \bar{p}, \tag{16}$$

где  $L_1 = \bar{x}, L_2 = \frac{\bar{x} - v_y}{\bar{p}_y}$ .

**Выводы**

Полученные аналитические решения для основных переменных состояния гидропривода имеют достаточно высокую расчётную точность ввиду рациональной формы линеаризации и позволяют без использования численных методов оценить такие параметры переходного процесса, как декремент затухания  $\sigma$ , собственную частоту колебаний, минимально необходимый тормозной путь и т.д.

Учитывая достаточно корректный характер математической модели, где учтены силы инерции, сжимаемость жидкости и утечки, полученные результаты могут быть полезны при проектировании гидроприводов.

**Литература**

1. Крутиков, Г.А. О критериях динамического подобия дискретных гидроприводов [Текст] / Г.А. Крутиков, М.Г. Стрижак. – В сб. Восточно-Европейский журнал передовых технологий, 2012. - №2/7(56). – С. 18-21.