рования параметрической надежности измерительно-вычислительных комплексов.

2. Разработана модель прогнозирования дрейфа параметров измерительно-вычислительных комплексов на основе теории цепей Маркова с дискретными состояниями и непрерывным временем. Применение модели позволяет учитывать несколько работоспособных состояний с различными уровнями эффективности функционирования, определяемыми вероятностью безотказности параметров измерительно-вычислительных комплексов и степенью приближения их значений к верхней границе поля допуска.

Литература

1. Чернов В.Ю., Никитин В.Г., Иванов Ю.П. Надежность авиационных приборов и измерительно-вычислительных комплексов: Учеб. пособие. - СПб.: СПбГУАП, 2004. - 96 с.
2. Крауз С.В., Синдеев И.М., Захаров А.В. Основы технической эксплуатации оборудования летательных аппаратов. - М.: МВВИА им. Жуковского, 1964. - 331 с.
3. Шубинский И.Б. Николаев В.И., Колганов С.К., Заяц А.М. Активная защита от отказов управляющих модульных вычислительных систем. - СПб.: Наука, 1993. - 281 с.
4. Надежность автоматизированных систем управления: Учеб. пособие для вузов / И.О. Автомян, А.С. Вайрадян, Ю.П. Руднев, Ю.Н. Федосеев, Я.А. Хетагуров. - М.: Высш. шк., 1979. - 287 с.
5. Силин В.Б., Заковряшин А.И. Автоматическое прогнозирование состояния аппаратуры управления и наблюдения. - М.: Энергия, 1973. - 336 с.
6. Кемени Дж. И Снелл Дж. Счетные цепи Маркова. - М.: Наука, 1987. - 416 с.
7. Протасов К.В. Статистический анализ экспериментальных данных. - М.: Мир, 2005. - 142 с.

УДК 621.391.24

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА МНОГО-ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СЕЛЕКТИВНЫХ СИГНАЛОВ, ПОСТРОЕННЫХ НА ОСНОВЕ СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Рассмотрены многопараметрические сигналы для случая интерполяции их спектральной плотности кубическим сплайном. Исследованы экстремальные свойства этих сигналов

И.В. Стрелковская
Кандидат физико-математических наук, доцент, декан
Факультет информационных сетей
Одесская национальная академия связи

ул. Кузнечная 1, г.Одесса, Украина, 65029
Контактный тел.: (048) 723-22-44
e-mail: dekanat_is@rambler.ru

В [1], [2] были рассмотрены многопараметрические селективные сигналы для случая интерполяции их спектральной плотности кубическим сплайном. Получено аналитическое выражение для селективных сигналов, которые зависят от параметров и найдено для них выражение полной энергии. Цель этой статьи - исследовать эти сигналы на экстремальные свойства.

Рассмотрим информационный сигнал $g(t)$, удовлетворяющий первому критерию Найквиста (условию селективности). Для него выполняется равенство [3].

$$g(kT)=\begin{cases}1 & \text{при} \quad k=0,\\ 0 & \text{при} \quad k=\pm1,\pm2,...,\end{cases} \qquad (1)$$

где T – длительность тактового интервала.

Селективным сигналам вида (1) соответствует финитный спектр, аналитическое выражение которого может быть записано следующим образом [3], [4]:

$$|G(j\omega)|=\begin{cases}UT, & |\omega|<\omega_A,\\ G_{\Delta1}(\omega), & \omega_A\le|\omega|\le\omega_C,\\ G_{\Delta2}(\omega), & \omega_C<|\omega|\le\omega_B,\\ 0, & |\omega|>\omega_B,\end{cases} \qquad (2)$$

где $U=g(0)$; $\omega_A=(1-\alpha)\omega_C$; $\omega_B=(1+\alpha)\,\omega_C$; $\omega_C=\pi/T$; $\alpha=(\omega_C-\omega_A)/\omega_C=(\omega_B-\omega_C)/\omega_C$ – коэффициент скругления спектральной плотности $(0\le\alpha\le1)$, определяющий ширину переходной области $[\omega_A,\omega_B]$; $2\Delta\omega=2\,\alpha\omega_C$ – ширина переходной области (рисунок 1).

Аналитическое выражение для спектральной плотности в переходной области $[\omega_A,\omega_B]$ получено методом интерполяции кусочно-кубическими многочленами, которые соединяют точки A, B и C.

В качестве таких многочленов использованы кубические сплайны класса C^2 (кубические сплайны дефекта 1, являющиеся дважды непрерывно дифференцируемыми функциями). Интерполяционный кубический сплайн ищем на промежутке $[\omega_C,\omega_B]$, а затем восстанавливаем во всей переходной области.

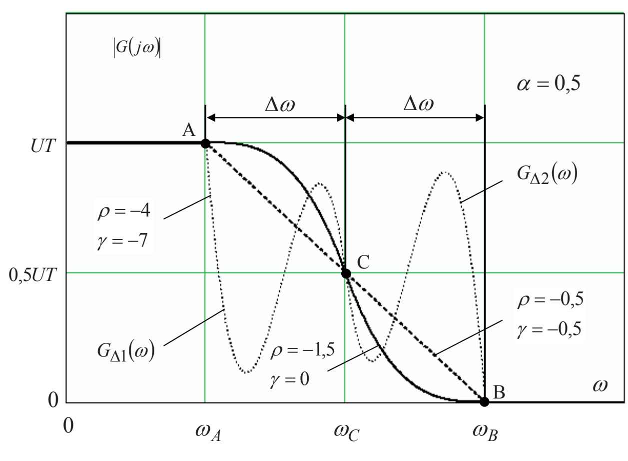

Рисунок 1. Иллюстрация аппроксимации спектральной плотности $G(j\omega)$ селективных сигналов кубическим сплайном

Согласно [2] $G_{\Delta1}(\omega)$ и $G_{\Delta2}(\omega)$ определяются выражениями

$$G_{\Delta1}(\omega)=UT-G_{\Delta2}(2\omega_C-\omega),\ \omega_A\le\omega\le\omega_C \qquad (3)$$

$$G_{\Delta2}(\omega)=0,5UT+\frac{\rho UT}{\Delta\omega}(\omega-\omega_C)-\frac{(1,5+2\rho+\gamma)UT}{\Delta\omega^2}(\omega-\omega_C)^2+\frac{(1+\rho+\gamma)UT}{\Delta\omega^3}(\omega-\omega_C)^3, \qquad (4)$$

$\omega_C\le\omega\le\omega_B$.

где коэффициенты ρ и γ связаны соотношениями $y'(\omega_C)=\rho UT/\Delta\omega,\ y'(\omega_B)=\gamma UT/\Delta\omega$

и селективный сигнал $g(t)$ имеет вид

$$g(t)=2U\frac{\sin\omega_C t}{\omega_C t}\left[\frac{6(1+\rho+\gamma)}{\Delta\omega^3t^3}\sin\Delta\omega t-\frac{(3+2\rho+4\gamma)}{\Delta\omega^2t^2}\times\right.$$
$$\left.\times(1+\cos\Delta\omega t)+\frac{2(\gamma-\rho)}{\Delta\omega^2t^2}-\frac{\gamma}{\Delta\omega t}\sin\Delta\omega t\right] \qquad (5)$$

Селективный сигнал (5) зависит от трех параметров α,ρ и γ ($0\le\alpha\le1,\ \rho,\gamma\in R$, где R – множество действительных чисел). Первый параметр α определяет ширину переходной области $2\Delta\omega=2\alpha\omega_C$, параметры ρ и γ - форму спектра в переходной области. При изменении всех параметров в допустимых пределах функция $g(t)$ остается в классе селективных сигналов, удовлетворяющих критерию (1).

В [1] для селективных сигналов вида (5) найдена полная энергия, которая имеет вид

$$E_\omega(\alpha,\rho,\gamma)=$$
$$=U^2T\left[(1-\alpha)+\frac{2}{105}\alpha\left(\rho^2-\frac{13}{4}\rho+36+\gamma^2-\frac{3}{2}\rho\gamma+\frac{11}{2}\gamma\right)\right], \qquad (6)$$

где $\alpha\in[0,1],\rho,\gamma$ - любые два действительных числа.

Экстремальные свойства полной энергии селективных сигналов для частного случая, когда $\gamma=0$ были исследованы в работе [1]. Проведем аналогичные исследования на экстремум полной энергии (6) для общего случая – когда селективный сигнал (5) зависит от трех параметров α,ρ и γ.

Выражение в круглых скобках равенства (6) представляет собой квадратичную форму от двух действительных переменных ρ и γ, т.е.

$$Q(\rho,\gamma)=\rho^2+\gamma^2-\frac{3}{2}\rho\gamma-\frac{13}{4}\rho+\frac{11}{2}\gamma+36. \qquad (7)$$

Исследование $Q(\rho,\gamma)$ позволит установить экстремальные свойства сигнальной функции $g(t)$ и ее полной энергии $E_\omega(\alpha,\rho,\gamma)$, а также синтезировать оптимальные в том или ином смысле селективные сигналы на основании методики, предложенной в работе [2].

Естественно предположить, что

$$\frac{2}{105}\alpha\left(\rho^2-\frac{13}{4}\rho+36+\gamma^2-\frac{3}{2}\rho\gamma+\frac{11}{2}\gamma\right)\le\alpha \qquad (8)$$

Действительно, если выполняется обратное, то есть

$$\frac{2}{105}\alpha\left(\rho^2-\frac{13}{4}\rho+36+\gamma^2-\frac{3}{2}\rho\gamma+\frac{11}{2}\gamma\right)>\alpha, \qquad (9)$$

то полная энергия селективного сигнала (5)

$$E_\omega(\alpha,\rho,\gamma)>U^2T, \qquad (10)$$

что невозможно, так как переходная область отсутствует и спектральная плотность имеет прямоугольную форму, максимальная энергия которой равна $E_{max}=U^2T$.

Решая неравенство (8), имеем

$$\rho^2-\frac{13}{4}\rho+36+\gamma^2-\frac{3}{2}\rho\gamma+\frac{11}{2}\gamma\le\frac{105}{2}$$

или

$$\rho^2-\frac{13}{4}\rho+\gamma^2-\frac{3}{2}\rho\gamma+\frac{11}{2}\gamma-\frac{33}{2}\le 0\,.$$

Итак, ограничения на α,ρ и γ таковы:

$$\begin{cases}0\le\alpha\le 1,\\ \rho^2-\frac{13}{4}\rho+\gamma^2-\frac{3}{2}\rho\gamma+\frac{11}{2}\gamma-\frac{33}{2}\le 0.\end{cases}$$

Для упрощения записи обозначим $E_\omega(\alpha,\rho,\gamma)$ через $U^2Tf(\alpha,\rho,\gamma)$, то есть

$$E_\omega(\alpha,\rho,\gamma)=U^2Tf(\alpha,\rho,\gamma)\,. \qquad (13)$$

Исследуем функцию $f(\alpha,\rho,\gamma)$ на экстремум в области D, где

$$D=\Big\{(\alpha,\rho,\gamma):0\le\alpha\le 1,\ \rho,\gamma\in R:\ \rho^2-\frac{13}{4}\rho+ +\gamma^2-\frac{3}{2}\rho\gamma+\frac{11}{2}\gamma-\frac{33}{2}\le 0\Big\} \qquad (14)$$

Функция

$$f(\alpha,\rho,\gamma)=1-\alpha+\frac{2}{105}\alpha\left(\rho^2-\frac{13}{4}\rho+36+\gamma^2-\frac{3}{2}\rho\gamma+\frac{11}{2}\gamma\right) \qquad (15)$$

определена всюду в области D. Ее частные производные

$$\begin{cases}f'_\alpha(\alpha,\rho,\gamma)=-1+\frac{2}{105}\left(\rho^2+\gamma^2-\frac{3}{2}\rho\gamma-\frac{13}{4}\rho+\frac{11}{2}\gamma+36\right),\\ f'_\rho(\alpha,\rho,\gamma)=\frac{2\alpha}{105}\left(2\rho-\frac{3}{2}\gamma-\frac{13}{4}\right),\\ f'_\gamma(\alpha,\rho,\gamma)=\frac{2\alpha}{105}\left(2\gamma-\frac{3}{2}\rho+\frac{11}{2}\right)\end{cases} \qquad (16)$$

существуют всюду в области D.

Воспользовавшись необходимыми условиями экстремума функции [5], находим стационарные точки, решая систему уравнений

$$\begin{cases}-1+\frac{2}{105}\left(\rho^2+\gamma^2-\frac{3}{2}\rho\gamma-\frac{13}{4}\rho+\frac{11}{2}\gamma+36\right)=0,\\ \frac{2\alpha}{105}\left(2\rho-\frac{3}{2}\gamma-\frac{13}{4}\right)=0,\\ \frac{2\alpha}{105}\left(2\gamma-\frac{3}{2}\rho+\frac{11}{2}\right)=0.\end{cases} \qquad (17)$$

Решая второе и третье уравнения системы алгебраических уравнений (17), находим $\rho=1,\gamma=-2$.

Подставляя найденные значения $\rho=1,\gamma=-2$ в первое уравнение системы уравнений (17), получаем $\frac{14}{105}\ne 0$.

Последнее означает, что не существует таких α,ρ и γ, для которых (если $\alpha\ne 0$) выполняются необходимые условия (17) существования экстремума функции, т.е. точек экстремума функция (13) не имеет.

Найдем наименьшее и наибольшее значения полной энергии селективных сигналов вида (5) в частотной области. Наибольшего значения полная энергия (6) селективного сигнала (5) достигает при $\alpha=0$ и условиях (12). Оно равно U^2T. Найдем наименьшее значение функции (6).

Действительно,

$$E_\omega(\alpha,\rho,\gamma)=$$
$$=U^2T\left[(1-\alpha)+\frac{2}{105}\alpha\left(\rho^2-\frac{13}{4}\rho+36+\gamma^2-\frac{3}{2}\rho\gamma+\frac{11}{2}\gamma\right)\right]\ge$$
$$\ge U^2T\left[(1-\alpha)+\frac{2}{105}\alpha\, g_{\text{наим}}(\rho,\gamma)\right],$$

где

$$g(\rho,\gamma)=\rho^2-\frac{13}{4}\rho+36+\gamma^2-\frac{3}{2}\rho\gamma+\frac{11}{2}\gamma\ge$$
$$\ge g_{\text{наим}}(\rho,\gamma)=g_{\text{наим}}(1;-2)=\frac{119}{4}$$

Тогда

$$E_\omega(\alpha,\rho,\gamma)\ge U^2T\left(1-\alpha+\frac{2}{105}\alpha\frac{119}{4}\right)=\left(1-\frac{91}{210}\alpha\right)\ge\frac{119}{210}U^2T$$

Таким образом, полная энергия селективных сигналов вида (5) удовлетворяет неравенствам

$$\frac{119}{210}U^2T\le E_\omega(\alpha,\rho,\gamma)\le U^2T\,.$$

Эти исследования дают возможность рассчитать энергетические показатели телекоммуникационной системы на этапе проектирования и выбрать оптимальную форму сигнала относительно выбранного критерия.

Литература

1. Стрелковська І.В. Повна енергія селективних сигналів з параметрами, побудованих на основі сплайн-інтерполяції / І.В. Стрелковська // Радіоелектроніка та телекомунікації: Вісник національного університету «Львівська політехніка» – 2004. – № 508. – С. 52-57.
2. Сукачев Э.А. Синтез многопараметрических селективных сигналов, построенных на основе кубических сплайнов/ Э.А. Сукачев, И.В. Стрелковская // Радиотехника: Всеукр. межвед. научно-техн. сб. – 2004. – Вып. 138. – С. 209-213.
3. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение / Б. Скляр; пер. с англ. – [изд. 2-е]. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. – 1104 с.
4. Сукачев Э.А. Определение формы сигнала, удовлетворяющего первому критерию Найквиста / Э.А. Сукачев // Радиоэлектроника: Изв. высш. учеб. заведений. – 2001. – Т.44, №12. – С. 65-69
5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г.М.Фихтенгольц. – Т.1. – М.: Наука, 1969. – 607 с.