У роботі продемонстровано взаємодію хаотичних систем у контексті отримання хаосоподібних процесів, отримані графіки залежності часів Пуанкаре від радіуса орбіт нових структур. Реалізація алгоритму базувалася на рекурентній матриці, яка є альтернативою як для опису, так і для управління динамічними системами

Ключові слова: хаотичні і стохастичні системи, хаосоподібні структури, часи повернення Пуанкаре

В работе продемонстрировано взаимодействие хаотических систем в контексте получения хаосоподобных процессов, получены графики зависимости времён Пуанкаре от радиуса орбит новых структур. Реализация алгоритма базировалась на рекуррентной матрице, являющейся альтернативой как для описания, так и для управления динамическими системами

Ключевые слова: хаотические и стохастические системы, хаосоподобные структуры, времена возврата Пуанкаре

УДК 517.9

ВРЕМЕНА ВОЗВРАТА ПУАНКАРЕ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ХАОТИЧЕСКИХ И СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Э.И. Владимирский
Старший научный сотрудник
Кафедра «Информационно-измерительная и компьютерная техника»
Азербайджанская Государственная Нефтяная Академия
пр. Азадлыг, 20, г. Баку, Азербайджанская республика, AZ1010
Контактный тел.: +99-412-498-62-20
E-mail:eduard.vladimirsky@hotmail.com

1. Введение

Динамические системы со сложным характером траекторий можно описывать с точки зрения геометрии предельных множеств в фазовом пространстве, а также эволюцией фазовых траекторий во времени. Одной из фундаментальных особенностей временной динамики систем является так называемый возврат Пуанкаре. Возвращаемость по Пуанкаре означает, что любая траектория, стартующая из некоторой точки x_0, во времени бесконечное число раз пройдет сколь угодно близко от начального состояния [1]. Такие движения в динамических системах Пуанкаре назвал устойчивым по Пуассону [1]. Примером подобных систем являются системы, реализующие режим странного аттрактора. Фазовые траектории на странном аттракторе всегда неустойчивы по Ляпунову, но устойчивы по Пуассону. Анализу проблемы возврата Пуанкаре посвящено большое количество работ. Однако не все вопросы, в особенности, касающиеся ряда прикладных проблем, исследованы в полной мере. Одним из них является вопрос о влиянии взаимодействия хаотических и стохастических систем на времена возврата Пуанкаре.

Задача выявления и оценки параметров взаимодействия между источниками сложных (хаотических, стохастических) колебаний по наблюдаемым междисциплинарна. Она возникает в физике, биологии, геофизике, медицине, экономике и т.д.

При этом особое внимание уделяется нерегулярным сигналам, поскольку уже давно пришло осознание типичности хаотического поведения нелинейных систем.

В связи с глубокими различиями между случайными и хаотическими системами [2], а также учитывая гетерогенность информационных потоков, циркулирующих в этих структурах, возникает проблема их взаимодействия. То есть возникает вопрос "как влияет стохастическая составляющая на хаотический процесс".

Оказывается, что результирующее хаотическое поведение динамической системы существенно обязано своим возникновением не только действию динамических (детерминистских) законов, но и наличию статистических факторов [3].

Кроме того, в последнее время в связи с развитием синергетической концепции, выяснилось интересное свойство таких систем – оказалось, что нарастание интенсивности стохастических слагаемых может приводить не только к росту беспорядка, но и образованию упорядоченных структур, то есть самоорганизации системы, уменьшению ее энтропии [4].

Очевидно, последнее связано с неконсервативностью объема фазового пространства, поскольку в полной замкнутой системе энтропия не может уменьшаться.

Взаимодействие автоколебательных систем, демонстрирующих хаотическую динамику, приводит к изменению структуры аттракторов, существующих в отсутствие взаимодействия. В свою очередь, эти изменения отражаются в структуре характерных временных интервалов таких, как времена возврата в секущую Пуанкаре. Согласно [5], распределение времен возврата динамической системы может характеризоваться мультифрактальными свойствами, то есть демонстрировать локальный скейлинг [6, 7].

В зависимости от режима функционирования системы времена возврата будут либо const (если движение есть устойчивое периодическое), либо квазипериодическим (при движении на n-мерных торах), либо представлять собой случайную последовательность времен $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, где t_k - отвечают временам попадания фазовой траектории в ε - окрестность x_0. Именно случайный характер последовательности времен возврата характеризует движения на хаотических аттракторах диссипативных нелинейных систем.

Для хаотических аттракторов времена первого возврата ограничены: $\tau_k = t_{k+1} - t_k < Z$ для любых $k = 1,2...$, что является следствием наличия в системе минимального множества. Движения на аттракторе, удовлетворяющие указанным свойствам, Пуанкаре назвал устойчивыми по Пуассону.

Таким образом, в целях анализа и управления взаимодействующими системами, актуализируется проблема разработки математической модели, идеологической основой которой являются: принципы синергетики; теорема Пуанкаре о возвращении; нелинейный рекуррентный анализ [2]; турбулентный хаос.

2. Постановка задачи

Пусть время первого возращения Пуанкаре (First Poincare recurrence times, FPRs) соответствует рекуррентной диаграмме (Recurrence plot, RP) некоторого процесса, то есть FPRs (RP) или

$$(FRPs) \sim (RPs). \quad (1)$$

Пусть имеет место новое прочтение хаоса, то есть определение хаотичности динамической системы, помимо чувствительной зависимости от начальных условий, включает также требование **сложности** траектории [8]. Под **сложностью** понимается отсутствие рекуррентности.

Пусть математическая модель системы S представлена в виде триады:

$$S = (\hat{x}, I, C), \quad (2)$$

натянутой на полное метрическое пространство W, $S \in W$.

Здесь $\hat{x} = \{x_n\}_{n\geq 0}^{N}$ - последовательность измерений; I - идентификация $\hat{x}$, $I(\hat{x})$, C - непараметрическое рефлексивное управление, учитывающее понятие сложности траектории $G_{ref}(\eta)$.

Метатеорема. Пусть (W,ρ) - полное метрическое пространство с мерой ρ. Пусть $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ - хаотическая, хаосоподобная, стохастическая наблюдаемые. $A(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$ подмножество множества W, $A(\cdots) \subset W, I(\cdots)$ - идентификация параметров наблюдаемых.

Система $S \in (W,A,\rho)$ реализуема тогда и только тогда, когда:

1. $I(\hat{x},\hat{y},\hat{z}) \in C_{ref}(\eta)$;
2. $C_{ref}(\eta) = R_{i,j}^{\varepsilon,m} = \theta(\varepsilon_i - \|x_i - x_j\|)/\eta$, $x_i \in R^m$, $i,j = \overline{1,N}$, где $\eta = \gamma(x_0) \cap \omega(x_0) \neq \varnothing$ - условие сложности траектории;
3. $L:(FRPs) \sim (RPs)$;
4. $A1 = (a3 - a2) \to a1$ - функция готовности субъекта к принятию решения.

Условие истинности. Пусть $\hat{f}_0 : I(\cdots) = C_{ref}(\eta)$. Тогда найдется такое значение истинности $\hat{f} : I(\cdots) = C_{ref}(\eta)$, которое будет отвечать операции отображения в (W,A,ρ) при условиях удовлетворения A1 и наилучшему принятию решения $(a3 - a2) \to a1 \Rightarrow a2 \vee a1 = \sup(> a2, a1)$ [9].

Число $\tau(U) = \inf_{z \in U} t(z,U)$ - время возвращения Пуанкаре в множество U точки z.

Теорема структуры. Пусть $S \in (W,A,\rho)$. Тогда для $S \in (W,A,\rho)$ существует такой алгоритм реализации, который удовлетворяет:

1. метатеореме;
2. условию истинности;
3. времени возвращения Пуанкаре.

В терминах данного описания исследуемые процессы называются хаотическими, то есть содержат в себе детерминированный хаос.

3. Алгоритм реализации системы «наблюдаемые – идентификация – управление»

1. Вход: множество наблюдаемых $(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$.
2. Выделяются области интересов (area of interest) наблюдаемых $(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$ по критерию:

$$AI(\hat{x},\hat{y},\hat{z}) \underset{def}{=} \sup_{sem} \inf_{V} I / a3,$$

где $AI(\cdots)$ - область интересов, сформированная на тезисе выделения информации таким образом, чтобы она была максимально значащей с семантической точки зрения $\sup_{sem}$ и минимальной по объему информации $\inf_{V}$; a3 - адекватно AI с учетом рефлексивности.

3. $G = AI(\cdots) \Rightarrow M$, $M = [N,N]$, $G \in R^2$. (3)
4. Получаем рекуррентные диаграммы PD как:

$$PD_{i,j}^{\varepsilon,m} = \theta(\varepsilon - \|x_i - x_j\|)/\eta, \ x \in R^m, \ i,j = \overline{1,N},$$

где N - число рассматриваемых состояний x_i; ε - размер окрестности точки x в момент i; $\|\cdot\|$ - норма; $\theta(\cdot)$ - функция Хевисайда.

5. Обучение системы (п.п. 2-4) производится по схеме: присвоим индекс s предыдущему выбору $AI(\cdots)$, а s+1 последующему. Итерационный процесс имеет вид:

$$\{x_1^s,...,x_m^s\} \to x_{k_1(s)}^{s+1},...,\{x_1^s,...,x_m^s\} \to x_{p(s)}^{s+1},$$

$$x_k^{s+1} = x_k^s, \ k = \overline{1,m}, \ k \neq k_1(s),...k_p(s). \quad (4)$$

Определение 1. Состояние q системы $S \in (W,A,\rho)$ управляемо тогда и только тогда, когда $\exists u \in W$:

$$\chi(q:u) = Q. \quad (5)$$

Определение 2. Система $S \in (W, A, \rho)$ называется управляемой тогда и только тогда, когда управляемо каждое ее состояние q.

Утверждение 1. Если $S \in (W, A, \rho)$ есть система, каждое состояние q которой достижимо из Q, то из управляемости S следует, что S сильно связана: справедливо и обратное.

Утверждение 2. Система $S \in (W, A, \rho)$ считается локально устойчивой по Ляпунову, если и только если устойчиво полученное решение.

Одним из важных практических применений управления хаосом служат методы контроля нелинейных систем. Эти методы основаны на экстремальной чувствительности хаотической динамики к малым возмущениям.

Эффективность контроля в значительной мере определяется временем попадания в требуемую область. Это время называется временем установления контроля.

Можно зафиксировать большой набор ε - шаров и вычислить время возвращения. Для многих гиперболических систем эта величина ведет себя как - $\gamma \log \varepsilon$, а для нехаотических систем – как ε^{-y}, где γ - размерностная характеристика [10]. Пусть среднее время $\langle \tau \rangle$, требуемое для того, чтобы при эргодическом движении попасть в окрестность некоторой точки на странном аттракторе, выражается как [10]:

$$\langle \tau \rangle = -\gamma \log \varepsilon \,, \qquad (6)$$

где γ - фрактальная размерность странного аттрактора.

Пусть модель взаимодействия стохастического процесса $D_{Y_{i+1}}$ с хаотической системой Рабинович – Фабрикант имеет вид [11]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -ax_1 + bx_2 + x_2x_3 + D_{Y_{i+1}} \,, \\ \dot{x}_2 &= -bx_2 + hx_1 - x_1x_2 \,, \\ \dot{x}_3 &= -dx_3 + x_1x_2 \,, \end{aligned} \qquad (7)$$

где x_1, x_2, x_3 - переменные; a, b, d, h - положительные константы; ϕ_{i+1} - дискретные стохастические уравнения вида [12]:

$$\phi_{i+1} = \sqrt{r}\zeta_i + \left[(1-\gamma\tau) + \sqrt{r}\xi_i)_{\phi_i} \right], \qquad (8)$$

где $t_i = i\tau$ - время, фиксируется набором чисел $i = 0,1,...,N$ и минимальным интервалом τ; ζ_i и ξ_i - адаптивный и мультипликативный стохастические источники, нормированные условиями белого шума $\langle \zeta_i \zeta_j \rangle = \langle \xi_i \xi_j \rangle = \delta_{ij}$; коэффициент трения γ задает параметр $V = \gamma(1+\gamma)$, значения которого определяют режим диффузии; D - интенсивность стохастических слагаемых.

Требуется:

• определить взаимодействующие наблюдаемые, произведенные системами (7), (8);

• определить рекуррентные диаграммы в контексте взаимодействующих наблюдаемых;

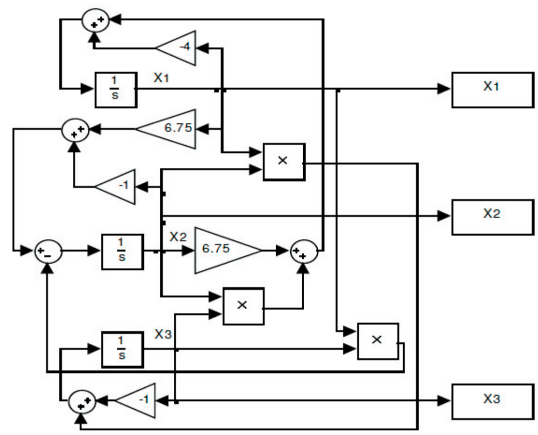
• определить время возврата Пуанкаре в функции (1);

• дать топологический и текстурный анализы рекуррентных диаграмм, в результате которых принимается решение о принадлежности классу процессов.

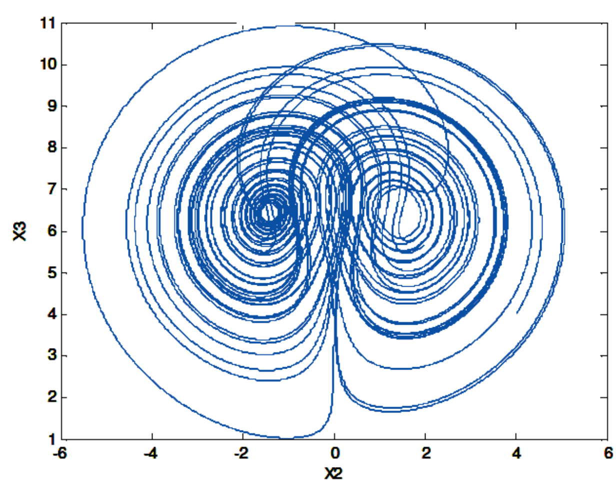
4. Реализация алгоритма

Шаг 1. Производится моделирование хаотической системы типа Рабинович – Фабрикант в программной среде MATLAB/Simulink [13], $N = 2{,}5 \cdot 10^4$ точек (реально - $2 \cdot 10^3$), представленной схемой (рис. 1,а) с аттрактором в плоскости $x_2 - x_3$ - (рис. 1,б), при $a = 4$, $b = d = 1$, $h = 6.75$.

Шаг 2. Реализуется итерационный алгоритм процедуры (3) на множестве, состоящем из $N = 8 \cdot 10^3$ точек (реально - $2 \cdot 10^3$), приводящей к временному ряду, характеризующему аномальную диффузию.



а)



б)

Рис. 1. а) схема моделирования, б) аттрактор системы

Шаг 3. Отображаем аддитивную составляющую наблюдаемой процессов Рабинович – Фабрикант – аномальная диффузия $\left\{ \hat{y}_n \right\}_{n=0}^{N}$ на квадратную матрицу $N \times N$, $M = [N \times N]$ как [9]:

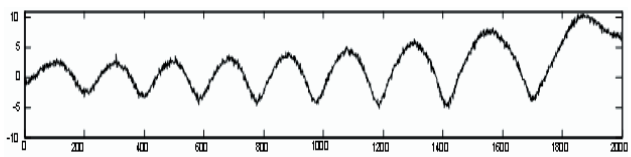
$$G_{i,j} = \left\{ \hat{y}_n \right\}_{n=0}^{N} \Rightarrow M \,, \; G_{i,j} \in R^2 \,. \qquad (9)$$

Шаг 4. Получаем рекуррентные диаграммы (рис. 2,б,в) [9], используя выражения [9,14].

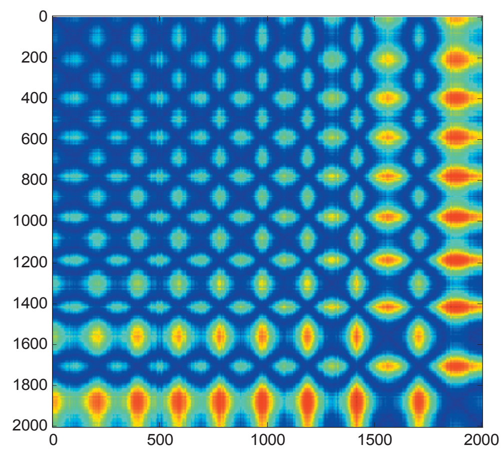
$$PD^{m,\varepsilon_i}_{i,j} = \theta(\varepsilon - \|x_i - x_j\|) \,|\, \gamma(x_0) \cap \varpi(x_0) \neq \varnothing, \quad x \in R^m,\ i,j = \overline{1,N}, \tag{10}$$

где N - число рассматриваемых состояний x_i; ε - размер окрестности точки x в момент i; $\|\cdot\|$ - норма; $\theta(\cdot)$ - функция Хевисайда; $\gamma(x_0) \cap \omega(x_0) \neq \varnothing$. – ограничение на сложность траектории.

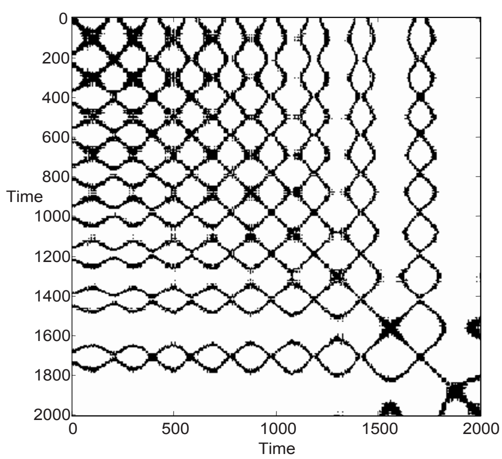
Что касается рекуррентных диаграмм (рис. 2,б,в), то выяснилось, что интенсификация резонансного возбуждения стохастической составляющей (2) активизировало формирование квазирегулярной системы ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$) типа Рабинович – Фабрикант – аномальная диффузия.



а)



б)



в)

Рис. 2. а) наблюдаемая; б,в) рекуррентные диаграммы

Шаг 5. Строим график распределения времен возврата Пуанкаре (рис. 3), где fBM – фрактальное броуновское движение, fR-F – система Рабинович-Фабрикант, fR-F + fBM – хаосоподобная система [6].

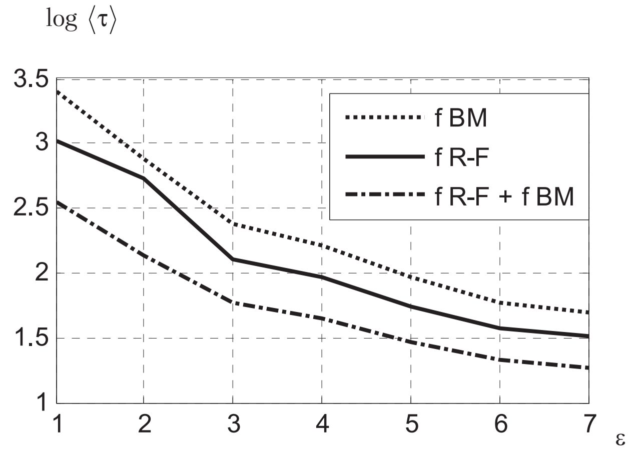


Рис. 3. Распределение времён возвращения Пуанкаре

Представляется интересным оценка соотношения сигнал/помеха в виде отношения фрактальных размерностей в контексте оценки эффективности функционирования системы [15]:

$$D_{\text{сигн}} / D_{\text{помехи}} = \chi. \tag{11}$$

На основании выражения (1) отношение (11) может быть представлено как:

$$D_{F_1} / D_{F_2} \sim \frac{\langle \tau_c \rangle}{\tau_n} = \chi, \tag{12}$$

где коэффициент χ будет определять отношение времен возвратов Пуанкаре с шумом, то есть эффективность нацеливания.

5. Выводы

На базе нелинейного рекуррентного анализа получена «диаграмма Пуанкаре». Продемонстрирован график распределения времен возвратов Пуанкаре в функции ε - окрестности.

Кроме того, на основании проведенных исследований был сделан вывод, что резонансные возбуждения непосредственно не регулируют поведение взаимодействующих систем, а лишь формируют механизм их самоорганизации, то есть формирование новых структур.

Литература

1. Математическая энциклопедия. М.: 1984, т.4., С. 750-751.
2. Лоскутов А.Ю. Проблемы нелинейной динамики II. Подавление хаоса и управление динамическими системами. Вестник Моск. Ун-та. Серия 3. Физика. Астрономия. №3. 2001. – с. 3-21.

3. Шарыпов О.В, Детерминированный хаос и случайность. http// filosof.historic.ru/books/item/ f00/soo/z0000242T.
4. Олемской А.И. Теория стохастических систем с сингулярным мультипликативным шумом. УФН. Том 168, №3, 1998. – с. 287-321.
5. Hadyn N., J. Luevano, G. Mantica, S. Vpienti. Multifractal properties of return time statistics //Phys. Rev. Lett. 2002, vol. 88, P. 224502.
6. B.B. Mandelbrot, Fractals and Multifractals: Noise, Turbulence and Galaxies, Selects Vol. 1 (Springer – Verlag, New York, 19-89); A. Bunde, S. Havlin (Eds.), Fractals in Science (Springer, Berlin, 1994).
7. T. Tel, Fractals, multifractals, and thermodynamics. //Z. Naturforsh. 1988. Vol. 43a, P. 1154; T.C. Halsey, M.H. Jensen, L.P.Kadanoff, I. Procaccia, B.I. Shraiman, Fractal measures and their singularities: the characterization of strange sets. //Phys. Rev. A. 1986. Vol. 33, P. 1141.
8. Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Турбулентный хаос. Современная математика и ее приложения. Т. 64. 2009. – с. 39-53.
9. Владимирский Э.И., Исмайлов Б.И. Нелинейный рекуррентный анализ как математическая модель управления хаотическими процессами.// Информационные технологии, 2011, №5, (177). с. 42-45.
10. Афраймович В., Угальде Э., Уриас Х. Фрактальные размерности для времен возвращения Пуанкаре. М.- Ижевск: НИИ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский ин-т компьютерных исследований. 2011. – 292.
11. Selçuk Emiroglu and Yilmaz Uyarogly. Control of Rabinovich chaotic system based an passive controlş Scientific Research and Essaysç Vol. 5(21). 2010. – pp. 3298-3305.
12. Олемской А.И., Борисюк В.Н., Шудо И.А, Мультифрактальный анализ временных рядов. //Вiсnik СумДУ. Серія «Фізіka, математика, механіkа». №2, 2008. –с. 70-81.
13. Дьяконов В., Круглов В. Математические расширения MATLAB. Специальный справочник. – СПб.: Питер, 2001. – 480 с.
14. Владимирский Э.И., Исмайлов Б.И. Синхронизация в управлении хаотическими системами.//Информационные технологии, №1 (185), 2012. – с. 16-19.
15. Владимирский Э.И., Тагиев Ф.К. Синергетический подход к формированию интегральных размерностей в интеллектуальных информационно – измерительных системах. Информационные технологии №6 (166). 2010. – с. 62-57.

Abstract

Nowadays there exists an urgent problem of analysis and forecasting of a great number of heterogeneous interacting information flows in complex structures.

Information interactions are of dual nature of impact on the system and its environment. On the one hand, they act as a regulation mechanism, making order in the system structure, decreasing its complexity, and on the other hand, they lead to the cloning of information objects.

In the evolution of an open system the increase of information flows and objects complicates the information component that in turn causes an increase of the chaotic processes, which transfer the system into a state of dynamic chaos.

Reflecting the above analysis of the interaction of chaotic and stochastic systems, it appears that the dynamic chaos like a random process requires a statistical description.

Dynamical systems with complex trajectories can be described in terms of the geometry of limit sets in the phase space, as well as the evolution of the phase trajectories in time. One of the fundamental peculiarities of the temporal dynamics of systems is the so called Poincare reversion. Poincare reversion means that any trajectory, starting from a point x0 will endlessly pass in time as close as possible to the initial state. Such movements in dynamic systems Poincare called the Poisson stability. The examples of such systems are the systems implementing the conditions of the attractor

Keywords: *chaotic and stochastic systems, chaos-like structures, Poincare reverse times*