Розглянута методика вирішення нечітких багатоіндексних неленійних транспортних задач. Сформульована теорема, на якій базуються технології одержання рішення. Описані відповідні обчислювальні процедури

Ключові слова: нечітка модель, нелінійна багатоіндексна задача, декомпозиційний алгоритм, функція приналежності

Рассмотрена нечеткая модель решения нелинейных многоиндексных транспортных задач. Сформулирована теорема, на которой базируются технологии получения решения. Описаны соответствующие вычислительные процедуры

Ключевые слова: нечеткая модель, нелинейная многоиндексная задача, декомпозиционный алгоритм, функция принадлежности

УДК 519.618

НЕЧЕТКАЯ МОДЕЛЬ НЕЛИНЕЙНОЙ МНОГОИНДЕКСНОЙ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

Л.Г. Раскин
Доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой*
Контактный тел.: (057) 707-66-28
О.В. Серая
Доктор технических наук, доцент*
Контактный тел.: (057) 707-66-28
E-mail: chime@bk.ru
*Кафедра компьютерного мониторинга и логистики**
О.И. Дунаевская
Ассистент
Кафедра компьютерной математики и математического моделирования**
Контактный тел.: (057) 707-63-51
E-mail: dunaevskayaolga@mail.ru
**Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»
ул. Фрунзе, 21, г. Харьков, Украина, 61002

1. Введение

Традиционные задачи транспортной логистики формулируются в терминах линейного программирования. При этом используется предположение, что стоимость перевозки продукта по любому маршруту пропорциональна его объему. На практике часто такое предположение не выполняется. Целевая функция задачи при этом становится нелинейной. Задача усложняется, если при постановке задачи необходимо учитывать, что стоимость перевозки зависит не только от пары «поставщик-потребитель», но также от типа перевозимого груза, типа используемых транспортных средств и т.д. Возникающие при этом задачи становятся многоиндексными.

Общая формулировка q-индексной нелинейной транспортной задачи такова: найти набор $X=\left\{x_{i_1 i_2 \dots i_q}\right\}$, минимизирующий целевую функцию

$$\sum_{i_1=1}^{n_1}\sum_{i_2=1}^{n_2}\dots\sum_{i_q=1}^{n_q}\phi_{i_1 i_2 \dots i_q}\left(x_{i_1 i_2 \dots i_q}\right) \qquad (1)$$

и удовлетворяющий ограничениям

$$\sum_{i_2=1}^{n_2}\sum_{i_3=1}^{n_3}\dots\sum_{i_q=1}^{n_q}x_{i_1 i_2 \dots i_q}=a_{i_1},\ i_1=1,2,\dots,n_1, \qquad (2)$$

$$\sum_{i_1=1}^{n_1}\sum_{i_3=1}^{n_3}\dots\sum_{i_q=1}^{n_q}x_{i_1 i_2 \dots i_q}=a_{i_2},\ i_2=1,2,\dots,n_2, \qquad (3)$$

$$\sum_{i_1=1}^{n_1}\sum_{i_2=1}^{n_2}\dots\sum_{i_{q-1}=1}^{n_{q-1}}x_{i_1 i_2 \dots i_q}=a_{i_q},\ i_q=1,2,\dots,n_q, \qquad (4)$$

$$\sum_{i_1=1}^{n_1}a_{i_1}=\sum_{i_2=1}^{n_2}a_{i_2}=\dots=\sum_{i_q=1}^{n_q}a_{i_q}, \qquad (5)$$

$$x_{i_1 i_2 \dots i_q}\ge 0,\ i_s=1,2,\dots,n_s,\ s=1,2,\dots,q.$$

Понятно, что традиционные методы решения транспортных задач линейного программирования непригодны для решения задачи (1) – (5).

2. Постановка задачи

В [1] предложена методика решения задачи (1) – (5), которая основана на следующей теореме.

Теорема

Для того, чтобы набор $X^*=\left\{x^*_{i_1 i_2 \dots i_q}\right\}$ был решением задачи (1)-(5) необходимо и достаточно, чтобы этот набор, удовлетворяя (2)-(5), минимизировал

$$\phi^{(1)}(X)=\sum_{i_2=1}^{n_2}\dots\sum_{i_q=1}^{n_q}\phi_{i_1 i_2 \dots i_q}\left(x_{i_1 i_2 \dots i_q}\right),$$

т.е.

$$\sum_{i_2=1}^{n_2}\dots\sum_{i_q=1}^{n_q}\phi_{i_1 i_2 \dots i_q}\left(x^*_{i_1 i_2 \dots i_q}\right)=\min_X\left\{\sum_{i_2=1}^{n_2}\dots\sum_{i_q=1}^{n_q}\phi_{i_1 i_2 \dots i_q}\left(x_{i_1 i_2 \dots i_q}\right)\right\},$$

для всех $i_1=1,2,\dots,n_1$. (6)

Использование этой теоремы обеспечивает декомпозицию исходной задачи.

При этом, в частности, двухиндексная задача: найти набор $X=(x_1,x_2)$, минимизирующий

$$\Phi(X)=\sum_{i_1=1}^{n_1}\sum_{i_2=1}^{n_2}\phi_{i_1i_2}\left(x_{i_1i_2}\right) \tag{7}$$

и удовлетворяющий ограничениям

$$\sum_{i_2=1}^{n_2}x_{i_1i_2}=a_{i_1},\ i_1=1,2,...,n_1, \tag{8}$$

$$\sum_{i_1=1}^{n_1}x_{i_1i_2}=b_{i_2},\ i_2=1,2,...,n_2, \tag{9}$$

$$x_{i_1i_2}\ge 0,\ i_1=1,2,...,n_1,\ i_2=1,2,...,n_2, \tag{10}$$

сводится к решению на первом шаге n_1 одноиндексных задач вида: при фиксированном i_1 найти набор $\{x_{i_1i_2}\}$, минимизирующий

$$L\left(x_{i_1i_2}\right)=\sum_{i_2=1}^{n_2}\phi_{i_1i_2}\left(x_{i_1i_2}\right) \tag{11}$$

и удовлетворяющий ограничениям

$$\sum_{i_2=1}^{n_2}x_{i_1i_2}=a_{i_1},\ x_{i_1i_2}\ge 0,\ i_1=1,2,...,n_1,\ i_2=1,2,...,n_2. \tag{12}$$

Если при этом функции $\phi_{i_1i_2}\left(x_{i_1i_2}\right)$ выпуклы вверх, то каждая из этих задач легко решается. Например, если $\phi_{i_1i_2}=c_{i_1i_2}x_{i_1i_2}^2$, то каждая из одноиндексных задач будет иметь вид: найти набор $\{x_{i_1i_2}\}$, минимизирующий

$$L\left(x_{i_1i_2}\right)=\sum_{i_2=1}^{n_2}c_{i_1i_2}x_{i_1i_2}^2$$

и удовлетворяющий ограничениям

$$\sum_{i_2=1}^{n_2}x_{i_1i_2}=a_{i_1},\ x_{i_1i_2}\ge 0,\ i_1=1,2,...,n_1,\ i_2=1,2,...,n_2.$$

Решим эту задачу методом неопределенных множителей Лагранжа. Функция Лагранжа имеет вид:

$$\Phi\left(x_{i_1i_2}\right)=\sum_{i_2=1}^{n_2}c_{i_1i_2}x_{i_1i_2}^2-\lambda\left(\sum_{i_2=1}^{n_2}x_{i_1i_2}-a_{i_1}\right).$$

Далее

$$\frac{d\Phi\left(x_{i_1i_2}\right)}{dx_{i_1i_2}}=2c_{i_1i_2}x_{i_1i_2}-\lambda=0,\ i_2=1,2,...,n_2.$$

Отсюда

$$x_{i_1i_2}=\frac{\lambda}{2c_{i_1i_2}}.$$

Тогда, так как

$$\sum_{i_2=1}^{n_2}x_{i_1i_2}=\frac{\lambda}{2}\sum_{i_2=1}^{n_2}\frac{1}{c_{i_1i_2}}=a_{i_1},$$

то

$$\frac{\lambda}{2}=\frac{a_{i_1}}{\sum_{i_2=1}^{n_2}\frac{1}{c_{i_1i_2}}}$$

и

$$x_{i_1i_2}=\frac{a_{i_1}}{\sum_{i_2=1}^{n_2}\frac{1}{c_{i_1i_2}}}\cdot\frac{1}{c_{i_1i_2}}. \tag{13}$$

Если при этом для всех i_2, $i_2=1,2,...,n_2$, выполняются равенства

$$\sum_{i_1=1}^{n_1}\frac{a_{i_1}\frac{1}{c_{i_1i_2}}}{\sum_{i_2=1}^{n_2}\frac{1}{c_{i_1i_2}}}=b_{i_2},$$

то решение задачи получено. В противном случае, на втором шаге декомпозиции определяемый (13) набор $\{x_{i_1i_2}\}$ должен корректироваться с использованием процедуры, предложенной в [2].

Естественные трудности возникают, если какие-либо параметры этих целевых функций – нечеткие величины.

3. Основные результаты

Рассмотрим возможные подходы решению таких задач. Пусть целевая функция каждой из одноиндексных задач (11) – (12) имеет вид

$$F(X,\Theta)=\sum_{i=1}^{n}\phi_i\left(x_i,\theta_i\right), \tag{14}$$

где θ_i - нечеткий параметр, $i=1,2,...,n$, с функцией принадлежности $\mu_i(\theta_i)$. При этом получена задача математического программирования с нечетко заданными параметрами: найти набор $X=(x_1,x_2,...,x_n)$, минимизирующий целевую функцию (14) и удовлетворяющий ограничениям (12) с учетом нечетких параметров θ_i, $i=1,2,...,n$. Как показано в [3, 4] эта задача может быть сведена к следующей четкой задаче математического программирования: найти наборы $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ и $\Theta=(\theta_1,\theta_2,...,\theta_n)$, минимизирующие (14), удовлетворяющие ограничениям (12) и кроме того, ограничениям

$$\mu_i(\theta_i)\ge\alpha,\ i=1,2,...,n, \tag{15}$$

где α - некоторым образом выбранное значение функций принадлежности нечетких параметров задачи.

Пусть $\mu\left(F\left(x^*,\theta^*\right)\right)$ - функция принадлежности нечеткого значения целевой функции (14). Тогда естественно считать, что для решения $\left(x^*,\theta^*\right)$ задачи (12), (14), (15) имеет место $\mu\left(F\left(x^*,\theta^*\right)\right)\ge\alpha$. Этот подход традиционно используется при решении нечетких задач математического программирования, однако он не безупречен. Во-первых, размерность задачи (12), (14), (15) вдвое выше размерности исходной задачи. Во-вторых, уровень сложности полученной задачи выше исходного.

Действительно, пусть, в простейшем случае, целевая функция (14) линейна и имеет вид $F(x,\theta)=\sum_{j=1}^{n}\theta_jx_j$. При этом, задача (12), (14), (15) становится квадратической задачей математического программирования. В-третьих, сформулированная задача решается для некоторого одинакового для всех значения α уровня принадлежности нечетких параметров θ_i, $i=1,2,...,n$, выбор которого влияет на получаемое решение непредсказуемым образом.

Эти недостатки частично устраняются при использовании другого подхода к решению задачи [5]. Пусть $\mu(F(x,\theta))$ - функция принадлежности нечеткого значения целевой функции (14). Выберем некоторое значение $\alpha\in(0,1)$ уровня принадлежности $\mu(F(x,\theta))$ и решим уравнение

$$\mu(F(x,\theta))=\mu(y)=\alpha .$$

Поскольку любая функция принадлежности – выпуклая вверх функция, то уравнение имеет два корня $(y_1(x),y_2(x))=(\mu_1^{-1}(\alpha),\mu_2^{-1}(\alpha))$. Выберем больший из них - $y_2(x)$ и сформулируем задачу отыскания набора X^*, минимизирующего $y_2(x)$ и удовлетворяющего (12). Цель этой операции понятна: в результате решения сформулированной задачи тело неопределенности, соответствующее функции принадлежности целевой функции задачи, максимально сместится влево, в область меньших значений целевой функции задачи.

Отметим, однако, что и здесь остаются неясные вопросы: как выбирать уровень α, какой из двух корней $y_1(x)$ или $y_2(x)$ использовать в задаче минимизации?

Стремление избавиться от обязывающего выбора значения α приводит к следующему варианту решения задачи (12), (14). С использованием функций принадлежности $\mu_i(\theta_i)$ нечетких параметров θ_i формируем функции принадлежности нечетких значений слагаемых целевой функции $F(X,\Theta)$, зависящие от X. Теперь положим значения нечетких параметров θ_i равными их модальным значениям $\theta_i^{(0)}$, $i=1,2,...,n$, и решим задачу отыскания набора X, минимизирующего

$$F(X,\Theta^{(0)})=\sum_{i=1}^{n}\phi_i\left(x_i,\theta_i^{(0)}\right) \qquad (16)$$

и удовлетворяющего ограничению (12).

Пусть $X^{(0)}$ - решение этой задачи. Тогда в качестве решения задачи (12), (14) примем набор X, минимизирующий составной критерий

$$J=\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\mu\left(\phi_i(x_i,\theta_i)\right)d\theta_i+\left(X-X^{(0)}\right)^T\left(X-X^{(0)}\right).$$

Смысл введенного критерия понятен. Первое слагаемое определяет суммарную площадь функций принадлежности слагаемых целевой функции задачи, зависящую от X и которую желательно минимизировать, а второе – характеризует отклонение искомого решения от модального.

Таким образом, нечеткие задачи первого шага декомпозиционной процедуры решены. Далее, на втором шаге, в случае необходимости осуществляется коррекция полученного решения.

4. Выводы

Предложенный метод решения нечетких нелинейных транспортных задач основан на многошаговой декомпозиционной процедуре, на каждом шаге которой решаются задачи меньшей размерности. Особенности процедуры иллюстрируются на частном случае двухиндексной задачи, когда предложенный метод становится двухшаговым. При этом нечеткость параметров целевой функции задачи учитывается на первом шаге декомпозиционной процедуры.

Литература

1. Серая, О.В. Многоиндексные нелинейные транспортные задачи [Текст] / О.В. Серая, О.И. Дунаевская // Інформаційно-керуючі системи на залізничному транспорті. Харків: ІКСЗТ, 2009. - №5. – С.25-30.
2. Раскин, Л.Г. Анализ сложных систем и элементы теории оптимального управления [Текст] / Л.Г. Раскин. – М.: Сов. Радио, 1976.-344с.
3. Орловский, С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации [Текст] / С.А. Орловский. – М.: Наука, 1981. – 206с.
4. Негойцэ, К. Применение теории систем к проблемам управления: Пер. с англ. [Текст] / К. Негойцэ. – М.: Мир, 1981. – 180с.
5. Раскин, Л.Г. Нечеткая математика [Текст] / Л.Г. Раскин, О.В. Серая. – Х.: Парус, 2008. – 352с.

Abstract

Traditional problems of transport logistics are formulated in terms of linear programming. In this case, the assumption is that the cost of product transportation at any route is proportional to its volume. In practice, this assumption often is not fulfilled. The objective of the problem then becomes nonlinear. The problem becomes more complicated if it is necessary to take into account that the cost of transportation depends not only on "supplier-consumer", but also on the type of cargo, type of vehicles used, etc. The problems that arise in this case become multi-index ones. The article includes a theorem, on which the technology for solving such problems is based. We suggested a method for solving nonlinear fuzzy transportation problems, which is based on a multi-stage decomposition procedure, at each stage of which the problems of smaller dimension are solved. The peculiarities of the procedure are illustrated on two-index problem when the suggested method becomes a two-step procedure. Thus, the blurring of parameters of the objective of the problem is taken into account at the first stage of the decomposition procedure

Keywords: *fuzzy model, nonlinear multi-index problem, decomposition algorithm, membership function*