УДК 519.681

ПОСТРОЕНИЕ МНОГОФАКТОРНОГО УРАВНЕНИЯ РЕГРЕССИИ МЕТОДОМ АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ В УСЛОВИЯХ НЕЧЕТКИХ ВХОДНЫХ ДАННЫХ

Предложен метод расчета параметров многофакторного уравнения регрессии по результатам экспертного оценивания попарных сравнений значимости факторов. Рассмотрен случай, когда результаты сравнения представлены нечеткими числами

О.В. Серая
Кандидат технических наук, доцент
Кафедра экономической кибернетики и маркетингового менеджмента
Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»
Контактный тел.: (057) 707-66-28
e-mail:Seraya@kpi.kharkov.ua

1. Введение

Во многих практических ситуациях традиционные технологии построения многофакторных регрессий по результатам статистической обработки реальных данных неосуществимы ввиду недостаточности числа опытов. В этих случаях чрезвычайно полезным оказывается предложенный Т.Саати [1] метод анализа иерархий, основанный на экспертном оценивании попарных сравнений важности факторов, влияющих на значение функции отклика. Существо метода состоит в следующем. Предполагается, что группа экспертов формирует матрицу $A=(a_{ij})$, где a_{ij} - коэффициент, показывающий во сколько раз i - й фактор сильнее влияет на результат, нежели j-й. Иными словами, если w_i - вес i - го фактора и n - факторное уравнение регрессии имеет вид

$$v = w_1x_1 + w_2x_2 + \ldots + w_nx_n, \quad (1)$$

то

$$a_{ij} = \frac{w_i}{w_j}, \; i=1,2,...,n, \; j=1,2,...,n. \quad (2)$$

При этом из (2) следует, что $a_{ji} = \frac{w_j}{w_i} = \frac{1}{a_{ij}}$, то есть матрица A - обратносимметричная. Кроме того, предполагается, что эта матрица транзитивна, то есть

$$a_{ij}a_{jk} = a_{ik}, \; i=1,2,...,n, \; j=1,2,...,n, \; k=1,2,...,n. \quad (3)$$

Такую обратносимметричную и транзитивную матрицу называют согласованной.

Далее, так как из (2)

$$a_{ij}w_j\frac{1}{w_i} = 1, \; i=1,2,...,n, \; j=1,2,...,n, \quad (4)$$

то, суммируя справа и слева по j, получим

$$\frac{1}{w_i}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}w_j = n, \; i=1,2,...,n,$$

откуда

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}w_j = nw_i, \; i=1,2,...,n. \quad (5)$$

Совокупность соотношений (5) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $w_1, w_2, ..., w_n$. Эта система в матричной форме имеет вид

$$AW = nW, \quad (6)$$

где

$$W^T = (w_1, w_2, ..., w_n).$$

Из (6) следует, что искомый вектор W есть собственный вектор согласованной матрицы A, соответствующий собственному числу этой матрицы, равному

n, который отыскивается стандартным образом путем решения спектральной проблемы теории мариц [2].

В [3] показано, что в данном случае этот вектор может быть получен гораздо более простым путем. Запишем матрицу A следующим образом

$$A=\left(a_{ij}\right)=\begin{pmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \dots & \frac{w_1}{w_B} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \dots & \frac{w_2}{w_B} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \dots & \frac{w_n}{w_n} \end{pmatrix}.$$

Вычислим суммы элементов этой матрицы в каждой из строк. При этом для i - й строки

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\frac{w_i}{w_j}=w_i\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{w_j}=cw_i,\ i=1,2,...,n. \quad (7)$$

Таким образом, компоненты искомого собственного вектора W с точностью до константы могут быть вычислены непосредственно по элементам матрицы A. Неизвестную константу c определим, используя естественное требование к нормировке вектора W, в соответствии с которым

$$\sum_{i=1}^{n} w_i=1. \quad (8)$$

Суммируя (7) слева и справа по i, с учетом (8), получим

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=c\sum_{i=1}^{n} w_i=c.$$

Тогда

$$w_i=\frac{1}{c}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=\frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}},\ i=1,2,...,n. \quad (9)$$

Заметим, что полученный результат может быть практически использован только в случае, если матрица A является согласованной. На практике эта матрица, содержащая полученные экспертами оценки попарных сравнений значимости факторов, является обратносимметричной, но не удовлетворяет (3). В связи с этим в [3] предложена процедура коррекции реальной матрицы A, обспечивающая итерационное ее согласование. При этом на очередной, например, $(s+1)$-й итерации выполняется пересчет матрицы $\left(a_{ij}^{(s)}\right)$ по формуле

$$a_{ij}^{(s+1)}=\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(s)}a_{kj}^{(s)}}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_{ik}^{(s)}a_{kj}^{(s)}}}\right)^{\frac{1}{2}},\ i=1,2,...,n,\ j=1,2,...,n,\ s=1,2,... \quad (10)$$

Новые трудности возникают в результате того, что элементы матрицы A попарных сравнений не могут быть оценены точно. Более реалистичными будут нечеткие оценки чисел a_{ij}. Задача получения компонентов вектора уравнения регрессии (1) с использованием метода анализа иерархий по нечетким результатам попарных сравнений ранее даже не рассматривалась.

2. Постановка задачи

Предположим, что результаты a_{ij} попарных сравнений значимости факторов $x_1,x_2,...,x_n$ в уравнении регрессии (1) оценены нечеткими числами с функциями принадлежности $\mu_{ij}\left(a_{ij}\right)$, $i=1,2,...,n$, $j=1,2,...,n$. Пусть, для простоты, нечеткие числа имеют треугольную функцию принадлежности, то есть

$$\mu_{ij}\left(a_{ij}\right)=\begin{cases} 0, & a_{ij}<a_{ij}^{(a)}, \\ \frac{a_{ij}-a_{ij}^{(a)}}{a_{ij}^{(b)}-a_{ij}^{(a)}}, & a_{ij}^{(a)}\le a_{ij}<a_{ij}^{(b)}, \\ \frac{a_{ij}^{(c)}-a_{ij}}{a_{ij}^{(c)}-a_{ij}^{(b)}}, & a_{ij}^{(b)}\le a_{ij}\le a_{ij}^{(c)}, \\ 0, & a_{ij}>a_{ij}^{(c)}. \end{cases} \quad (11)$$

Понятно, что если исходные данные задачи – нечеткие числа, то и результаты ее решения также являются нечеткими. Поставим задачу отыскания функций принадлежности нечетких параметров уравнения регрессии (1) для случая, когда элементы матрицы $A=\left(a_{ij}\right)$ попарных сравнений – нечеткие числа с функциями принадлежности (11).

3. Основные результаты

В соответствии с постановкой задачи исходные данные могут быть представлены в виде трех матриц

$$A^{(a)}=\left(a_{ij}^{(a)}\right),\ A^{(b)}=\left(a_{ij}^{(b)}\right),\ A^{(c)}=\left(a_{ij}^{(c)}\right).$$

Все эти матрицы, полученные по результатам экспертного оценивания, обратносимметричны, но не транзитивны. Для каждой из них независимо, используя процедуру (10), осуществим коррекцию, в результате чего получим согласованные матрицы

$$\hat{A}^{(a)}=\left(\hat{a}_{ij}^{(a)}\right),\ \hat{A}^{(b)}=\left(\hat{a}_{ij}^{(b)}\right),\ \hat{A}^{(c)}=\left(\hat{a}_{ij}^{(c)}\right).$$

При этом функции принадлежности нечетких чисел a_{ij} примут вид

$$\mu_{ij}\left(a_{ij}\right)=\begin{cases} 0, & a_{ij}<\hat{a}_{ij}^{(a)}, \\ \frac{a_{ij}-\hat{a}_{ij}^{(a)}}{\hat{a}_{ij}^{(b)}-\hat{a}_{ij}^{(a)}}, & \hat{a}_{ij}^{(a)}\le a_{ij}<\hat{a}_{ij}^{(b)}, \\ \frac{\hat{a}_{ij}^{(c)}-a_{ij}}{\hat{a}_{ij}^{(c)}-\hat{a}_{ij}^{(b)}}, & \hat{a}_{ij}^{(b)}\le a_{ij}\le \hat{a}_{ij}^{(c)}, \\ 0, & a_{ij}>\hat{a}_{ij}^{(c)}. \end{cases} \quad (12)$$

Найдем теперь функцию принадлежности нечетких чисел $w_i=\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right)\Big/\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$. Для приближенного описания этих функций принадлежности используем правила выполнения арифметических операций над треугольными числами, введенные в [4, 5]. В соответствии с этими правилами для двух треугольных нечетких чисел x_1 и x_2 с функциями принадлежности

$$\mu(x_i)=\begin{cases}0, & x_i<a_i,\\ \dfrac{x_i-a_i}{b_i-a_i}, & a_i\le x_i<b_i,\\ \dfrac{c_i-x_i}{c_i-b_i}, & b_i\le x_i\le c_i,\\ 0, & x_i>c_i, \quad i=1,2,\end{cases} \tag{13}$$

функция принадлежности их суммы $y=x_1+x_2$ имеет вид

$$\mu(y)=\begin{cases}0, & y<a_y,\\ \dfrac{y-a_y}{b_y-a_y}, & a_y\le y<b_y,\\ \dfrac{c_y-y}{c_y-b_y}, & b_y\le y\le c_y,\\ 0, & y>c_y,\end{cases} \tag{14}$$

где $a_y=a_1+a_2$, $b_y=b_1+b_2$, $c_y=c_1+c_2$, (15)

а функция принадлежности отношения $z=x_1/x_2$ имеет вид

$$\mu(z)=\begin{cases}0, & z<a_z,\\ \dfrac{z-a_z}{b_z-a_z}, & a_z\le z<b_z,\\ \dfrac{c_z-z}{c_z-b_z}, & b_z\le z\le c_z,\\ 0, & z>c_z,\end{cases} \tag{16}$$

где $b_z=\dfrac{b_1}{b_2}$,

$$\begin{aligned}a_z&=\frac{b_1}{b_2}-\frac{b_1(c_2-b_2)+b_2(b_1-a_1)}{b_2^2}=\\&=\frac{1}{b_2^2}\left(b_1b_2-b_1c_2+b_1b_2-b_1b_2+b_2a_1\right)=\\&=\left(b_1b_2-b_1c_2+b_2a_1\right)/b_2^2,\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}c_z&=\frac{b_1}{b_2}+\frac{b_1(b_2-a_2)+b_2(c_1-b_1)}{b_2^2}=\\&=\frac{1}{b_2^2}\left(b_1b_2+b_1b_2-b_1a_2+b_2c_1-b_1b_2\right)=\\&=\left(b_1b_2-b_1a_2+b_2c_1\right)/b_2^2.\end{aligned}$$

Тогда функция принадлежности нечетких чисел $a_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}$, с учетом (12) – (15), имеет вид

$$\mu(a_{ij})=\begin{cases}0, & a_i<\hat{a}_{i,\Sigma},\\ \dfrac{a_i-\hat{a}_{i,\Sigma}}{\hat{b}_{i,\Sigma}-\hat{a}_{i,\Sigma}}, & \hat{a}_{i,\Sigma}\le a_i<\hat{b}_{i,\Sigma},\\ \dfrac{\hat{c}_{i,\Sigma}-a_i}{\hat{c}_{i,\Sigma}-\hat{b}_{i,\Sigma}}, & \hat{b}_{i,\Sigma}\le a_i\le\hat{c}_{i,\Sigma},\\ 0, & a_i>\hat{c}_{i,\Sigma},\end{cases} \tag{18}$$

где

$$\hat{a}_{i,\Sigma}=\sum_{j=1}^{n}\hat{a}_{ij}^{(a)},\quad \hat{b}_{i,\Sigma}=\sum_{j=1}^{n}\hat{a}_{ij}^{(b)},\quad \hat{c}_{i,\Sigma}=\sum_{j=1}^{n}\hat{a}_{ij}^{(c)},\quad i=1,2,\ldots,n. \tag{19}$$

Далее функция принадлежности нечеткого числа $a_\Sigma=\sum_{j=1}^{n}a_{i,\Sigma}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}$ имеет вид

$$\mu(a_\Sigma)=\begin{cases}0, & a_\Sigma<\hat{a}_\Sigma,\\ \dfrac{a_\Sigma-\hat{a}_\Sigma}{\hat{b}_\Sigma-\hat{a}_\Sigma}, & \hat{a}_\Sigma\le a_\Sigma<\hat{b}_\Sigma,\\ \dfrac{\hat{c}_\Sigma-a_\Sigma}{\hat{c}_\Sigma-\hat{b}_\Sigma}, & \hat{b}_\Sigma\le a_\Sigma\le\hat{c}_\Sigma,\\ 0, & a_\Sigma>\hat{c}_\Sigma,\end{cases} \tag{20}$$

где $\hat{a}_\Sigma=\sum_{j=1}^{n}\hat{a}_{i,\Sigma}$, $\hat{b}_\Sigma=\sum_{j=1}^{n}\hat{b}_{i,\Sigma}$, $\hat{c}_{i,\Sigma}=\sum_{j=1}^{n}\hat{c}_{i,\Sigma}$. (21)

Наконец, функции принадлежности нечетких чисел $w_i=\dfrac{a_i}{a_\Sigma}$, с учетом (16), (17) имеют вид

$$\mu(w_i)=\begin{cases}0, & w_i<a_{i,\Sigma},\\ \dfrac{w_i-a_{i,\Sigma}}{b_{i,\Sigma}-a_{i,\Sigma}}, & a_{i,\Sigma}\le w_i<b_{i,\Sigma},\\ \dfrac{c_{i,\Sigma}-w_i}{c_{i,\Sigma}-b_{i,\Sigma}}, & b_{i,\Sigma}\le w_i\le c_{i,\Sigma},\\ 0, & w_i>c_{i,\Sigma},\end{cases} \tag{22}$$

где $b_{i,w}=\dfrac{\hat{b}_{i,\Sigma}}{\hat{b}_\Sigma}$, $a_{i,w}=\dfrac{\hat{b}_{i,\Sigma}\hat{b}_\Sigma-\hat{b}_{i,\Sigma}\hat{c}_\Sigma+\hat{b}_\Sigma\hat{a}_{i,\Sigma}}{\hat{b}_\Sigma^2}$,

$$c_{i,w}=\frac{\hat{b}_{i,\Sigma}\hat{b}_\Sigma-\hat{b}_{i,\Sigma}\hat{a}_\Sigma+\hat{b}_\Sigma\hat{c}_{i,\Sigma}}{\hat{b}_\Sigma^2}, \tag{23}$$

$i=1,2,\ldots,n$.

Полученные соотношения (22) – (23) позволяют стандартным образом найти функцию принадлежности результирующего фактора v в уравнении регрессии (1) для произвольного набора влияющих факторов $x_1,x_2,\ldots,x_n$.

3. Выводы

Таким образом, предложен метод расчета функций принадлежности нечетких значений коэффициентов многофакторного уравнения регрессии по нечетким результатам попарных сравнений значимости факторов, влияющих на значение функции отклика, отображающей результирующий фактор. Метод предполагает предварительное использование процедуры согласования результатов экспериментального оценивания относительной важности факторов. Простота полученных соотношений обеспечивает возможность их непосредственного применения.

Литература

1. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий: Пер. с англ. / Т. Саати. – М.: «Радио и связь», 1984. – 316с.
2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1967. – 575 с.
3. Раскин Л.Г. Формирование скалярного критерия предпочтения по результатам попарных сравнений объектов. // Л.Г. Раскин, О.В. Серая. Вісник НТУ «ХПІ». – Х.: НТУ «ХПИ», 2003. - №6. -с. 63 -68.
4. Дюбуа Д. Теория возможностей. Приложение к представлению знаний в информатике: Пер. с франц. / Д. Дюбуа, А. Прад. – М.: «Радио и связь», 1990. – 286с.
5. Леоненков А.В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzy TECH. / А.В. Леоненков. – СПб.: БХВ – Петербург, 2003. – 736с.

УДК 656.073

ВИКОРИСТАННЯ ПРИНЦИПІВ МОДЕЛІ «JUST-IN-TIME» ПРИ ОРГАНІЗАЦІЇ МІЖМІСЬКИХ АВТОМОБІЛЬНИХ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

В.М. Нефьодов
Доцент
Кафедра транспортних технологій
Харківський національний автомобільно-дорожний університет
вул. Петровського, 25, м. Харків, Україна, 61200
Контактний тел.: (057) 707-37-20
e-mail: ds@mail.ru

М.В. Сажко

Розглянуто дотримання термінів виконання замовлень на ефективність перевезень мінеральних добрив в міжміському сполученні. Розглянуті в статті залежності можуть бути використанні при плануванні перевезень вантажів в міжміському сполученні з прибуттям рухомого складу до вантажоодержувача точно в термін

1. Вступ

У цей час у керівників автотранспортних фірм при організації міжміських перевезень виникають труднощі, пов'язані з тим, що, як правило, замовники ставлять вимоги на доставку вантажів по «часових вікнах», тобто вантаж повинен бути доставлений не раніше і не пізніше встановленого строку.

Якщо вантаж буде доставлений раніше встановленого строку, то автомобіль буде простоювати і внаслідок цього перевізник втратить можливий прибуток при використанні цього автомобіля для виконання іншого замовлення.

Якщо вантаж буде доставлений пізніше встановленого строку, то фірма зазнає збитків через штрафи. Виходом із цієї ситуації можуть послужити принципи