

*Розглядається задача ідентифікації розташування жорстких включень в тонкій пластині за результатами непрямих спостережень. Математичну модель пластини з включенням побудовано в рамках лінійної теорії пружності, для дискретизації невідомих функцій використано метод скінченних елементів. Геометрична обернена задача формулюється в умовно-коректній постановці. Наводяться результати визначення місця розташування та пружних властивостей (модуля Юнга) жорстких включень різних розмірів*

*Ключові слова: тонка пластина, жорстке включення, геометрична обернена задача, метод скінченних елементів*

*Рассматривается задача идентификации местоположения жестких включений в тонкой пластине по результатам косвенных наблюдений. Математическая модель пластины с включением описана в рамках линейной теории упругости, для дискретизации неизвестных функций используется метод конечных элементов. Геометрическая обратная задача формулируется в условно-корректной постановке. Приводятся результаты определения местоположения и упругих свойств (модуля Юнга) жестких включений разных размеров*

*Ключевые слова: тонкая пластина, жесткое включение, геометрическая обратная задача, метод конечных элементов*

УДК 539.3

DOI: 10.15587/1729-4061.2016.64395

# ИДЕНТИФИКАЦИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ И УПРУГИХ СВОЙСТВ ЖЕСТКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ В ТОНКОЙ ПЛАСТИНЕ

Н. А. Гук

Доктор физико-математических наук,  
профессор, заведующий кафедрой\*

E-mail: nataly-guk@rambler.ru

Н. И. Степанова

Старший преподаватель\*

\*Кафедра компьютерных технологий  
Днепропетровский национальный  
университет им. О. Гончара  
пр. К. Маркса, 35,  
г. Днепропетровск, Украина, 49000

## 1. Введение

Задача идентификации жестких включений в тонкостенных системах возникает при проведении расчетов инженерных конструкций в самых разных отраслях промышленности. В условиях эксплуатации именно в местах дислокации включений, под воздействием механических и температурных полей, возможно, возникновение и развитие повреждений материала. Особый интерес представляет одновременная идентификация местоположения конечного числа жестких включений и определение их физических свойств. Решение этой задачи позволит более точно оценивать прочностные характеристики тонкостенных элементов и прогнозировать ресурс конструкций. Сказанное делает очевидной актуальность разработки методики определения геометрических параметров и физических свойств жестких включений, опирающейся на возможности современной компьютерной техники и математического моделирования.

## 2. Анализ литературных данных и постановка проблемы

В существующих публикациях по этой тематике задача идентификации дефектов рассматривается в двух аспектах – определяются местоположение и

форма дефекта или физические свойства жестких включений.

Для идентификации местоположения одиночных дефектов развит подход, основанный на применении функционала взаимности и инвариантных интегралов, так в работах [1, 2] параметры дефекта (координаты центра, линейный размер дефекта) выражаются через отличные от нуля значения функционала взаимности в виде явных аналитических выражений. В работах [3, 4] рассматривается задача идентификации конечного числа мелких эллипсоидальных дефектов в анизотропном линейно упругом теле. Предложенные подходы позволяют получить решение задачи идентификации в случаях, когда исследуемая область и дефект имеют каноническую форму.

Для определения физических свойств жесткого включения задача формулируется как коэффициентная обратная задача, неизвестными функциями задачи являются коэффициенты дифференциальных операторов, характеризующие свойства материала [5, 6]. Неизвестные параметры жесткого включения также могут быть определены из решения задачи минимизации целевой функции, которая описывает отклонение измеренных и вычисленных с использованием математической модели прямой задачи значений деформаций или перемещений [7–9]. Для минимизации целевой функции используются классические методы оптимизации в сочетании с

процедурами регуляризации [10] или современные перспективные вычислительные алгоритмы (генетический алгоритм, нейронные сети) [8, 11]. В перчисленных работах отсутствуют результаты по одновременной идентификации физических свойств жесткого включения и его местоположения в теле. В настоящей работе предлагается способ идентификации местоположения и физических свойств жесткого включения (включений) в одном итерационном процессе.

### 3. Цель и задачи исследования

Целью работы является разработка методики определения местоположения и физических свойств жесткого включения в тонкостенной конструкции по результатам измерения значений характерных параметров напряженно-деформированного состояния.

Для достижения данной цели были поставлены следующие задачи:

- сформулировать математическую и расчетную модель для описания процесса деформирования тонкостенной пластины при наличии в ней жестких включений;
- сформулировать обратную задачу в вариационной постановке для определения местоположения и свойств жесткого включения по результатам измерения деформаций пластины;
- разработать алгоритм численной реализации предлагаемой методики;
- с использованием предложенного подхода решить задачи идентификации местоположения и физических свойств тонких включений в тонкостенной пластине.

### 4. Постановка задачи идентификации жесткого включения в тонкостенной пластине по результатам наблюдений

Рассматривается тонкостенная пластина толщины  $2h$ , занимающая конечную область с границей  $\Gamma$ , где  $X = \{X\}$  – вектор координат точек  $X = (x, y)$  области  $G$ ;  $a, b$  – линейные размеры пластины. Будем предполагать, что в пластине имеются  $K$  жестких включений, каждое из которых занимает подобласть  $\omega_k$  с достаточно гладкой границей  $\partial\omega_k$  и лежит строго внутри области  $G$ , т. е.  $\partial\omega_k \cap \Gamma = \emptyset$ . Физические свойства каждого из включений характеризуются упругим модулем  $D_k^*$ , отличаются от свойств основного тела и, возможно, отличаются друг от друга. Упругая часть пластины соответствует области  $G \setminus \bigcup_k \omega_k$ , упругие свойства материала пластины  $D_0$  известны.

Пластина находится под действием нагрузки, нормальной к поверхности пластины. На границе внутренних подобластей  $\omega_k$  и области  $G$ , предполагается полное сцепление, непрерывность векторов перемещений и напряжений. На поверхности пластины, содержащей дефект (дефекты), известны (измерены) значения функции деформации

$$\epsilon(X) = \{\epsilon_{11}(X), \epsilon_{12}(X), \epsilon_{22}(X)\}^T,$$

$$\epsilon_{ij}(X) = \epsilon_{ij}^*, \tag{1}$$

где  $\epsilon_{ij}^*$  – измеренные значения функции деформаций,  $i, j = 1, 2$ .

По результатам косвенных наблюдений за параметрами напряженно-деформированного состояния пластины необходимо решить обратную задачу, т. е. определить местоположение и жесткость включения (включений).

### 5. Математическая модель прямой и обратной задачи

При использовании вариационного подхода математическая формулировка прямой задачи – задачи определения деформаций пластины с включением (включениями) сводится к задаче минимизации функционала потенциальной энергии  $\Pi(w(X))$  на множестве допустимых перемещений  $\bar{W}$ :

$$w = \arg \min_{w \in \bar{W}} \Pi(w(X)), \tag{2}$$

$$\Pi = \int_G (M_{11}\chi_{11} + M_{22}\chi_{22} + 2M_{12}\chi_{12}) dG - \int_G qw(X) dG, \tag{3}$$

где  $q$  – вектор-функция объемной нагрузки;  $w(X)$  – функция перемещений в направлении нормали  $z$  к поверхности пластины.

Кривизны срединной поверхности,  $i, j = 1, 2$  определяются из геометрических соотношений:

$$\begin{aligned} \chi_{11} &= -\partial^2 w(X) / \partial x^2; \\ \chi_{22} &= -\partial^2 w(X) / \partial y^2; \\ \chi_{11} &= -2\partial^2 w(X) / \partial x \partial y. \end{aligned} \tag{4}$$

Выражения для изгибающих моментов  $M_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$  с учетом закона Гука имеют вид:

$$\begin{aligned} M_{11} &= -D(\chi_{11} + \nu\chi_{22}); \\ M_{22} &= -D(\chi_{22} + \nu\chi_{11}); \\ M_{12} &= -(1 - \nu)D\chi_{12}, \end{aligned}$$

где  $D$  – изгибная жесткость пластины с включением.

Изгибная жесткость пластины с включением представляется в виде:

$$D = D_0 + \sum_k D_k^* u_k,$$

где  $D_0 = E_0 h^3 / (12(1 - \nu^2))$  – изгибная жесткость пластины без включения;  $E_0$  – модуль Юнга материала пластины;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $D_k^*$  – изгибная жесткость  $k$ -ого включения,  $k = \overline{1, N}$ .

Вектор  $\{u_k(X)\}$  описывает местоположение включений:

$$u_k(X) = \begin{cases} 1, & \text{если включение находится в точке } X_k; \\ 0, & \text{если включение отсутствует в точке } X_k. \end{cases} \tag{5}$$

Тогда неизвестными обратной задачи являются компоненты вектора  $H(X) = \{D_k^*, u_k(X)\}$ ,  $k = \overline{1, N}$ . Вектор

неизвестных определяется из решения задачи (2) при выполнении дополнительных условий (1):

$$\begin{aligned} \epsilon_{11}^* &= -h\chi_{11} \Big|_{z=h}; \\ \epsilon_{22}^* &= -h\chi_{22} \Big|_{z=h}; \\ \epsilon_{12}^* &= -2h\chi_{12} \Big|_{z=h}. \end{aligned}$$

Значения компонент вектор-функции деформации  $\epsilon_{ij}$ ,  $i, j=1,2$  определяются из решения прямой задачи (2)–(5) при известных значениях функции  $H(X) = \{D_k^*, u_k(X)\}$ .

Задача (2)–(5) дополняется граничными условиями для свободных кромок  $y=0, y=b$ , которые являются естественными для уравнения (2) и условиями жесткого защемления кромок пластины  $x=0, x=a$ , которые формулируются в виде:

$$\begin{aligned} w(0) &= w_x'(0); \\ w(a) &= w_x'(a). \end{aligned} \tag{6}$$

Таким образом, сформулированы математические модели для решения прямой задачи деформирования пластины с включением и обратной задачи идентификация местоположения и физических свойств жесткого включения.

### 6. Метод решения обратной задачи

Для решения сформулированной обратной задачи присоединим условия (1) к функционалу (2) с помощью множителей Лагранжа. Тогда функционал качества будет иметь вид:

$$\begin{aligned} J(D^*, u(X), \lambda) &= \int_G \left[ \left( D_0 + \sum_k D_k^* u_k(X) \right) \nabla^2 w(X) \nabla^2 w(X) + \right. \\ &+ q w(X) + \lambda (\epsilon(X) - \epsilon^*)^2 \Big] dG; \end{aligned} \tag{7}$$

$$u_k(X) \in \bar{U}; w \in \bar{W}; D_k^* \in \bar{D},$$

где  $\bar{U}, \bar{W}, \bar{D}$  – области определения неизвестных функций задачи;  $\lambda$  – множитель Лагранжа, который определяется из условия  $\epsilon(X) - \epsilon^* = 0$ .

Вектор неизвестных задачи представляется в виде  $\theta = \{u_k(X), w(X), \lambda, D_k^*\}$ ,  $k=1, N$  и определяется из условия:

$$\theta = \arg \min_{D_k^*, u, w, \lambda} J(D_k^*, u(X), w(X)). \tag{8}$$

Для построения решения обратной задачи введем множество  $\Omega = \{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m\}$   $N$ -мерных векторов  $\Omega_m = \{0, 0, \dots, X_k, \dots, 0\}$ , компоненты которых принимают значение  $X_k$ , если в т.  $X_k$  расположено включение, а на местах остальных  $(N - K)$  компонент располагаются нули.

Тогда функции (5) определим как характеристические функции подмножеств  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$ ,  $m=1, C_N^K$  в виде [10]:

$$u_k(X) = \begin{cases} 1, & \text{если } X_i \in \Omega_m, \\ 0, & \text{если } X_i \in \Omega \setminus \Omega_m, \end{cases} \quad i = \overline{1, N}.$$

Для решения задачи необходимо найти вектор-функцию  $u(\cdot) = (u_1(\cdot), u_2(\cdot), \dots, u_N(\cdot)) \in \bar{U}$ , значение  $\lambda$  и вектор значений упругих модулей  $D^* = \{D_k^*\}$ ,  $k=1, N$ , при которых

$$J(D^*, u(X), w(X)) \rightarrow \min_{(D^*, u(\cdot), w) \in \bar{D} \times \bar{U} \times \bar{W}}, \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \{u(X) = (u_1(X), u_2(X), \dots, u_N(X))\}; \sum_i u_i(X) = \\ &= K; u_i(X) = 0 \vee 1. \end{aligned}$$

Пусть  $\Theta(X) = \{\tilde{D}^*, \tilde{u}, \tilde{w}(X), \tilde{\lambda}\}$  – возможное решение задачи (8). Дадим функции  $u(X)$  приращение  $\Delta u$  такое, что выполняются следующие условия:

$$\tilde{u}(X) = \Delta u(X) \in \bar{U}; \sum_{i=1}^N (u_i(X) + \Delta u_i(X)) = K.$$

Это означает [11], что  $\Delta u_i(X) \in \bar{U}_\Delta, \forall X \in G$ , где

$$\begin{aligned} \bar{U}_\Delta &= \{\tilde{u}(X) = (u_1(X), u_2(X), \dots, u_N(X)); \sum_{i=1}^N \Delta u_i(X) = \\ &= 0, -1 \leq u_i(X) \leq 1; i = \overline{1, N}\}. \end{aligned}$$

Приращение  $\Delta u_i(X)$  вызывает приращение всех неизвестных функций задачи и функций граничных условий. Линеаризованный функционал  $J(D^*, u(X), w(X), \lambda)$  из (7) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} J(D^*, u + \Delta u, w(X)) &= J(D^*, u, w(X)) + \\ &+ \int_G \sum_i D_i^* \nabla^2 w(X) \nabla^2 w(X) \Delta u_i(X) dG. \end{aligned} \tag{10}$$

Для того чтобы возможное решение  $\Theta(X) = \{\tilde{D}^*, \tilde{u}(X), \tilde{w}(X), \tilde{\lambda}\}$  было оптимальным необходимо, чтобы для всех допустимых приращений  $\Delta u_i(X) \in \bar{U}_\Delta$  выполнялись условия:

$$\int_G \sum_i \nabla^2 w(X) \nabla^2 w(X) \Delta u_i(X) dG \geq 0, \quad i = \overline{1, N}, \tag{11}$$

где  $w(X)$  удовлетворяет (7) при фиксированном векторе  $u(X)$ , а множитель  $\lambda$  удовлетворяет условиям (1). Заменим условие (11) условием минимума значений интегралов в (10), т. е.

$$\sum_i \int_G \nabla^2 w(X) \nabla^2 w(X) \Delta u_i(X) dG \rightarrow \min_{\Delta u \in \bar{U}_u}, \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned} \bar{U}_u &= \{\Delta u = (\Delta u_1(X), \Delta u_2(X), \dots, \Delta u_N(X)); \\ &\sum_{i=1}^N \Delta u_i(X) = 0; -1 \leq u_i(X) + \Delta u_i(X) \leq 1; i = \overline{1, N}\}. \end{aligned}$$

При этом допустимое приращение  $\Delta u(X) \in \bar{U}$  удовлетворяет следующим условиям:

$$\text{если } u_k(X) = \begin{cases} 1, & \text{тогда } -1 \leq \Delta u_i(X) \leq 0; \\ 0, & \text{тогда } 0 \leq \Delta u_i(X) \leq 1, \end{cases}$$

и справедливо условие:

$$\sum_{i=1}^N \Delta u_i(X) = 0. \tag{13}$$

Используя условие (13) и подставляя выражение  $\Delta u_k(X) = - \sum_{i=1}^N u_i(X)$  в условие (12), имеем:

$$\sum_{i=1}^N (\nabla^2 w(X_i) \nabla^2 w(X_i) - \nabla^2 w(X_k) \nabla^2 w(X_k)) \Delta u_i \rightarrow \min_{\substack{0 \leq \Delta u_i \leq 1 \\ \forall i, i \neq k}}. \quad (14)$$

Тогда, если  $\forall i, i = \overline{1, N}, i \neq k$  выполняется условие

$$\sum_{i=1}^N (\nabla^2 w(X_i) \nabla^2 w(X_i) - \nabla^2 w(X_k) \nabla^2 w(X_k)) \geq 0,$$

то минимальное значение целевой функции в (14) достигается при  $\Delta u_i(X) = 0, \forall i, i = \overline{1, N}, i \neq k$  а, следовательно, соответствующий вектор  $u$  является оптимальным для задачи (9).

Для построения решения задачи осуществляется переход к дискретной модели пластины с использованием метода конечных элементов (МКЭ). Для этого на области  $G$  вводятся сетки: сетка с узлами  $X_n$  для описания неизвестных функций  $w(X) = \{w_n\}$  прямой задачи; сетка с узлами  $X_p$  для описания координат точек измерений; сетка с узлами  $X_k$  для описания координат точек, в которых имеется включение, тогда функция  $\Theta(X)$  представляется в виде вектора

$$\Theta = \{D_k^*, u_k, w_k, \lambda_p\}, \quad k = \overline{1, K}, \quad n = \overline{1, N}, \quad p = \overline{1, P}.$$

С использованием введенной дискретизации неизвестные функции задачи задаются на элементе при помощи аппроксимаций через узловые значения. Связь между деформациями и перемещениями на элементе устанавливается геометрическими соотношениями, векторная форма которых имеет вид

$$\{\epsilon_{in}\} = [B] \{w_n\},$$

где  $[B]$  – матрица дифференцирования.

После выполнения процедур МКЭ, функционал (7) может быть представлен следующим образом:

$$\bar{J}(D^*, u, w) = \sum_i \sum_j (a_{ij} + b_{ij} u_j) w_j - q_i w_i + \sum_p \lambda_p^T (B_p w_p - \epsilon_p^*), \quad (15)$$

$$i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, N}, \quad p = \overline{1, P},$$

где  $w = \{w_j^T\}$  – вектор значений нормальных перемещений в узлах пластины;  $q = \{q_i\}$  – вектор нагрузки;  $(a_{ij} + b_{ij} u_j)$  – матрица жесткости ансамбля конечных элементов;  $a_{ij}, b_{ij}$  – коэффициенты, причем компоненты  $a_{ij}$  характеризуют жесткость пластины без включения;  $b_{ij}$  – слагаемые, обусловленные наличием жестких включений;  $\{u_j\}$  – вектор, характеризующий наличие включений в узлах пластины;  $B_p$  – коэффициенты, определяемые из условия аппроксимации функции  $w(X)$  внутри конечного элемента и геометрических соотношений (4).

Необходимые условия стационарности для функции (15) по переменным  $w_n, D_k^*$  и  $\lambda_p$  приводят к следующей системе уравнений:

$$\forall i, i = \overline{1, N}, \quad \forall j, j = \overline{1, N}, \quad \text{таких, что } i \neq p, \quad p = \overline{1, P},$$

$$\sum_j (a_{ij} + b_{ij} u_j) w_j + q_i = 0, \quad (16)$$

$$\partial \bar{J}_{i \neq p} / \partial D_k^* = 0, \quad k = \overline{1, N}; \quad (17)$$

$$\forall i, i = \overline{1, N}, \quad \forall j, j = \overline{1, N}, \quad \text{таких, что } i = p, \quad p = \overline{1, P},$$

$$\left[ \sum_j (a_{ij} + b_{ij} u_j) w_j + q_i + 2 \sum_p \lambda_p \Delta_p \right] = 0, \quad (18)$$

$$\partial \bar{J}_{i=p} / \partial D_k^* = 0, \quad k = \overline{1, N}; \quad (19)$$

$$\forall p, p = \overline{1, P},$$

$$\Delta_p = 0, \quad (20)$$

где  $\bar{J}$  – значение функции (15) при соответствующих значениях переменных;  $\Delta_p = (B_p w_p - \epsilon_p)$  – вектор невязок, описывающий условие (1).

## 7. Результаты численного эксперимента

Разработанная методика была описана соответствующим алгоритмом и реализована процедурой. В качестве примера численной реализации предложенного подхода рассмотрены:

– **задача 1** об определении параметров прямоугольного включения (центр включения расположен в точке  $x_0 = 0.12$  м,  $y_0 = 0.14$  м; линейные размеры включения  $a_0 = 0.02$  м,  $b_0 = 0.02$  м; модуль Юнга материала включения  $E = 1.78 \cdot 10^{14}$  Н/м<sup>2</sup>) в тонкой прямоугольной пластине ( $a_0 = 0.02$  м,  $b_0 = 0.02$  м,  $h = 0.001$  м,  $E = 2 \cdot 10^6$  Н/м<sup>2</sup>;  $a, b, 2h$  – длина, ширина, толщина пластины) по измеренным значениям деформаций;

– **задача 2** об определении параметров трех отстоящих друг от друга прямоугольных включений с разными физическими свойствами (включение 1: центр  $x_1 = 0.12$  м,  $y_1 = 0.14$  м, линейные размеры включения  $a_1 = 0.02$  м,  $b_1 = 0.02$  м, модуль Юнга материала включения  $E = 1.78 \cdot 10^{14}$  Н/м<sup>2</sup>; включение 2:  $x_2 = 0.04$  м,  $y_2 = 0.05$  м,  $a_2 = 0.02$  м,  $b_2 = 0.01$  м,  $E = 1.6 \cdot 10^{14}$  Н/м<sup>2</sup>; включение 3:  $x_3 = 0.145$  м,  $y_3 = 0.075$  м,  $a_3 = 0.01$  м,  $b_3 = 0.01$  м,  $E = 2.1 \cdot 10^{14}$  Н/м<sup>2</sup>).

Соответствующие модели пластин представлены на рис. 1.

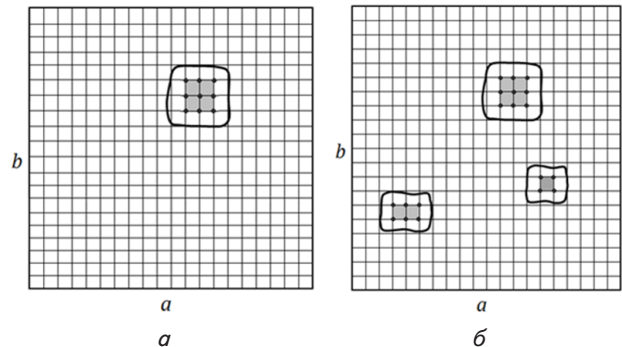


Рис. 1. Модели пластин с включениями: а – задача 1; б – задача 2

Деформации пластины с включением (включения) под действием нагрузки фиксируются датчиками измерения деформаций на поверхности пластины. Решение задачи (2), (3), (6), моделирующее процесс изме-

рения деформаций пластины с включением, выполнялось с использованием пакета прикладных программ, реализующих метод конечных элементов.

В проведенных вычислительных экспериментах узлы измерения значений деформаций на поверхности пластины располагались равномерно, общее количество точек измерений  $P=72$ .

На рис. 2, а, б для задачи 1 представлены деформации  $\epsilon_{11}$  и  $\epsilon_{22}$  пластины на разных итерациях процедуры идентификации. Зависимости построены в характерном сечении пластины при  $y=0.14$  м.

В качестве начального приближения для итерационного процесса выбрана однородная пластина.

На рис. 3, а, б приведены результаты идентификации местоположения жесткого включения и модуля Юнга материала включения, полученные с использованием предложенного подхода.

На рис. 3, а действительное включение обозначено серым фоном, результат идентификации местоположения этого включения показан жирной линией. Узлы начального приближения выделены жирными точками, крестиками показаны узлы, исключенные из рассмотрения на первой итерации. Результирующий вектор получен в

результате 7 итераций, погрешность восстановления местоположения включения составляет не более 3 %.

Одновременно с определением местоположения дефекта были идентифицированы физические свойства включения. Погрешность восстановления модуля Юнга (рис. 3, б) не превосходит 2 %.

В табл. 1 приведены результаты, полученные при идентификации параметров трех отстоящих друг от друга прямоугольных включений с разными физическими свойствами (включение 1: центр  $x_1=0.12$  м,  $y_1=0.14$  м, линейные размеры включения  $a_1=0.02$  м,  $b_1=0.02$  м, модуль Юнга материала включения  $E=1.78 \cdot 10^{14}$  Н/м<sup>2</sup>; включение 2:  $x_2=0.04$  м,  $y_2=0.05$  м,  $a_2=0.02$  м,  $b_2=0.01$  м,  $E=1.6 \cdot 10^{14}$  Н/м<sup>2</sup>; включение 3:  $x_3=0.145$  м,  $y_3=0.075$  м,  $a_3=0.01$  м,  $b_3=0.01$  м,  $E=2.1 \cdot 10^{14}$  Н/м<sup>2</sup>).

Из анализа табл. 1 можно видеть, что большая погрешность возникает при идентификации свойств более мелких включений, однако представленные результаты свидетельствуют о высокой эффективности предложенного подхода к решению задачи идентификации местоположения и свойств жестких включений по результатам наблюдений за параметрами напряженно-деформированного состояния пластины.

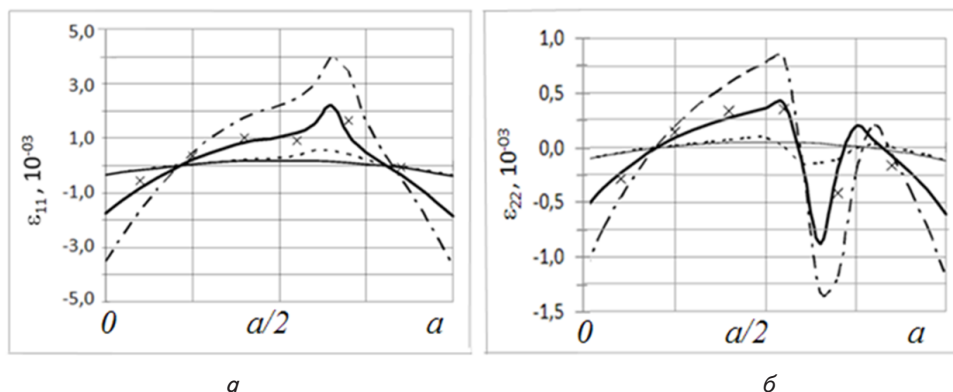


Рис. 2. Деформации пластины (задача 1) в характерном сечении пластины при  $y=0.14$  м на итерациях процедуры идентификации: а –  $\epsilon_{11}$ ; б –  $\epsilon_{22}$ ; ..... – начальное приближение итерационного процесса; - - - - значения деформаций, полученные на 3 итерации; - · - · - значения деформаций, полученные на 5 итерации; — — — результирующие значения деформаций (7 итераций); × – измеренные значения деформаций

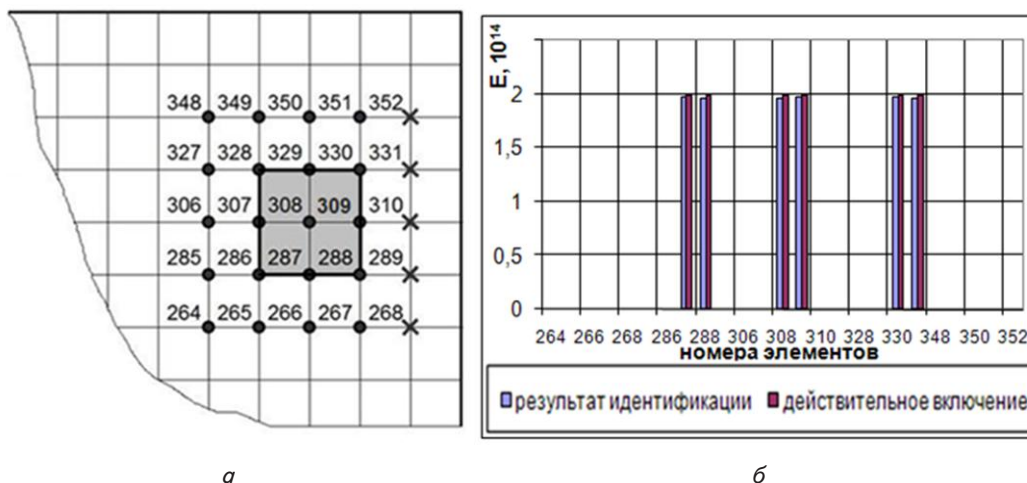


Рис. 3. Результаты идентификации жесткого включения для задачи 1: а – местоположение включения; б – модуль Юнга материала включения



Результаты идентификации включений в задаче 2

Местоположение включения (номера узлов)		Модуль Юнга включения, $E, 10^{14} \text{ Н/м}^2$		Погрешность восстановления модуля Юнга
действительного	идентифицированного	действительного	идентифицированного	
Включение 1				
287, 288, 289, 308, 309, 310, 329, 330, 331	286, 287, 288, 307, 308, 309, 310, 328, 329, 330	1.78	1.84	3.2 %
Включение 2				
109, 110, 111, 130, 131, 132	110, 111, 112, 131, 132, 133	1.6	1.85	6.9 %
Включение 3				
163, 164, 229, 230	163, 164, 229, 230	2.1	2.2	4.5 %

**8. Выводы**

Предложена методика идентификации в одном итерационном процессе местоположения и физических свойств жестких включений в тонкостенной системе по результатам измерения значений деформаций. При разработке методики:

1. Построена математическая модель прямой задачи деформирования пластины с включением (включениями) в вариационной постановке как задача минимизации функционала потенциальной энергии пластины. Расчетная модель пластины с включением построена с использованием метода конечных элементов.

2. Сформулирована математическая модель обратной задачи в вариационной постановке с учетом ограничений на равенство измеренных и вычисленных с использованием математической модели прямой задачи значений деформаций.

3. Разработан алгоритм численной реализации методики идентификации жесткого включения с использованием характеристических функций, описывающих местоположение включений, и функции жесткости пластины с включением, представленной параметрически.

Приводятся результаты идентификации местоположения и физических свойств одиночного жесткого включения и нескольких отстоящих друг от друга жестких включений различных размеров. Предложенный способ описания области дефекта и разработанный алгоритм идентификации позволяют определить геометрические характеристики и упругие свойства (модуль Юнга) включения в одном итерационном процессе.

Результаты численного эксперимента показали, что разработанный подход дает возможность с хорошей точностью идентифицировать местоположение включений в тонкостенной системе по результатам измерений значений деформаций.

Литература

- Goldstein, R. V. Application of invariant integrals to the problems of defect identification [Text] / R. V. Goldstein, E. I. Shifrin, P. S. Shushpannikov // International Journal of Fracture. – 2007. – Vol. 147, Issue 1-4. – P. 45–54. doi: 10.1007/s10704-007-9125-y
- Goldstein, R. V. Application of invariant integrals to elastostatic inverse problems [Text] / R. V. Goldstein, E. I. Shifrin, P. S. Shushpannikov // Comptes Rendus Mecanique. – 2008. – Vol. 336, Issue 1-2. – P. 108–117. doi: 10.1016/j.crme.2007.11.002
- Kang, H. Numerical Recognition of a Cluster of Small Elliptic Inclusions [Text] / H. Kang, E. Kim, J.-Y. Lee // Inverse Problems. – 2007. – Vol. 23, Issue 6. – P. 2311–2314. doi: 10.1088/0266-5611/23/6/002
- Shifrin, E. I. Identification of finitely many small defects in an anisotropic linearly elastic body from a single static test [Text] / E. I. Shifrin, P. S. Shushpannikov // Mechanics of Solid. – 2015. – Vol. 50, Issue 4. – P. 421–431. doi: 10.3103/s0025654415040081
- Ammari, H. Reconstruction of Closely Spaced Small Inclusions [Text] / H. Ammari, H. Kang, E. Kim, M. Lim // SIAM Journal on Numerical Analysis. – 2005. – Vol. 42, Issue 6. – P. 2408–2428. doi: 10.1137/s0036142903422752
- Baratchart, L. Recovery of pointwise sources or small inclusions in 2D domains and rational approximation [Text] / L. Batatchart, A. Ben Abda, E. Ben Hassen, J. Leblond // Inverse Problems. – 2005. – Vol. 21, Issue 1. – P. 51–74. doi: 10.1088/0266-5611/21/1/005
- Kang, H. Identification of elastic inclusions and elastic moment tensors by boundary measurements [Text] / H. Kang, E. Kim, J.-Y. Lee // Inverse Problems. – 2003. – Vol. 19, Issue 3. – P. 703–724. doi: 10.1088/0266-5611/19/3/314
- Khoddad, M. Investigation of Effect of Different Boundary Conditions on the Identification of a Cavity inside Solid Bodies [Text] / M. Khoddad, M. D. Ardakani // Int. J. Adv. Des. Manufact. Tech. – 2011. – Vol. 4. – P. 9–17.
- Morassi, A. Detecting Rigid Inclusions, or Cavities, in an Elastic Body [Text] / A. Morassi, E. Rosset // Journal of Elasticity. – 2003. – Vol. 73, Issue 1-3. – P. 101–126. doi: 10.1023/b:elas.0000029955.79981.1d
- Ameur, H. B. Level Set Methods for Geometric Inverse Problems in Linear Elasticity [Text] / H. B. Ameur, M. Burger, B. Hackl // Inverse Problems. – 2004. – Vol. 20, Issue 3. – P. 673–696. doi: 10.1088/0266-5611/20/3/003
- Engelhardt, M. Defect Identification in 3-D Elastostatics Using a Genetic Algorithm [Text] / M. Engelhardt, M. Schanz, G. E. Stavroulakis, H. Antes // Optimization and Engineering. – 2006. – Vol. 7, Issue 1. – P. 63–79. doi: 10.1007/s11081-006-6591-4