

Розглядається задача оптимальної упаковки неорієнтованих багатогранників у кулі або циліндрі. Будується математична модель у вигляді задачі нелінійного програмування. Пропонується метод розв'язання, що включає швидкий алгоритм побудови допустимих стартових точок і оптимізаційну процедуру, яка скорочує обчислювальні ресурси при пошуку локально-оптимальних рішень

Ключові слова: упаковка, багатогранники, неперервні обертанья, квазі- ρ -функція, математична модель, нелінійна оптимізація

Рассматривается задача оптимальной упаковки неориентированных многогранников в шаре или цилиндре. Строится математическая модель в виде задачи нелинейного программирования. Предлагается метод решения, включающий быстрый алгоритм построения допустимых стартовых точек и оптимизационную процедуру, которая сокращает вычислительные ресурсы при поиске локально-оптимальных решений

Ключевые слова: упаковка, многогранники, непрерывные повороты, квазі- ρ -функція, математическая модель, нелинейная оптимізація

ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ УПАКОВКИ МНОГОГРАННИКОВ В СФЕРИЧЕСКОМ И ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КОНТЕЙНЕРАХ

А. В. Панкратов

Доктор технических наук, старший научный сотрудник*

E-mail: impankratov@mail.ru

Т. Е. Романова

Доктор технических наук, профессор,
ведущий научный сотрудник*

E-mail: sherom@kharkov.ua

Ю. Е. Стоян

Аспирант*

E-mail: valikodoc@mail.ru

А. М. Чугай

Кандидат технических наук, старший научный сотрудник*

E-mail: chugay.andrey80@gmail.com

*Отдел математического моделирования и
оптимального проектирования

Институт проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины

ул. Пожарского, 2/10, г. Харьков, Украина, 61046

1. Введение

Класс оптимизационных задач размещения (Packing and Cutting [1]) имеет широкий спектр применения в задачах логистики, современной биологии, минералогии, медицине, материаловедении, нанотехнологиях, робототехнике, системах распознавания образов, системах управления космических аппаратов, лазерном 3D-раскрое, а также в химической промышленности, энергетике, машиностроении, судостроении, авиастроении, строительстве. Задачи упаковки (bin-packing, knapsack packing, container loading), связанные с кубоидами, классифицируются как ортогональные задачи упаковки и хорошо изучены в литературе.

В общем случае, трехмерные задачи упаковки могут оперировать с более сложными формами объектов и контейнеров. Интересным примером таких задач является быстрое прототипирование (rapid prototyping) при использовании технологии селективного лазерного процесса спекания (selective laser sintering process). Проблема оптимизации упаковки многогранников в цилиндре возникает также в задачах предваритель-

ной оценки плотности порошковых материалов, сыпучих материалов, состоящих из гранулированных частиц, при проектировании пористости адсорбционных фильтров, которые используются в химической и нефтехимической промышленности. Особый интерес к классу задач упаковки многогранников в контейнерах различной формы (цилиндр, шар, параболоид, конус) возникает при проектировании ракетно-космической техники. Таким образом, разработка эффективных методов решения задач оптимальной упаковки произвольных многогранников в контейнерах, имеющих форму шара или цилиндра, является актуальной проблемой.

2. Анализ литературных данных и постановка проблемы

Задача оптимальной упаковки многогранников является NP-сложной [2], и, как следствие, методологии решения обычно используют эвристики [3–13].

В работах [3, 4] представлены обзоры основных методов и подходов к решению 3D-задач упаковки. Вы-

числительная сложность решения задач трехмерной упаковки вынуждает многих исследователей применять различные упрощения, которые сильно сужают область допустимых решений. Так, в работах [5–7] применяется аппроксимация тел произвольной формы объединением элементарных кубоидов одинакового размера, а в работах [8, 9] – шаров одинакового радиуса. Многие исследователи уделяют внимание совершенствованию существующих эвристических подходов. Так, в [10] исследуется влияние на качество решения вида функции цели, используемой при генерации допустимых размещений, в [11] предлагается эвристический алгоритм полиномиальной сложности для поиска размещения в окрестности существующего решения для объектов с фиксированной ориентацией. Работа [12] интересна тем, что авторы исследуют приближенный метод решения задачи упаковки параллелепипедов с учетом некоторых дополнительных ограничений (ограничения на поведение системы, составные объекты, контейнеры, отличные от кубоидов). В статье [13] предлагается основанный на имитации действия гравитации эвристический алгоритм НАРЕЗ3D для задачи упаковки невыпуклых многогранников в прямоугольном параллелепипеде минимальной высоты, при этом объекты могут вращаться только на дискретный набор углов.

Некоторые исследователи предлагают подходы, основанные на математическом моделировании и оптимизационных процедурах [14–16]. В частности, в статье [14] излагается метод решения для упаковки ориентированных многогранников внутри многогранного контейнера. Статья [15] посвящена задаче балансной упаковки нестандартных грузов. Прежде всего, рассматривается ортогональная упаковка «tetris-like» элементов в выпуклой области, а затем решается задача упаковки многоугольников, допускающих непрерывные вращения. Предлагается подход, использующий задачи смешанного целочисленного линейного/нелинейного программирования (MIP, MINLP). В работе [16] рассматривается задача упаковки невыпуклых ориентированных многогранников в параллелепипед минимальной высоты. Предлагается метод решения на основе мета-эвристики для поиска приближения к глобальному минимуму.

Однако наименее изученным является класс задач оптимальной упаковки произвольных многогранников, допускающих непрерывные вращения, в контейнере сферической или цилиндрической формы. Основная проблема – отсутствие математических моделей, позволяющих использование современных NLP-solver-ов. В данном исследовании предлагается подход, основанный на математическом моделировании отношений между геометрическими объектами, что позволяет сформулировать задачу упаковки в виде задачи нелинейного программирования. С этой целью используется метод phi-функций [17]. В настоящее время построены phi-функции для некоторых 3D-объектов, таких как параллелепипеды, выпуклые многогранники и сферы [18, 19]. Многие из построенных phi-функций (в частности, для выпуклых многогранников) достаточно сложны, что затрудняет использование NLP-solver-ов для поиска локальных экстремумов. В этой связи для аналитического описа-

ния ограничений непересечения между невыпуклыми многогранниками, допускающими непрерывные повороты и трансляции, в данном исследовании используется класс квази-phi-функций [20]. Свободные от радикалов квази-phi-функции позволяют построить математическую модель в виде непрерывной задачи нелинейного программирования, где область допустимых решений описывается системой неравенств с гладкими функциями.

Рассмотрим задачу упаковки многогранников в следующей постановке.

Имеется контейнер Ω , имеющий форму шара $S = \{(x,y,z) : r^2 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0\}$ переменного радиуса r или цилиндра

$$C = \{(x, y, z) : \min\{(\eta r)^2 - x^2 - y^2, -z + \eta h, z + \eta h\} \geq 0\}$$

полувысоты h и радиуса r с переменным коэффициентом гомотетии $0 < \eta \leq 1$. Также имеется набор в общем случае невыпуклых многогранников Q_q , $q \in \{1, 2, \dots, N\} = J_N$. Каждый многогранник Q_q задан в собственной системе координат, начало которой v_q совпадает с центром, описанной вокруг многогранника Q_q сферы S_q радиуса r_q . Для построения S_q используется алгоритм, приведенный в [21].

Положение и ориентация многогранника Q определяется вектором его переменных параметров размещения (v, θ) . Здесь $v = (x, y, z)$ – вектор трансляции, $\theta = (\theta^1, \theta^2, \theta^3)$, $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ – углы поворота от оси OX до оси OY, от OY до OZ и от OX до OZ соответственно, относительно неподвижной системы координат OXYZ. Транслированный на вектор v и повернутый на угол $\theta^1, \theta^2, \theta^3$, многогранник Q обозначим как

$$Q(u) = \{p \in R^3 : p = v + M(\theta) \cdot p^0, \forall p^0 \in Q^0\},$$

где Q^0 – нетранслированный и неповернутый многогранник Q , $M(\theta)$ – стандартная матрица поворота.

Задача оптимальной упаковки многогранников в контейнер сферической или цилиндрической формы (в дальнейшем OPPS) может быть сформулирована следующим образом.

Упаковать набор многогранников Q_q , $q \in I_N$, внутри контейнера Ω минимального размера l . При этом, $l=r$, если $\Omega=S$ и $l=\eta$, если $\Omega=C$.

Полагая, что каждый невыпуклый многогранник Q_q может быть представлен в виде объединения n_q выпуклых многогранников, определим набор

$$n = \sum_{q=1}^N n_q$$

выпуклых многогранников K_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\} = I_n$ и, так называемый, “склеивающий” вектор

$$a = (a_1, \dots, a_n), \quad a_i \in J_N,$$

где $a_i = q$, если K_i принадлежит многограннику Q_q , $q \in I_N$. Если многогранник Q_q – выпуклый, то $Q_q \equiv K_i$, где

$$i = \sum_{j=1}^{q-1} n_j + 1.$$

Задача декомпозиции невыпуклых многогранников на минимальное количество выпуклых много-

гранников сама по себе является NP-трудной. Для решения данной задачи могут быть использованы различные алгоритмы, например, алгоритм, предложенный в [22]. В пределах данного исследования, полагаем, что декомпозиция невыпуклых многогранников на выпуклые многогранники – известна.

С каждым многогранником $K_i \subset Q_q$ ассоциируется собственная система координат, которая совпадает с собственной системой координат многогранника Q_q . Отметим, что каждый выпуклый многогранник $K_i \subset Q_q$ задается своими вершинами $p_s^i, s=1, \dots, m_i, i \in I_n$, в собственной системе координат многогранника Q_q .

Таким образом, задача OPPS может быть сформулирована в терминах выпуклых многогранников следующим образом.

Упаковать набор выпуклых многогранников $K_i(u_i), i \in I_n$, связанных заданными «склеивающими» векторами $\mathbf{a}=(a_1, \dots, a_n)$, внутри контейнера Ω минимального размера l .

3. Цель и задачи исследования

Целью работы является построение математической модели и разработка метода решения задачи упаковки произвольных многогранников, допускающих непрерывные вращения, в шаре минимального радиуса или цилиндре с минимальным коэффициентом гомотетии.

Для достижения цели поставлены следующие задачи:

- формализация ограничений размещения в задаче OPPS, включая аналитическое описание условия непересечения многогранников и условия включения многогранников в контейнер (для случаев: $\Omega = \mathbf{S}$ и $\Omega = \mathbf{C}$);
- построение математической модели задачи OPPS в виде задачи нелинейного программирования (NLP-model);
- разработка стратегии решения задачи OPPS;
- разработка алгоритма построения допустимых стартовых точек (для случаев: $\Omega = \mathbf{S}$ и $\Omega = \mathbf{C}$);
- разработка алгоритма поиска локально-оптимальных решений задачи OPPS из допустимых стартовых точек (для случаев: $\Omega = \mathbf{S}$ и $\Omega = \mathbf{C}$);
- создание программного обеспечения для решения задачи OPPS (для случаев: $\Omega = \mathbf{S}$ и $\Omega = \mathbf{C}$);
- решение тестовых примеров (для случаев: $\Omega = \mathbf{S}$ и $\Omega = \mathbf{C}$).

4. Моделирование ограничений размещения в задаче OPPS

Для описания ограничений размещения (непересечения многогранников и включения многогранников в контейнер) используются phi-функции и квази-phi-функции [17, 20].

Квази-phi-функция для

$$Q_q(u_q) = K_1(u_q) \cup \dots \cup K_i(u_q) \cup \dots \cup K_{n_q}(u_q)$$

и

$$Q_g(u_g) = K_1(u_g) \cup \dots \cup K_j(u_g) \cup \dots \cup K_{n_g}(u_g)$$

может быть определена в виде

$$\begin{aligned} \Phi'_{qg}(u_q, u_g, u_{ij}) &= \\ &= \min\{\Phi^{K_i K_j}(u_q, u_g, u_{ij}), i=1, \dots, n_q, j=1, \dots, n_g\}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\Phi'_{qg}(u_q, u_g, u_{ij})$ – квази-phi-функция, а u_{ij} – вектор дополнительных переменных для выпуклых многогранников $K_i(u_q)$ и $K_j(u_g), i=1, \dots, n_q, j=1, \dots, n_g, u_{qg}=(u_{ij}, i=1, \dots, n_q, j=1, \dots, n_g)$.

Phi-функция для невыпуклого многогранника $Q_q(u_q)$ и объекта $\Omega^* = \mathbb{R}^3 \setminus \text{int} \Omega$ может быть определена в виде

$$\Phi_q(u_q) = \min\{\Phi^{K_i}(u_q), i=1, \dots, n_q\}, \quad (2)$$

где $\Phi^{K_i}(u_q)$ – phi-функция для $K_i(u_q)$ и объекта $\Omega^*, i=1, \dots, n_q$.

Приведем конкретный вид квази-phi-функции для выпуклых многогранников, а также phi-функции для выпуклого многогранника и объекта Ω^* .

Рассмотрим два выпуклых многогранника $K_1(u_1)$ и $K_2(u_2)$, заданных вершинами $p_i^1, i=1, \dots, m_1$, и $p_j^2, j=1, \dots, m_2$, соответственно.

Квази-phi-функция $\Phi'^{K_1 K_2}(u_1, u_2, u_p)$ для выпуклых многогранников $K_1(u_1)$ и $K_2(u_2)$ может быть определена так [20]:

$$\begin{aligned} \Phi'^{K_1 K_2}(u_1, u_2, u_p) &= \\ &= \min\{\Phi^{K_1 P}(u_1, u_p), \Phi^{K_2 P}(u_2, u_p)\}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\Phi^{K_1 P}(u_1, u_p)$ – phi-функция для $K_1(u_1)$ и полупространства $P(u_p)$, $\Phi^{K_2 P}(u_2, u_p)$ – phi-функция для $K_2(u_2)$ и полупространства $P^*(u_p) = \mathbb{R}^3 \setminus \text{int} P(u_p)$, где $\text{int} P(u_p)$ – внутренность $P(u_p)$. Здесь

$$P(u_p) = \{(x, y, z) : \psi_p = \alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma \cdot z + \mu_p \leq 0\} -$$

полупространство,

$$\alpha = \sin \theta_{yp}, \quad \beta = -\sin \theta_{xp} \cdot \cos \theta_{yp}, \quad \gamma = \cos \theta_{xp} \cdot \cos \theta_{yp}$$

(отметим, что $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$) и $u_p = (\theta_{xp}, \theta_{yp}, \mu_p)$, θ_{xp} и θ_{yp} – соответствующие переменные углы полупространства $P(u_p)$ от оси OY до OZ и от оси OX до OZ. В формуле (3):

$$\Phi^{K_1 P}(u_1, u_p) = \min_{1 \leq i \leq m_1} \Psi_P(p_i^1)$$

и

$$\Phi^{K_2 P}(u_2, u_p) = \min_{1 \leq j \leq m_2} (-\Psi_P(p_j^2)).$$

Для описания ограничений включения,

$$K_i(u_i) \subset \Omega \Leftrightarrow \text{int} K_i(u_i) \cap \Omega^* = \emptyset,$$

используется phi-функция $\Phi^{K_i \Omega^*}$ для $K_i(u_i)$ и объекта $\Omega^* = \mathbb{R}^3 \setminus \text{int} \Omega$.

Пусть $K_i(u_i)$ – выпуклый многогранник с вершинами $p_i = (p_{xi}, p_{yi}, p_{zi}), i=1, \dots, m_i$. Phi-функция для $K_i(u_i)$ и объекта Ω^* может быть определена так:

$$\Phi^{K_i, \Omega^*}(u_i) = \begin{cases} \Phi^{K_i, S^*}(u_i), & \text{если } \Omega = S, \\ \Phi^{K_i, C^*}(u_i), & \text{если } \Omega = C, \end{cases} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi^{K_i, S^*}(u_i) &= \min\{\varphi_i(u_i), i = 1, \dots, m_i\}, \\ \varphi_i(u_i) &= r^2 - (p_{xi})^2 - (p_{yi})^2 - (p_{zi})^2, \\ \Phi^{K_i, C^*}(u_i) &= \min\{\mu_i(u_i), \psi(u_i), \omega(u_i)\}, \\ \mu_i &= \min\{\mu_i(u_i), i = 1, \dots, m_i\}, \\ \mu_i(u_i) &= r^2 - (p_{xi})^2 - (p_{yi})^2, \\ \psi(u_i) &= \min\{\psi_i(u_i), i = 1, \dots, m_i\}, \\ \psi_i(u_i) &= p_{zi} + h, \\ \omega(u_i) &= \min\{\omega_i(u_i), i = 1, \dots, m_i\}, \\ \omega_i(u_i) &= -p_{zi} + h. \end{aligned}$$

5. Математическая модель задачи OPPS

Вектор $u \in R^\sigma$ переменных задачи может быть описан следующим образом: $u = (\zeta, \tau) \in R^\sigma$,

где

$$\sigma = 1 + 6N + 3m, \quad \zeta = (l, u_1, u_2, \dots, u_N),$$

l – переменная метрическая характеристика контейнера Ω ,

$$u_{a_i} = (v_{a_i}, \theta_{a_i}) = (x_{a_i}, y_{a_i}, z_{a_i}, \theta_{a_i}^1, \theta_{a_i}^2, \theta_{a_i}^3)$$

– вектор параметров размещения многогранника K_i , $i \in I_n$, индекс $a_i \in \{1, 2, \dots, N\}$ – компонента вектора a , $\tau = (u_p^1, \dots, u_p^m)$ – вектор дополнительных переменных, $u_p^s = (\theta_{x_p^s}, \theta_{y_p^s}, \mu_p^s)$ – вектор вспомогательных переменных для s -й пары выпуклых многогранников, определенных в (3), $s = 1, \dots, m$, $m = \text{card}(\Xi)$,

$$\Xi = \{(i, j), a_i \neq a_j, i < j = 1, \dots, n\}. \quad (5)$$

Математическая модель задачи OPPS может быть сформулирована в виде

$$\min_{u \in W \subset R^\sigma} F(u), \quad (6)$$

$$\begin{aligned} W &= \{u \in R^\sigma : \Phi'_{ij}(u_{a_i}, u_{a_j}) \geq 0, \\ &(i, j) \in \Xi, \Phi_i(u_{a_i}) \geq 0, i = 1, 2, \dots, n\}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $F(u) = 1$, Φ'_{ij} – квази-phi-функция вида (3), $a_i, a_j \in I_n$, при $(i, j) \in \Xi$, Ξ определено в (5), Φ_i – phi-функция вида (4) для K_i и объекта Ω^* .

Для того, чтобы избежать избыточных неравенств в ограничениях включения, вместо набора phi-функций $\Phi_i(u_{a_i}) \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, для выпуклых многогранников K_i , $i = 1, \dots, n$, можно использовать набор phi-функций

$\Phi_q(u_q) \geq 0$, $q = 1, \dots, N$, для выпуклых оболочек многогранников Q_q , $q = 1, \dots, N$.

Каждое phi-неравенство в (7) может быть описано системой неравенств с гладкими функциями. Математическая модель (6), (7) является непрерывной задачей нелинейного программирования, и содержит все глобально оптимальные решения. Для решения задачи можно использовать современные глобальные NLP-solver'ы. Таким образом, по крайней мере, теоретически, можно получить оптимальное решение задачи (6)–(7).

Однако на практике мы имеем дело с большим числом переменных и огромным числом неравенств, в результате чего поиск локально-оптимального решения становится нереальной задачей даже для современных глобальных NLP-solver'ов. В этой связи для поиска «хороших» локально оптимальных решений за разумное время предлагается эффективный алгоритм, который можно рассматривать как развитие методологии, предложенной в работе [20] для задачи оптимальной упаковки эллипсов в прямоугольном контейнере минимальной площади.

6. Метод решения задачи OPPS

Для решения задачи (6)–(7) предлагается следующая стратегия, основанная на методе мултистарта.

1) Задаем множество $\{\zeta^0\}$ векторов $\zeta^0 = (r^0, u_1^0, \dots, u_N^0)$ допустимых параметров размещения (u_1^0, \dots, u_N^0) многогранников, размещенных в контейнере Ω^0 с заданным значением метрической характеристики l^0 . В данном исследовании используется специальный алгоритм (FSPA-S).

2) Формируем соответствующее множество $\{u^0\}$ допустимых стартовых точек $u^0 = (\zeta^0, \tau^0)$ для задачи (6)–(7), используя множество $\{\zeta^0\}$, полученное на шаге 1. Для генерации вектора τ^0 применяем оптимизационную процедуру (FAPA-S).

3) Ищем локальный минимум функции цели $F(u)$ в задаче (6)–(7), стартуя из каждой точки множества $\{u^0\}$, полученной на шаге 2. Для поиска локального минимума задачи (6)–(7) предлагается алгоритм (COMPOLY-S).

4) Выбираем лучший из найденных на шаге 3 локальных минимумов в качестве локально оптимального решения задачи (6)–(7).

Для решения задач нелинейного программирования (при реализации шагов 1–3) используется библиотека IPOPT [23].

6. 1. Алгоритм поиска стартовых точек из области допустимых решений (FSPA-S)

Для поиска стартовых точек из области допустимых решений задачи (6)–(7) предлагается алгоритм, основанный на гомотетических преобразованиях объектов, который включает в себя следующие шаги:

1. Выбираем достаточно большое начальное значение переменной l^0 , обеспечивающее размещение непересекающихся шаров S_q , $q = 1, 2, \dots, N$, внутри контейнера Ω^0 .

2. Генерируем внутри контейнера Ω^0 множество N , случайно выбранных центров $(\tilde{x}_q^0, \tilde{y}_q^0, \tilde{z}_q^0)$, $q = 1, 2, \dots, N$,

шаров S_q радиуса λr_q . Полагаем, что коэффициент гомотетии λ одинаков для всех S_q , $q=1,2,\dots,N$, и $0 \leq \lambda \leq 1$.

3. Увеличиваем радиус каждого шара S_q , $q=1,2,\dots,N$ до исходного размера, полагая, что координаты центров шаров и коэффициент гомотетии λ – переменные. Для этого полагаем $l=l^0$ и, стартуя из точки $\tilde{u}^0 = (\tilde{x}_1^0, \tilde{y}_1^0, \tilde{z}_1^0, \dots, \tilde{x}_N^0, \tilde{y}_N^0, \tilde{z}_N^0, \tilde{\lambda}^0 = 0)$, решаем вспомогательную задачу:

$$\max_{\tilde{u} \in \tilde{W}} \lambda, \quad (8)$$

$$\tilde{W} = \{ \tilde{u} \in \mathbb{R}^{3N+1} : \Phi^{S_q S_q} \geq 0, \Phi^{S_q \Omega^*} \geq 0, \\ q < g = 1, 2, \dots, N, 1 - \lambda \geq 0, \lambda \geq 0 \}, \quad (9)$$

где

$$\tilde{u} = (x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, \lambda), \\ \Phi^{S_q S_q} = (x_q - x_g)^2 + (y_q - y_g)^2 + \\ + (z_q - z_g)^2 - \lambda^2 (r_q + r_g)^2, \quad (10)$$

$\Phi^{S_q S_q}$ – phi-функция шара S_q радиуса λr_q и шара S_g радиуса λr_g ,

$$\Phi^{S_q \Omega^*} (u_q) = \begin{cases} \Phi^{S_q S^{or}} (u_q), & \text{если } \Omega = S, \\ \Phi^{S_q C^{or}} (u_q), & \text{если } \Omega = C, \end{cases} \quad (11)$$

$$\Phi^{S_q S^{or}} = (r^0 - \lambda r_q)^2 - (x_q)^2 - (y_q)^2 - (z_q)^2,$$

$$\Phi^{S_q C^{or}} = \min\{(\eta^0 r - \lambda r_q)^2 - (x_q)^2 - (y_q)^2,$$

$$z_q + \eta^0 h - \lambda r_q, -z_q + \eta^0 h - \lambda r_q\},$$

$\Phi^{S_q \Omega^*}$ – phi-функция шара S_q радиуса λr_q и объекта Ω^* .

Обозначим точку глобального максимума задачи (8)–(9) через

$$\tilde{u}^* = (\tilde{x}_1^*, \tilde{y}_1^*, \tilde{z}_1^*, \dots, \tilde{x}_N^*, \tilde{y}_N^*, \tilde{z}_N^*, \tilde{\lambda}^* = 1).$$

4. Формируем вектор допустимых параметров $\zeta^0 = (l^0, u_1^0, \dots, u_N^0)$, полагая, что

$$u_q^0 = (x_q^0, y_q^0, z_q^0, \theta_q^0),$$

где $(x_q^0, y_q^0, z_q^0) = (\tilde{x}_q^*, \tilde{y}_q^*, \tilde{z}_q^*)$, θ_q^0 – вектор случайно сгенерированных параметров поворота многогранников Q_q , $q=1,\dots,N$.

Заметим, что глобальное решение задачи (8)–(9), т.е. $\tilde{\lambda}^* = 1$, всегда может быть найдено (при условии выбора начального радиуса r^0 на шаге 1 достаточно большим). Решение автоматически удовлетворяет всем ограничениям размещения в задаче (6)–(7).

Алгоритм FSPA-S определяет вектор ζ^0 при формировании стартовой точки для последующей задачи поиска локального минимума задачи (6)–(7).

6. 2. Алгоритм оптимизации упаковки (COMPOLY-S)

В основе алгоритма используется идея LOFRT процедуры, предложенной в статье [22] для задачи упаковки эллипсов.

Полагаем, что построены сферы $S_q^0 \equiv S_q(0)$ радиуса r_q и центром $v_q = (x_q, y_q, z_q)$, описанные вокруг каждого невыпуклого многогранника Q_q , $q=1,\dots,N$, также как и сферы $S_i^0 \equiv S_i(0)$ радиуса r_i и центром $v_{ci} = (x_{ci}, y_{ci}, z_{ci})$, описанные вокруг каждого выпуклого многогранника K_i , $i=1,\dots,n$.

Предлагаемый алгоритм, COMPOLY-S, включает в себя следующие шаги.

Шаг 1. Полагаем $k=1$, и задаем вектор

$$\zeta^0 = (l^0, u_1^0, \dots, u_N^0)$$

параметров допустимого размещения многогранников Q_q , $q=1,\dots,N$, внутри Ω^0 .

Шаг 2. Формируем вектор $(v_{c1}^{(k-1)}, \dots, v_{cn}^{(k-1)})$ центров шаров $S_i(u_{a_i}^{(k-1)})$, $i=1,2,\dots,n$. В соответствии с вектором a , центр v_{ci} шара $S_i \supset K_i$ после трансляции и поворота K_i^0 имеет вид:

$$v_{ci}^{(k-1)} = v_{ci}(u_{a_i}^{(k-1)}) = v_{a_i}^{(k-1)} + M(\theta_{a_i}^{(k-1)}) \cdot v_{ci}.$$

Шаг 3. Для каждого шара $S_i(u_{a_i}^{(k-1)})$ строим фиксированный «индивидуальный» прямоугольный контейнер Ω_i^k со сторонами равными $2(r_i + \varepsilon)$, $i=1,2,\dots,n$, центром симметрии $v_{ci}^{(k-1)}$ и вершинами

$$v_i^{s(k-1)} = (x_i^{s(k-1)}, y_i^{s(k-1)}, z_i^{s(k-1)}), \quad s=1,\dots,8,$$

полагая

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^n r_i / n.$$

Шаг 4. Формируем систему неравенств дополнительных ограничений на вектор $v_{a_i} = (x_{a_i}, y_{a_i}, z_{a_i})$ для каждого K_i в виде: $\Phi^{S_i \Omega_i^*} \geq 0$, $i=1,\dots,n$, где

$$\Phi^{S_i \Omega_i^*} = \min\{-x_{ci}(u_{a_i}^{(k-1)}) + x_i^{(k-1)} + \varepsilon, \\ -y_{ci}(u_{a_i}^{(k-1)}) + y_i^{(k-1)} + \varepsilon, -z_{ci}(u_{a_i}^{(k-1)}) + z_i^{(k-1)} + \varepsilon,$$

$$x_{ci}(u_{a_i}^{(k-1)}) - x_i^{(k-1)} + \varepsilon,$$

$$y_{ci}(u_{a_i}^{(k-1)}) - y_i^{(k-1)} + \varepsilon,$$

$$z_{ci}(u_{a_i}^{(k-1)}) - z_i^{(k-1)} + \varepsilon\}$$

phi-функция для S_i и $\Omega_i^* = \mathbb{R}^3 \setminus \text{int} \Omega_i$.

Таким образом, генерируется «искусственное» множество Π_k^ε вида:

$$\Pi_k^\varepsilon = \{u \in \mathbb{R}^\sigma : -x_{ci}(u_{a_i}^{(k-1)}) + x_i^{(k-1)} + \varepsilon \geq 0,$$

$$-y_{ci}(u_{a_i}^{(k-1)}) + y_i^{(k-1)} + \varepsilon \geq 0,$$

$$-z_{ci}(u_{a_i}^{(k-1)}) + z_i^{(k-1)} + \varepsilon \geq 0,$$

$$x_{ci}(u_{a_i}^{(k-1)}) - x_i^{(k-1)} + \varepsilon \geq 0,$$

$$y_{ci}(u_{a_i}^{(k-1)}) - y_i^{(k-1)} + \varepsilon \geq 0,$$

$$z_{ci}(u_{a_i}^{(k-1)}) - z_i^{(k-1)} + \varepsilon \geq 0, \quad i=1,\dots,n\}.$$

Шаг 5. Формируем индексные множества Ξ_1 и Ξ_2 следующим образом:

$$\Xi_1^k = \{(i, j) \in \Xi_1^{kS} : \Phi^{\Omega_{ki}\Omega_{kj}} < 0\},$$

где

$$\Xi_1^{kS} = \{(i, j) \in \Xi : \Phi_{a_i a_j} < 0\},$$

$$\Phi^{\Omega_{ki}\Omega_{kj}} = \max\{\varphi_{ij}^s, s = 1, \dots, 6\},$$

$$\varphi_{ij}^1 = (x_i^{(k-1)} - x_j^{(k-1)}) - R_{ij},$$

$$\varphi_{ij}^2 = (y_i^{(k-1)} - y_j^{(k-1)}) - R_{ij},$$

$$\varphi_{ij}^3 = (z_i^{(k-1)} - z_j^{(k-1)}) - R_{ij},$$

$$\varphi_{ij}^4 = -(x_i^{(k-1)} - x_j^{(k-1)}) - R_{ij},$$

$$\varphi_{ij}^5 = -(y_i^{(k-1)} - y_j^{(k-1)}) - R_{ij},$$

$$\varphi_{ij}^6 = -(z_i^{(k-1)} - z_j^{(k-1)}) - R_{ij},$$

$$R_{ij} = (r_i + r_j) + 2\varepsilon,$$

$\Phi^{\Omega_{ki}\Omega_{kj}}$ – phi-функция для Ω_{ki} и Ω_{kj} , $\Phi_{a_i a_j} = \Phi_{qg}$ – phi-функция (10) для S_q и S_g , описанных вокруг многогранников

$$\mathbb{Q}_q(u_q^{(k-1)}) \supset K_i(u_q^{(k-1)})$$

и

$$\mathbb{Q}_g(u_g^{(k-1)}) \supset K_j(u_g^{(k-1)}),$$

при $a_i = q, a_j = g$.

Отметим, что если $(i, j) \notin \Xi_1$, то нет необходимости проверять ограничение непересечения для соответствующих многогранников $K_i(u_{a_i}^{(k-1)})$ и $K_j(u_{a_j}^{(k-1)})$.

Далее формируем индексное множество

$$\Xi_2^k = \{i \in \Xi_2^{kS} : \Phi^{\Omega_{ki}\Omega_i^*} < 0\},$$

где

$$\Xi_2^{kS} = \{i \in I_n : \Phi^{S_{a_i}\Omega_i^*} < 0\},$$

$\Phi^{\Omega_{ki}\Omega_i^*}$ – phi-функция для Ω_{ki} и объекта $\Omega_i^* = R^3 \setminus \text{int } \Omega_\varepsilon$, причем

$$\Omega_\varepsilon \equiv S_\varepsilon = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 - (r - \varepsilon)^2 \geq 0\}$$

или

$$\Omega_\varepsilon \equiv C_\varepsilon = \{(x, y, z) : \min\{(\eta r - \varepsilon)^2 - x^2 - y^2, -z + \eta h + \varepsilon, z + \eta h + \varepsilon\} \geq 0\},$$

$$\Phi^{\Omega_{ki}S_\varepsilon^*} = \min\{\chi_i^s, s = 1, \dots, 8\},$$

$$\chi_i^s = (r - \varepsilon)^2 - (x_i^{s(k-1)})^2 - (y_i^{s(k-1)})^2 - (z_i^{s(k-1)})^2,$$

$$\Phi^{\Omega_{ki}C_\varepsilon^*} = \min\{\mu, \psi, \omega\},$$

$$\mu = \min\{\mu_i^s, s = 1, \dots, 8\},$$

$$\mu_i^s = (\eta r - \varepsilon)^2 - (x_i^{s(k-1)})^2 - (y_i^{s(k-1)})^2,$$

$$\psi = \min\{\psi_i^s, s = 1, \dots, 8\},$$

$$\psi_i^s = z_i^{s(k-1)} + \eta h,$$

$$\omega = \min\{\omega_i^s, s = 1, \dots, 8\},$$

$$\omega_i^s = -z_i^{s(k-1)} + \eta h.$$

Отметим, что, если $i \notin \Xi_2$, то нет необходимости проверять ограничение включения многогранника $K_i(u_{a_i}^{(k-1)})$ в область Ω .

Шаг 6. Генерируем k -ую подзадачу на подмножестве $W_k = W \cap \Pi_k^\varepsilon$ вида

$$\min_{u_{w_k} \in W_k \subset R^{\sigma-k}} F(u_{w_k}), \tag{12}$$

$$W_k = \{u_{w_k} = (\zeta, \tau_{w_k}) \in R^{\sigma-k} : \Phi'_{ij} \geq 0, (i, j) \in \Xi_1^k,$$

$$\Phi_i \geq 0, i \in \Xi_2^k, \Phi^{S_{a_i}\Omega_i^*} \geq 0, i = 1, \dots, n\},$$

где

$$\Xi_1^k = \{(i, j) \in \Xi_1^{kS} : \Phi^{\Omega_{ki}\Omega_{kj}} < 0\},$$

$$\Xi_2^k = \{i \in \Xi_2^{kS} : \Phi^{\Omega_i^*} < 0\},$$

$$\Xi_1^{kS} = \{(i, j) \in \Xi : \Phi_{a_i a_j} < 0\},$$

$$\Xi_2^{kS} = \{i \in I_n : \Phi^{S_{a_i}\Omega_i^*} < 0\},$$

$$\sigma_k = 3(m - \text{card}(\Xi_1^k)).$$

Шаг 7. Генерируем допустимую стартовую точку $u^{(k-1)} = (\zeta^{(k-1)}, \tau_{w_k}^{(k-1)})$. Поскольку вектор $\zeta^{(k-1)}$ определен выше, находим значения вектора

$$\tau_{w_k}^{(k-1)} = (u_p^{(k-1)1}, \dots, u_p^{(k-1)m}),$$

$$u_p^{(k-1)s} = (\theta_{x_p}^{(k-1)s}, \theta_{y_p}^{(k-1)s}, \mu_p^{(k-1)s}),$$

для таких $s \in \{1, \dots, m\}$, что $(i, j) \in \Xi_1^k$.

Чтобы сформировать вектор $\tau_{w_k}^{(k-1)}$, воспользуемся так называемым алгоритмом (FAPA-S). Ключевая идея алгоритма заключается в следующем: если $\Phi^{S_{a_i}} \geq 0$, то с помощью простых геометрических вычислений формируем вектор $u_p^{(k-1)s}$ как вектор допустимых параметров разделяющей плоскости для $S_i(u_{a_i}^{(k-1)})$ и $S_j(u_{a_j}^{(k-1)})$, в противном случае – определяем вектор $u_p^{(k-1)s}$, решая следующую вспомогательную подзадачу:

$$\max \mu \quad \text{s.t. } (u_p^s, \mu) \in W'_\mu, \tag{13}$$

где

$$W'_\mu = \{(u_p^s, \mu) \in R^4 : \Phi'_{ij}(u_{a_i}^{(k-1)}, u_{a_j}^{(k-1)}, u_p^s) \geq \mu\},$$

$$\mu \in R^1, u_p^s = (\theta_{x_p}^s, \theta_{y_p}^s, \mu_p^s),$$

при фиксированных параметрах размещения

$$(u_{a_i}^{(k-1)}, u_{a_j}^{(k-1)})$$

для соответствующей квази-phi-функции

$$\Phi'_{ij}(u_{a_i}^{(k-1)}, u_{a_j}^{(k-1)}, u_p^s), \forall (i,j) \in \Xi.$$

Следует отметить, что любое неотрицательное значение μ в (13) обеспечивает допустимые значения u_p^s .

Таким образом, все квази-phi-функции и phi-функции в (12) в точке $u^{(k-1)}$ принимают неотрицательные значения.

Шаг 8. Стартуя из допустимой точки $u^{(k-1)}$, решаем задачу

$$\min_{u_{w_k} \in W_k \subset R^{\sigma-\sigma_k}} F(u_{w_k})$$

и получаем точку локального минимума $u_{w_k}^* = (\zeta^{*k}, \tau^{*k})$.

Если $u_{w_k}^* \in \text{fr}\Pi_k^\epsilon$, то принимаем ζ^{*k} в качестве стартового вектора ζ^k для следующей итерации (возвращаемся к шагу 2), в противном случае – завершаем процедуру оптимизации.

Точка $u^* = u^{*k} = (\zeta^{*k}, \tau^{*k}) \in R^\sigma$ является точкой локального минимума задачи (6)–(7). Здесь τ^{*k} включает в себя вектор $\tau_{w_k}^{*k}$, а также вектор σ_k дополнительных переменных, удаленных на k-ой итерации. Заметим, что удаленные ранее дополнительные переменные могут быть переопределены с помощью алгоритма FAPA. Однако в этом нет необходимости, поскольку на последнем шаге алгоритма значения дополнительных переменных не оказывают влияния на значение целевой функции, т. е. $F(u_{w_k}^*) = F(u^{*k})$.

Следует отметить, что $\text{dist}(u_{w_k}^*, u_{w_{k+1}}^*) \geq \epsilon$, если $u_{w_{k+1}}^* \in \text{fr}\Pi_k^\epsilon$. Кроме того, значение ϵ значительно больше, чем точность IPOPT (10^{-8}). Таким образом, можно сделать вывод, что условие останова всегда достигается за конечное число итераций.

Достоинство алгоритма COMPOLY-S состоит в том, что в большинстве случаев анализируется значительно меньшее количество пар многогранников, чем m , поскольку для каждого многогранника осуществляется проверка только его “ ϵ -окрестности”.

Таким образом, алгоритм COMPOLY-S позволяет свести задачу (6)–(7) с большим количеством неравенств и большой размерностью области допустимых решений W вида (7), к последовательности подзадач вида (12) меньшей размерности со значительно меньшим числом нелинейных неравенств.

7. Результаты вычислительных экспериментов

В этом разделе приводятся примеры, демонстрирующие эффективность предложенной в данном исследовании методологии. Эксперименты проводились на компьютере AMD Athlon 64 X2 5200+. Для каждого из примеров полагаем $\epsilon = 5$ в оптимизационной процедуре COMPOLY-S.

Пример 1. Рассматриваются $n=25$ выпуклых многогранников, исходные данные о которых приведены в [16]. На рис. 1, а приведено локально-оптимальное размещение заданного набора многогранников в цилиндре при $r^* = h^* = 12.346384$. Время решения 723.15 сек.

Пример 2. Рассматриваются $n=80$ выпуклых многогранников, исходные данные о которых приведены в [16]. На рис. 1, б приведено локально-оптимальное размещение заданного набора многогранников в цилиндре при $r^* = 0.25$. $h^* = 17.874402$. Время решения 43613.42 сек.

Пример 3. Рассматриваются $n=80$ выпуклых многогранников, исходные данные о которых приведены в [16]. На рис. 1, в приведено локально-оптимальное размещение заданного набора многогранников в шаре радиуса $r^* = 27.327080$. Время решения 42914.375 сек.

Пример 4. Рассматриваются $N=30$ невыпуклых многогранников, исходные данные о которых приведены в [16]. На рис. 1, г приведено локально-оптимальное размещение заданного набора многогранников в шаре радиуса $r^* = 23.070962$. Время решения 29491.35 сек.

Результаты численных экспериментов показали, что предложенные в работе математическая модель и метод решения позволяет получать локально-оптимальные решения для задачи OPPS в контейнерах, имеющих форму шара или цилиндра.

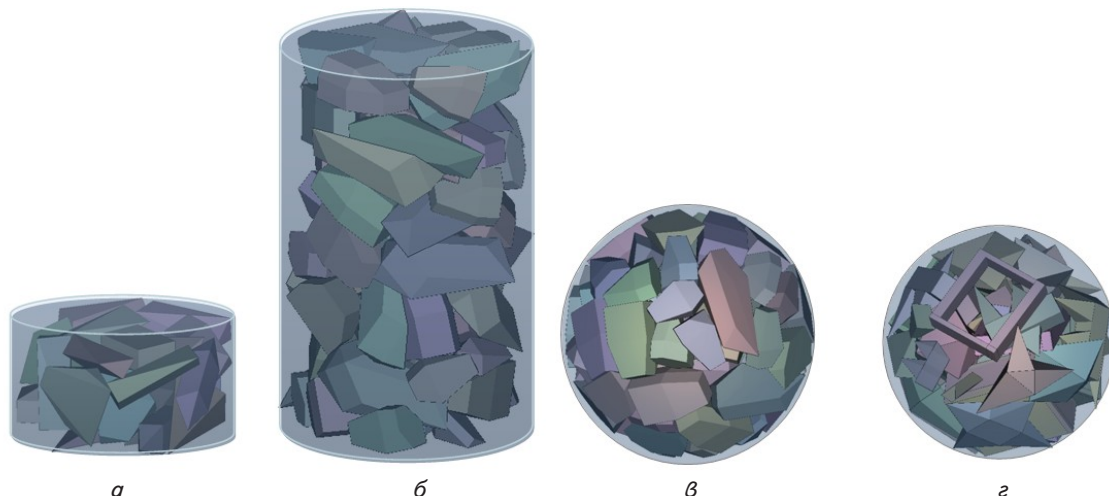


Рис. 1. Локально-оптимальное размещение многогранников: а – для примера 1, б – для примера 2, в – для примера 3, г – для примера 4

8. Выводы

1. Для аналитического описания условия непересечения произвольных многогранников и условия их включения в сферический и цилиндрический контейнер использованы свободные от радикалов квази- ρ -функции и ρ -функции, учитывающие непрерывные вращения и трансляции многогранников, что позволяет описать область допустимых решений в виде системы неравенств с гладкими функциями.

2. Построенная математическая модель (6)–(7) в виде непрерывной задачи нелинейного программирования (NLP-model) содержит все глобально оптимальные решения задачи OPPS, что позволяет использовать для ее реализации современные глобальные NLP-solver'ы, такие как (*Baron, LindoGlobal, GloMIQO*). Таким образом, по крайней мере, теоретически, можно получить оптимальное решение задачи OPPS.

3. Предложенная стратегия решения основана на методе мультистарта, быстром алгоритме FSPA-S поиска допустимых стартовых точек и процедуре локальной оптимизации COMPOLY-S, что дает возможность получать локально-оптимальные решения для задачи OPPS.

4. Разработанный алгоритм (FSPA-S) основан на гомотетических преобразованиях геометрических объектов и обеспечивает быстрое построение допустимых стартовых точек.

5. Разработанный алгоритм (COMPOLY-S) сводит задачу нелинейного программирования с большим числом переменных и большим числом неравенств к последовательности задач меньшей размерности и меньшим числом нелинейных неравенств. Процедура COMPOLY-S значительно уменьшает вычислительные затраты (время и память) и делает возможным эффективное использование современных NLP-solvers для решения задач нелинейного программирования.

6. Созданное программное обеспечение для поиска локально-оптимальных решений задачи OPPS, реализует предложенный метод с использованием IPOPT для решения подзадач нелинейного программирования в процедурах FSPA-S, COMPOLY-S.

7. Тестирование программного обеспечения показало работоспособность предложенных алгоритмов. Предлагаемый подход может быть адаптирован для решения задач оптимальной упаковки произвольных многогранников в произвольных выпуклых контейнерах.

Литература

1. Wascher, G. An improved typology of cutting and packing problems [Text] / G. Wascher, H. Hauner, H. Schumann // European Journal of Operational Research. – 2007. – Vol. 183, Issue 3. – P. 1109–1130. doi: 10.1016/j.ejor.2005.12.047
2. Chazelle, B. The complexity of cutting complexes [Text] / B. Chazelle, H. Edelsbrunner, L. J. Guibas // Discrete & Computational Geometry. – 1989. – Vol. 4, Issue 2. – P. 81–139. doi: 10.1007/bf02187720
3. Cagan, J. A survey of computational approaches to three-dimensional layout problems [Text] / J. Cagan, K. Shimada, S. Yin // Computer-Aided Design. – 2002. – Vol. 34, Issue 8. – P. 597–611. doi: 10.1016/s0010-4485(01)00109-9
4. Sriramya, P. A State-of-the-Art Review of Bin Packing Techniques [Text] / P. Sriramya, P. B. Varthini // Eur. J. Scien. Res. – 2012. – Vol. 86, Issue 3. – P. 360–364.
5. Gan, M. Predicting Packing Characteristics of Particles of Arbitrary Shapes [Text] / M. Gan, N. Gopinathan, X. Jia, R.A. Williams // KONA Powder and Particle Journal. – 2004. – Vol. 22. – P. 82–93. doi: 10.14356/kona.2004012
6. Jia, X. Validation of a digital packing algorithm in predicting powder packing densities [Text] / X. Jia, M. Gan, R.A. Williams, D. Rhodes // Powder Technology. – 2007. – Vol. 174, Issue 1-2. – P. 10–13. doi: 10.1016/j.powtec.2006.10.013
7. De Korte, A. C. J. Random packing of digitized particles [Text] / A. C. J. De Korte, H. J. H. Brouwers // Powder Tech. – 2013. – Vol. 233. – P. 319–324. doi: 10.1016/j.powtec.2012.09.015
8. Li, S.X. Sphere assembly model and relaxation algorithm for packing of non-spherical particles [Text] / S. X. Li, J. Zhao // Chin. J. Comp. Phys. – 2009. – Vol. 26, Issue 3. – P. 167–173.
9. Li, S. X. Maximum packing densities of basic 3D objects [Text] / S. X. Li, J. Zhao, P. Lu, Y. Xie // Chinese Science Bulletin. – 2010. – Vol. 55, Issue 2. – P. 114–119. doi: 10.1007/s11434-009-0650-0
10. Aladahalli, C. Objective function effect based pattern search – theoretical framework inspired by 3D component layout [Text] / C. Aladahalli, J. Cagan, K. Shimada // Journal of Mechanical Design. – 2007. – Vol. 129, Issue 3. – P. 243–254. doi: 10.1115/1.2406095
11. Egeblad, J. Fast neighborhood search for two- and three-dimensional nesting problems [Text] / J. Egeblad, B. K. Nielsen, A. Odgaard // European Journal of Operational Research. – 2007. – Vol. 183, Issue 3. – P. 1249–1266. doi: 10.1016/j.ejor.2005.11.063
12. Fasano, G. MIP-based heuristic for non-standard 3D-packing problems [Text] / G. Fasano // 4OR. – 2008. – Vol. 6, Issue 3. – P. 291–310. doi: 10.1007/s10288-007-0049-1
13. Liu, X. HAP3D – a new constructive algorithm for the 3D irregular packing problem [Text] / Liu X., J.-M. Liu, A.-X. Cao, Z.-L. Yao // Frontiers of Information Technology & Electronic Engineering. – 2015. – Vol. 16, Issue 5. – P. 380–390. doi: 10.1631/fitee.1400421
14. Egeblad, J. Translational packing of arbitrary polytopes [Text] / J. Egeblad, B. K. Nielsen, M. Brazil // Computational Geometry. – 2009. – Vol. 42, Issue 4. – P. 269–288. doi: 10.1016/j.comgeo.2008.06.003
15. Fasano, G. A. Global Optimization point of view for non-standard packing problems [Text] / G. A. Fasano // Journal of Global Optimization. – 2013. – Vol. 55, Issue 2. – P. 279–299. doi: 10.1007/s10898-012-9865-8
16. Stoyan, Y. G. Packing Non-Convex Polytopes into a Parallelepiped [Electronic resource] / Y. G. Stoyan, N. I. Gil, A. Pankratov et al. // Technische Universitat Dresden. – 2004. – Available at: <http://www.math.tu-dresden.de/~scheith/ABSTRACTS/PREPRINTS/04-non-conv.pdf>

17. Chernov, N. Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem [Text] / N. Chernov, Y. Stoyan, T. Romanova // Computational Geometry. – 2010. – Vol. 43, Issue 5. – P. 535–553. doi: 10.1016/j.comgeo.2009.12.003
18. Stoyan, Y. Mathematical modeling of the interaction of non-oriented convex polytopes [Text] / Y. Stoyan, A. Chugay // Cybernetics and Systems Analysis. – 2012. – Vol. 48, Issue 6. – P. 837–845. doi: 10.1007/s10559-012-9463-2
19. Стоян, Ю. Г. Построение свободной от радикалов Ф-функции для шара и неориентированного многогранника [Текст] / Ю. Г. Стоян, А. М. Чугай // Доповіди Національної академії наук України. – 2011. – № 12. – С. 35–40.
20. Stoyan, Y. Quasi-phi-functions and optimal packing of ellipses [Text] / Y. Stoyan, A. Pankratov, T. Romanova // Journal of Global Optimization. – 2015. – P. 1–25. doi: 10.1007/s10898-015-0331-2
21. Fischer, K. Fast Smallest-Enclosing-Ball Computation in High Dimensions [Text] / K. Fischer, B. Gärtner, M. Kutz // Proc. 11th European Symposium on Algorithms (ESA), 2003. – P. 630–641. doi: 10.1007/978-3-540-39658-1_57
22. Belov, G. A Modified Algorithm for Convex Decomposition of 3D Polyhedra [Electronic resource] / G. Belov. – Technical report MATH-NM-03-2002, 2002. – Available at: <http://www.math.tudresden.de/~belov/cd3/cd3.ps>
23. Wachter, A. On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming [Text] / A. Wachter, L.T. Biegler // Mathematical Programming. – 2006. – Vol. 106, Issue 1. – P. 25–57. doi: 10.1007/s10107-004-0559-y

□ □

Запропоновано підхід до формування територіальних громад на основі розбиття графу на окремі підграфи. Розроблено математичну модель такої задачі. Запропоновано використати генетичні алгоритми для розв'язування задачі формування територіальних громад. Апробовано запропонований підхід. Сформовані територіальні громади задовольняють основним обмеженням

Ключові слова: розбиття графу, генетичний алгоритм, NP-повна задача, територіальна громада, населений пункт

□ □

Предложен подход к формированию территориальных общин на основе разбиения графа на отдельные подграфы. Разработана математическая модель такой задачи. Предложено использовать генетические алгоритмы для решения задачи формирования территориальных общин. Апробирован предложенный подход. Сформированные территориальные общины удовлетворяют основным ограничениям

Ключевые слова: разбиение графа, генетический алгоритм, NP-полная задача, территориальная община, населенный пункт

□ □

УДК 004.89
DOI: 10.15587/1729-4061.2016.60848

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ФОРМУВАННЯ ТЕРИТОРІАЛЬНИХ ГРОМАД ЯК ЗАДАЧІ РОЗБИТТЯ ГРАФУ

В. В. Литвин

Доктор технічних наук, професор*
E-mail: vasyli.v.lytvyn@lpnu.ua

Д. І. Угрин

Кандидат технічних наук, доцент
Кафедра інформаційних систем
Чернівецький факультет
Національного технічного університету
«Харківський політехнічний інститут»
вул. Головна, 203А, м. Чернівці, Україна, 58000
E-mail: ugrind@mail.ru

А. М. Фітьо*

E-mail: expertlviv@gmail.com
*Кафедра інформаційних систем та мереж
Національний університет «Львівська політехніка»
вул. С. Бандери, 12, м. Львів, Україна, 79013

1. Вступ

8 квітня 2015 року Кабмін України затвердив розроблену Мінрегіоном Методику формування спроможних територіальних громад (ТГ). Одним з основних її положень є визначення потенційних адміністративних центрів майбутніх територіальних громад. Такими, в першу чергу, визначаються міста обласного значення та населені пункти (НП), що мають статус районних центрів. Метою законопроекту є створення потужних територіальних громад, що дозволить заощадити бюджетні кошти шляхом скоро-

чення держaparату на місцях. Законом України «Про добровільне об'єднання територіальних громад» передбачено, що 2–3 села можуть об'єднатися в громаду [1]. Адміністративними центрами потенційно можуть бути також села, селища, міста, що історично мали статус районних центрів та знаходяться на відстані понад 20 км від міст обласного значення, районних центрів, а також інші населені пункти. Необхідною умовою визначення адміністративного центру спроможної територіальної громади є наявність адміністративних будівель для розміщення органів управління місцевого самоврядування, органу правопорядку, пожежної