

**Важкі умови роботи пакеров, що використовуються для роз'єднання частин стовбура свердловини по вертикалі і герметизації порушених ділянок обсадної колони, призводять до необхідності всебічного дослідження напружено-деформованого стану елемента ущільнювача. Показано, що на основі вибору координатних функцій в функціоналі потенційної енергії деформації можна врахувати фактор стисливості гуми як ущільнювача свердловинних пакеров. Наведені результати підтверджують, що стисливість гуми має істотний вплив на жорсткість елемента ущільнювача пакеров і даний фактор обов'язково повинен враховуватися в аналітичному опису його напружено-деформованого стану**

**Ключові слова:** гума малої стисливості, свердловинний пакер, принцип Лагранжа, коефіцієнт посилювання, нормальне і дотичне напруження

**Тяжелые условия работы пакеров, служащих для разобщения частей ствола скважины по вертикали и герметизации нарушенных участков обсадной колонны, приводят к необходимости всестороннего исследования напряженно-деформированного состояния уплотнительного элемента. Показано, что на основе выбора координатных функций в функционале потенциальной энергии деформации можно учесть фактор сжимаемости резины как уплотнителя скважинных пакеров. Приведенные результаты подтверждают, что сжимаемость резины оказывает существенное влияние на жесткость уплотнительного элемента пакеров и данный фактор обязательно должен учитываться в аналитическом описании его напряженно-деформированного состояния**

**Ключевые слова:** резина малой сжимаемости, скважинный пакер, принцип Лагранжа, коэффициент ужесточения, нормальное и касательное напряжения

УДК 622.245.44:622.276.56.05

DOI: 10.15587/1729-4061.2016.67147

# ВЛИЯНИЕ МАЛОЙ СЖИМАЕМОСТИ РЕЗИНЫ НА РАБОТУ УПЛОТНИТЕЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА СКВАЖЕННОГО ПАКЕРА

**В. Т. Мамедов**

Доктор технических наук,  
профессор, заведующий кафедрой  
Кафедра «Нефтегазовое оборудование»  
Азербайджанский государственный  
университет нефти и промышленности  
пр. Азадлыг, 20, г. Баку, Азербайджан, AZ1010  
E-mail: vasif.mamaedov\_adnsu@mail.ru

**С. Р. Гурбанов**

Доктор философии  
Азербайджанская республиканская  
нефтяная компания (SOCAR)  
пр. Нефтенников, 73, г. Баку,  
Азербайджан, AZ1000  
E-mail: ramiz.gurbanov@yahoo.com

## 1. Введение

Специфической особенностью работы комплексов подземного оборудования в действующих нефтяных и газовых скважинах является их эксплуатация на больших глубинах. Причем условия эксплуатации узлов характеризуются агрессивностью среды, высокими температурами и давлениями. Именно поэтому применяются комплексы подземного скважинного оборудования, состоящие из специальных узлов, включающих десятки резиновых уплотнений различной конструкции. Каждое уплотнительное кольцо имеет усилие сжатия (при диаметре 50–100 мм) в 0,4–0,5 кН [1]. Пакеры, применяемые в качестве уплотнений в оборудовании для добычи нефти и газа, обладают той особенностью, что в уплотняемое отверстие они легко проходят в недеформированном состоянии. Активация пакера перед началом работы предполагает сжатие его в осевом направлении, в результате чего резиновый элемент расширяется в радиальном направлении, полностью заполняя отверстие. Часто пакером называют

также весь узел, включающий механизм активации и всю металлическую оснастку вокруг резинового элемента [2, 3]. Резиновые подвижные уплотнения, применяемые в скважинных пакерах и герметизирующих ствол скважины, имеют в основном цилиндрическую форму, причем наиболее известная форма пакера представляет собой цилиндр со скошенными кромками. Наряду с этим, известны варианты использования конструкций, реализующих эффект самоуплотнения, например с помощью резиновых элементов не цилиндрической, а конической формы [2]. Выбор конструкции пакера очень важен, ведь именно от неё в большей степени зависит эффективность его работы в нефтепромысловых процессах, таких как изыскательные работы по разведке, раздельная эксплуатация нефтяных и газовых скважин, проведение различных геолого-технических мероприятий, уплотнение узлов нефтепромыслового оборудования и регулирующий аппаратуры химических производств [4]. Для разобщения горизонтальной части продуктивного пласта известно использование разбухающих пакеров. При

этом наибольший эффект достигается при использовании спаренных пакеров: пакера, разбухающего при контакте с флюидами на водной основе, и пакера, разбухающего при контакте с флюидами на углеводородной основе. Особенностью их конструкции являются эластомерные компоненты, которые при контакте со скважинными флюидами, поверхностной водой или буровым раствором увеличиваются в объеме почти в 3 раза относительно объема, занимаемого до спуска в скважину. Использование таких пакеров существенно облегчает работы по спуску нижнего закачивания и позволяет эффективно разобщить горизонтальный ствол скважины на участки [5]. Однако, как указано в данной работе, необходимо учитывать особенности эксплуатации разбухающих пакеров: применение данных типов пакеров в газовых скважинах оказывается малоэффективным. Особенности конструкции, применяемых материалов и анализ факторов, влияющих на эксплуатационные показатели пакеров, описаны в работе [6], в которой, в частности, приведены и типовые прочностные расчеты. Вместе с тем, необходимо отметить, что прочностной расчет пакера, выполняемый в «типовой» форме, не может учитывать все многообразие факторов, присущих особенностям их эксплуатации. Тот же вывод может быть сделан относительно превалирования конструктивных составляющих, рассматриваемых с точки зрения приоритетности геометрии уплотнителей. Материал уплотнителя, определяющий возможности деформации в радиальном направлении при активации пакера осевым сжимающим усилием, является тем фактором, без учета которого показатели работоспособности и надежности пакера могут не соответствовать заданным. Поэтому следует признать актуальными исследования, направленные на повышение точности расчетов, резервом которого и является возможность учета многофакторного влияния на напряженно-деформированное состояние пакера в активированном состоянии.

## 2. Анализ литературных данных и постановка проблемы

Выбор материала для уплотнительных элементов пакера, как следует из ряда опубликованных работ последних 5 лет, привлекает ряд исследователей в качестве фактора повышения эксплуатационной эффективности уплотнения [7–10]. В этой связи рассматриваются разные подходы: подбор наиболее рациональных технологических схем установки [7], композиционных материалов, составляющих альтернативу традиционным уплотнительным материалам для скважин [8–9], анализ свойств различных уплотнительных материалов с целью выбора более предпочтительного для данных условий. Интерес к выбору уплотнительных элементов выявлен и непосредственно у производителей, идущих при решении данной задачи «от практики». Так, например, в работе [11] анонсировано создание четырёх новых типов уплотнительных колец из разных материалов, а в работе [12] делается обоснование эффективности использования гидравлических пакеров с металлическими уплотнительными элементами из высокопластичных и термостойких сплавов. Такие пакеры, как отмечают авторы [12], имеют существенные преимущества по сравнению с аналогичными по на-

значению пакерами, имеющими резиноканевые или полиуретановые уплотнительные элементы. Модель исполнения эластомера как уплотнения в нефтяных скважинах описана в работе [13], в которой аналитически исследована деформация эластомерного уплотнения, заключенного между металлической трубой и жестким корпусом. Опубликованные автором результаты показывают влияние геометрии эластомера и свойств его материала на производительность уплотнения, оцениваемую с точки зрения максимального давления уплотнения. Таким образом, найдено распределение давления запечатывания вдоль осевого направления эластомера в зависимости от степени сжатия, геометрии уплотнения и свойств материала. Вопросы коррозионной стойкости эластомеров нашли отражение в работе [14], в которой авторы особо отметили то обстоятельство, что резиновая втулка, используемая в качестве уплотнительного элемента, подвержена коррозии или разрушениям в условиях кислой среды, что приводит к утечке газа и проблемам безопасности ствола скважины. В работе описаны коррозионные испытания, проводимые на фторэластомере AFLAS, позиционируемом производителем как наиболее подходящий эластомер для изделий и систем, предназначенных для эксплуатации в жестких условиях. Испытания проводились с давлением 60 МПа, температурой 175 °С, с составом газовой фазы 20 % H<sub>2</sub>S, 5 % CO<sub>2</sub>, 75 % CH<sub>4</sub> в течение тестового периода 7 дней. В результате экспериментов было показано, что, несмотря на хорошую стойкость к растворению, растягивающие свойства AFLAS каучука были ослаблены, твердость уменьшилась, а остаточная деформация увеличилась. Поэтому сделан вывод о том, что суровые условия эксплуатации в коррозионной среде обязательно должны быть учтены. Механизмы водород-индуцированного разрушения уплотнений описаны в работе [15] и их выявление позволяет оценить существенность химического разложения в результате воздействия водорода под высоким давлением – до 90 МПа, и температуре от –60 до +100 °С. Вопросам оценки индекса систем резиновых материалов для герметизации посвящена работа [16], в которой учтены такие параметры, как природа резиновых материалов, превалирующие условия работы, трение и износ, старение, производительность и экономическая эффективность.

Подобные исследования, ориентированные на выявление факторов воздействия агрессивной среды на стойкость и эксплуатационную эффективность уплотнений пакеров, безусловно, оказывают стимулирующий эффект на производителей, создающих уплотнения на основе новых композитов. В этой связи следует упомянуть швейцарскую компанию Dätwyler Schweiz Ag и Victrex Polymer Solutions, а также подразделение британской компании Victrex Plc. Их усилиями совместно разработан композитный материал, сочетающий в себе Victrex полиэфирэфиркетон (PEЕК) полимер с резиной [17].

Тем не менее, несмотря на серьезность проблемы, обращает на себя внимание тот факт, что в научной периодике не находят должного отражения результаты исследований, посвященных напряженно-деформированному состоянию уплотнительных элементов пакеров. И хотя сектор подобного рода исследований занят преимущественно задачами контактного взаимодействия для за-

дач гидродинамики [18–21], их результаты не могут быть перенесены непосредственно в область эффективного проектирования пакеров. При этом смещение акцентов в сторону исследований стойкости уплотнительных элементов в агрессивных средах без учета реального напряженно-деформированного состояния пакера и его эксплуатации в подобном рода средах, не позволяет говорить о создании оптимальных конструкций. Иными словами, существуют ограничения, накладываемые на проектирование оптимальных конструкций неполным пониманием процессов формирования напряженно-деформированного состояния. А ведь резиновые уплотнители, упирающиеся в металлические кольца (плиты), оказывают воздействие на торцы уплотнительного узла пакера, что приводит к созданию сложного напряженно-деформированного состояния [22, 23]. Причем в процессе уплотнения поперечная деформация резины в подвижных узлах стеснена настолько, что большой объем резины находится в условиях всестороннего сжатия, близкого к равномерному. В этом случае предположение об абсолютной несжимаемости резинового манжета [24, 25] может привести к значительному завышению жесткости уплотнения.

Учитывая то, что резиновые уплотнители используется как уплотнения ствола скважин для различных видов пакеров (с одно- и двухпроходными сечениями) механическими, гидромеханическими и гидравлическими управлениями, представляется обоснованным вывод о том, что надежная работа уплотнения, гарантирующая заданный срок службы, и является критерием эффективности работы пакера. При этом, без учета сжимаемости резины достичь определенного повышения герметизации не представляется возможным. Следовательно, конструктор, создавая уплотнение (пакер), должен уметь достаточно точно предсказать основные механические характеристики уплотнения: учет малой сжимаемости резины в работе уплотнения; жесткость при разных видах нагружения; размеры контактных поверхностей уплотняющих деталей; изменение механических показателей во времени и сроки службы уплотнения. Исследования в этом направлении и позволили ли бы заполнить область знаний, необходимых для оптимизации конструкции пакеров по критериям надежности их работы в жестких условиях эксплуатации.

### 3. Цель и задачи исследования

Целью работы является расчет резиновых уплотнителей скважинных пакеров, с учетом влияния малой их сжимаемости, на работу уплотнения.

Для достижения поставленной цели решались следующие задачи:

- описание осесимметричной задачи теории упругости и выбор координатных функций в первом решении задачи;
- вычисление полной потенциальной энергии уплотнительных систем и её минимизация;
- определение осевой деформации (осадки) уплотнительной элемента скважинного пакера и его напряженно-деформированного состояния;
- проведение численных расчетов для количественной оценки малой сжимаемости уплотнительного элемента.

### 4. Материалы и методы исследований влияния малой сжимаемости резинового уплотнителя скважинного пакера на его работоспособность

В работах, посвященных исследованию работоспособности резиновых элементов, не дается оценка влиянию сжимаемости резины [26–30], поэтому представляется целесообразным рассмотрение задачи об оценке влияния малой сжимаемости резинового уплотнителя скважинного пакера. Поставленная задача решается на основе вариационного принципа Лагранжа методом Канторовича, различные этапы решений в котором состоят в выборе координатных функций [31, 32].

Рассмотрим задачу о сжатии цилиндрического уплотнительного элемента скважинного пакера с учетом малой сжимаемости.

Примем, что ось  $z$  является осью симметрии тела, а ось  $r$  перпендикулярна к оси  $z$ . Тогда уравнение равновесия в цилиндрических координатах будет иметь следующей вид:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} = 0, \quad (2)$$

где  $\sigma_r, \sigma_z, \sigma_\theta$  – нормальные напряжения;  $\tau_{rz}$  – касательная напряжения.

На основе нижеследующих компонентов деформации и законе Гука для изотропного тела

$$\epsilon_r = \frac{\partial W}{\partial z}; \quad \epsilon_r = \frac{\partial U}{\partial r}; \quad \epsilon_\theta = \frac{\partial U}{\partial r}; \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z}; \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \lambda \gamma + 2G \epsilon_r; \\ \sigma_z &= \lambda \epsilon + 2G \epsilon_z; \\ \sigma_\theta &= \lambda \epsilon + 2G \epsilon_\theta; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\epsilon = \epsilon_r + \epsilon_z + \epsilon_\theta;$$

$$\tau_{rz} = \sigma \gamma_{rz};$$

$$\lambda = \frac{E \mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}; \quad \sigma = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

и, внося их в дифференциальное уравнение (1) и (2), получим уравнения Ламе

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) \right] + \frac{G}{2\sigma + \lambda} \frac{\partial U^2}{\partial z^2} + \frac{\sigma + \lambda}{2G + \lambda} \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial z} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{G + \lambda}{2\sigma + \lambda} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) \right] + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{G}{2\sigma + \lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial W}{\partial r} \right) = 0. \quad (6)$$

Выбор координатных функций в первом приближении может быть сделан из рассмотрения цилиндрического уплотнительного элемента скважинного пакера, имеющего диаметр  $D=2R$  и высоту  $h$  (рис. 1). Расположение координатных осей показано на рис.1.

Предположим, что три сечения  $z=0$ ,  $z=+\frac{h}{2}$  и  $z=-\frac{h}{2}$  в процессе деформации уплотнительного элемента остаются плоскими, а остальные сечения  $z=\text{const}$  искажаются лишь в зоне, близкой к свободной боковой поверхности уплотнительного элемента.

Если принять предположение, что поперечные сечения уплотнительного элемента при деформации остаются плоскими, т. е. их перемещения  $W$  не зависят от  $r$ , а являются только  $f$  функцией  $z$ , то получим  $W=f(z)$  (рис. 1).

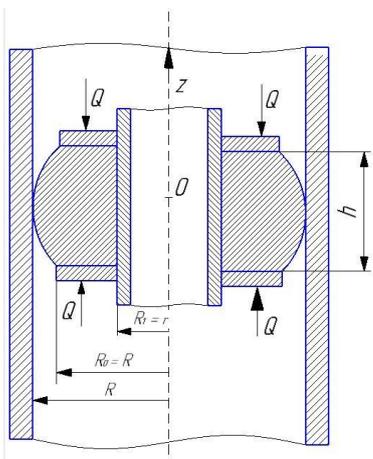


Рис. 1. Расчетная схема к выбору координатных функций

Принятая гипотеза о плоских сечениях заметно упрощает уравнение Ламе

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) \right] + \frac{G}{2G+\lambda} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 0.$$

Уравнение (6) – условие равновесия в направлении оси  $z$  – не может быть выполнено, так как перемещения в этом направлении ограничены гипотезой плоских сечений. Уравнение равновесия в этом направлении может быть удовлетворено только интегрально.

Перемещение « $U$ » определяется так, чтобы удовлетворялась дифференциальное уравнение равновесия в плоскости, перпендикулярной оси уплотнительного элемента уравнения (8).

От независимых переменных  $r$  и  $z$  перейдем к перемещениям  $\rho = \frac{r}{R}$  и  $S = \frac{2z}{h}$ , тогда уравнение (8) будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \rho} - \frac{U}{\rho^2} + \frac{4R^2}{\rho} \frac{G}{2\sigma + \lambda} \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} = 0. \quad (9)$$

Для решения уравнения (9) эллиптического типа применяется метод разделения переменных

$$U(\rho, S) = \Phi(\rho)F(S). \quad (10)$$

Подставив (10) в (9) и разделив переменные, получим

$$\frac{d^2 \Phi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\Phi}{d\rho} - \frac{\Phi}{\rho^2} - C\Phi = 0, \quad (11)$$

$$\frac{d^2 F}{dS^2} + C \frac{h^2}{4R^2} \frac{(2G+\lambda)}{G} F = 0, \quad (12)$$

где  $C$  – постоянное разделение.

В зависимости от знака  $C$ , уравнения (11) и (12) будут иметь различные решения.

Условиям задачи удовлетворяют значения  $C > 0$ .

В этом случае уравнение (12) имеет решение

$$F = A \sin \alpha S + B \cos \alpha S,$$

$$\alpha^2 = C \frac{h^2}{4R^2} \frac{2G+\lambda}{G}. \quad (13)$$

Граничные условия

$$U = 0$$

при

$$z = \pm \frac{h}{2}$$

и условия четности  $U(z)$  будут выполнены, если

$$A = 0, \quad \alpha = \frac{\pi}{2}(2k-1), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (14)$$

Из последнего равенства (13) с учетом (14) получим постоянное разделение

$$C_k = \frac{R^2}{h^2} \frac{G}{2\sigma + \lambda} \pi^2 (2k-1)^2. \quad (15)$$

Каждому номеру  $k$  соответствует своя постоянная  $C_k$  и свое уравнение (11)

$$\frac{d^2 \Phi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\Phi}{d\rho} - \left[ \frac{1}{\rho^2} + \frac{R^2}{h^2} \frac{G}{2\sigma + \lambda} \pi^2 (2k-1)^2 \right] \Phi = 0.$$

Это модифицированное уравнение Бесселя индекса 1 и его общий интеграл может быть представлен в виде

$$\Phi = AI_1(b_k \rho) + BK_1(b_k \rho), \quad (16)$$

где  $I_1$  – модифицированная функция Бесселя индекса 1;  $K_1$  – модифицированная функция Ганкеля индекса 1.

$$b_k = \pi \frac{R}{h} \sqrt{\frac{G}{2G+\lambda}} (2k-1). \quad (17)$$

Функция  $K_1$  имеет особенности в нуле [ $K_1(0) \rightarrow \infty$ ]. Поэтому постоянную  $B$  следует считать равной нулю. Окончательно из (16) получим

$$\Phi = AI_1(b_k \rho). \quad (18)$$

В результате для радиального перемещения получается следующая формула

$$U = \sum_{k=1}^{\infty} D_k I_1(b_k \rho) \cos \frac{\pi}{2} (2k-1) S. \quad (19)$$

Вид функции  $W$ , а также коэффициента  $D_k$ , определяются методом Рунца-Конторовича.

Для определения полной потенциальной энергии системы (II) следует учесть, что она складывается из потенциальной энергии упругой деформации уплотнительного элемента скважинного пакера ( $U$ ) и потенциала внешней сжимающей силы ( $V$ )

$$\Pi = U + V. \quad (20)$$

Энергия упругой деформации равна

$$U = 2\pi \int_0^R \int_{-h/2}^{h/2} W_r dr dz, \quad (21)$$

где  $W_r$  – упругая потенциальная энергия удельного объема уплотнительного элемента скважинного пакера.

Для осесимметричного деформированного состояния

$$W = G \left( \epsilon_z^2 + \epsilon_r^2 + \frac{\mu}{1-2\mu} \epsilon^2 + \frac{1}{2} \gamma_{rz}^2 \right). \quad (22)$$

Запишем энергию упругой деформации в виде

$$U = U_z + U_r + U_\theta + U_\varepsilon + U_\gamma, \tag{23}$$

где

$$U_z = 2\pi \int_0^R \int_{-h/2}^{h/2} G \varepsilon_z^2 r dr dz. \tag{24}$$

Остальные слагаемые записываются аналогично. Вычислим компоненты деформации по формулам (3)

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{df}{dz} = \frac{2}{h} \cdot \frac{df}{ds}; \\ \varepsilon_r &= \frac{\partial U}{\partial r} = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \frac{d}{R dp} I_1(b_k \rho) \cos \frac{\pi}{2} (2k-1) S; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{U}{r} \sum_{k=1}^{\infty} D_k \frac{1}{R \rho} I_1(b_k \rho) \cos \frac{\pi}{2} (2k-1) S; \\ \gamma_{rz} &= \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\pi}{h} \sum_{k=1}^{\infty} D_k (2k-1) I_1(b_k \rho) \sin \frac{\pi}{2} (2k-1) S. \end{aligned} \right\} \tag{25}$$

Интегрируем в соответствии с формулами (21)–(24)

$$\begin{aligned} U_z &= 2\pi G \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^R \varepsilon_z^2 r dr dz = \pi R^2 h G \int_{-1}^1 \int_0^1 \varepsilon_z^2 \rho dp dS = \\ &= \pi R^2 h G \int_0^1 \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{D_k}{R} \cdot \frac{d}{dp} I_1(b_k \rho) \right]^2 \cos^2 \frac{\pi}{2} (2k-1) S dS + \right. \\ &+ \left. \int_{-1}^1 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left[ \frac{D_i \cdot D_j}{R^2} \cdot \frac{d}{dp} I_1(b_k \rho) \right] \cos \frac{\pi}{2} (2i-1) \times \right. \\ &\left. \times S \cos \frac{\pi}{2} (2j-1) S dS \right\} \rho dp = \\ &= \pi R^2 h G \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{D_k}{R} \cdot \frac{d}{dp} I_1(b_k \rho) \right]^2 \rho dp. \end{aligned} \tag{26}$$

Отсюда находим

$$U_r = \pi R^2 h G \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R^2} D_k^2 F_{1k}. \tag{27}$$

Здесь

$$F_{1k} = \int_0^1 \left[ \frac{d}{dp} I_1(b_k \rho) \right]^2 \rho dp. \tag{28}$$

Аналогично можно получить

$$U_\theta = \pi R^2 h G \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R^2} D_k^2 F_{2k}, \tag{29}$$

$$U_\gamma = \pi R^2 h G \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{h^2} D_k^2 (2k-1) F_{3k}. \tag{30}$$

Здесь

$$F_{2k} = \int_0^1 I_1^2(b_k \rho) \rho dp, \tag{31}$$

$$F_{3k} = \int_0^1 I_1^2(b_k \rho) \rho dp. \tag{32}$$

Интегралы  $F_{1k}$ ,  $F_{2k}$ ,  $F_{3k}$  могут быть вычислены. Составляющая энергия упругой деформации [32]

$$\begin{aligned} U_\varepsilon &= \pi R^2 h G \frac{\mu}{1-2\mu} \int_{-1}^1 \int_0^1 \varepsilon^2 \rho dp dS = \frac{\mu}{1-2\mu} (U_z + U_r + U_\theta) + \\ &+ \pi R^2 h G \frac{2\mu}{1-2\mu} \int_{-1}^1 \int_0^1 (\varepsilon_z \varepsilon_r + \varepsilon_r \varepsilon_\theta + \varepsilon_\theta \varepsilon_z) \rho dp dS. \end{aligned}$$

После постановке выражений (24) получаем

$$\begin{aligned} U_\varepsilon &= \frac{\mu}{1-2\mu} (U_z + U_r + U_\theta) + \pi R^2 h G \frac{2\mu}{1-2\mu} \times \\ &\times \int_{-1}^1 \frac{2}{hR} \cdot \frac{df}{dS} \sum_{k=1}^{\infty} D_k I_1(b_k) \cos \frac{\pi}{2} (2k-1) S dS + \\ &+ \pi R^2 h G \frac{2\mu}{1-2\mu} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R^2} D_k^2 F_{4k}. \end{aligned} \tag{33}$$

В соотношении (33)

$$F_{4k} = \int_0^1 I_1(b_k \rho) \frac{d}{dp} I_1(b_k \rho) \rho dp, \tag{34}$$

$$U_z = \pi R^2 h G \int_{-1}^1 \int_0^1 \varepsilon_z^2 \rho dp dS = \pi R^2 h G \left[ \frac{2}{h^2} \int_{-1}^1 \left( \frac{df}{ds} \right)^2 ds \right]. \tag{35}$$

Все слагаемые, входящие в формулу (23), вычислены, т. е.

$$\begin{aligned} U &= \pi R^2 h G \left\{ \left[ \frac{1-\mu}{1-2\mu} \cdot \frac{2}{h^2} \left( \frac{df}{ds} \right)^2 + \frac{2\mu}{1-2\mu} \frac{2}{hR} \cdot \frac{df}{dS} \times \right. \right. \\ &\times \left. \sum_{k=1}^{\infty} D_k I_1(b_k) \cos^2 \frac{\pi}{2} (2k-1) S \right] dS + \frac{1-\mu}{1-2\mu} \cdot \frac{1}{R^2} \times \\ &\times \left. \sum_{k=1}^{\infty} D_k F_{5k} + \frac{2\mu}{1-2\mu} \frac{1}{R^2} \sum_{k=1}^{\infty} D_k^2 F_{4k} + \frac{\pi^2}{2h^2} \sum_{k=1}^{\infty} D_k^2 (2k-1) F_{3k} \right\}. \end{aligned} \tag{36}$$

где

$$F_{3k} = F_{1k} + F_{2k}. \tag{37}$$

Выражение для энергии упругой деформации не содержит членов с произведением  $D_i \cdot D_j$  ( $i \neq j$ ), что является следствием ортогональности координатных функций, по которым разложено радиальное смещение «U» (19).

Потенциал внешней сжимающей силы [32] имеет вид

$$V = -Q \cdot \Delta = Q \int_{-1}^1 \frac{df}{ds} ds, \tag{38}$$

где  $\Delta$  – осевая деформация (осадки) уплотнительного элемента скважинного пакера.

Полная потенциальная энергия системы [32] имеет вид

$$\begin{aligned} \Pi &= \pi R^2 h G \left\{ \int_{-1}^1 \frac{1-\mu}{1-2\mu} \frac{2}{h^2} \left( \frac{df}{ds} \right)^2 + \frac{2\mu}{1-2\mu} \frac{2}{hR} \times \right. \\ &\times \left. \frac{df}{dS} \sum_{k=1}^{\infty} D_k I_1(b_k) \cos \frac{\pi}{2} (2k-1) s + \frac{Q}{R^2 h G} \cdot \frac{df}{ds} \right] ds + \frac{1-\mu}{1-2\mu} \times \\ &\times \left. \frac{1}{R^2} \sum_{k=1}^{\infty} D_k^2 F_{3k} + \frac{2\mu}{1-2\mu} \frac{1}{R^2} \sum_{k=1}^{\infty} D_k^2 F_{4k} + \frac{\pi}{2h^2} \sum_{k=1}^{\infty} D_k^2 (2k-1)^2 F_{3k} \right\}. \end{aligned} \tag{39}$$

Для минимизации полной потенциальной энергии уплотнительной системы сначала определим функцию  $f(s)$  из условия минимума определенного интеграла, входящего в выражение полной энергии системы (36)

$$\begin{aligned} J &= \int_{-1}^1 \left[ \frac{1-\mu}{1-2\mu} \cdot \frac{2}{h^2} \left( \frac{df}{ds} \right)^2 + \frac{2\mu}{1-2\mu} \frac{2}{hR} \frac{df}{ds} \times \right. \\ &\times \left. \sum_{k=1}^{\infty} D_k I_1(b_k) \cos \frac{\pi}{2} (2k-1) s + \frac{Q}{\pi R^2 h G} \cdot \frac{df}{ds} \right] ds. \end{aligned}$$

Обозначим подынтегральное выражение через  $\Phi = \Phi(f', S)$ .

Функция  $f(s)$  должна удовлетворять дифференциальному уравнению Эйлера [32]:

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial f'} \right) = 0,$$

и граничному условию

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial f'} \right|_{s=1} = 0.$$

Уравнение Эйлера и граничное условие будут выполнены, если

$$\frac{\partial \Phi}{\partial f'} = 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & \frac{1-\mu}{1-2\mu} \frac{4}{h^2} \frac{df}{ds} + \frac{2\mu}{1-2\mu} \frac{2}{hR} \sum_{k=1}^{\infty} D_k I_1(b_k) \cos \frac{\pi}{2} (2k-1)s + \\ & + \frac{Q}{\pi R^2 h G} = 0; \\ & \frac{df}{ds} = \frac{1-2\mu}{4(1-\mu)} \frac{Q}{\pi R^2 G} - \frac{\mu}{1-2\mu} \frac{h}{R} \sum_{k=1}^{\infty} D_k I_1(b_k) \times \cos \frac{\pi}{2} (2k-1)s. \end{aligned} \quad (40)$$

Интегрируем полученное соотношение (40)

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{1-2\mu}{4(1-\mu)} \frac{Qh}{\pi R^2 G} s - \frac{2}{\pi} \frac{\mu}{1-\mu} \frac{h}{R} \times \\ & \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_k}{(2k-1)} I_1(b_k) \sin \frac{\pi}{2} (2k-1)s. \end{aligned} \quad (41)$$

Постоянные интегрирования отсутствуют, так как смещение  $W$  должно быть нечетной функцией  $s$ .

Вычисляя определенные интегралы, входящие в уравнение (37), и подставляя их в выражение полной энергии системы (36), получим

$$\begin{aligned} \Pi &= \pi R^2 h G \left\{ -\frac{1-2\mu}{4(1-\mu)} \frac{Q}{\pi R^4 G^2} - \frac{\mu}{1-\mu} \frac{4Q}{\pi^2 R^3 G} \times \right. \\ & \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} D_k I_1(b_k) - \frac{2\mu^2}{(1-\mu)(1-2\mu)} \frac{1}{R^2} \times \\ & \times \sum_{k=1}^{\infty} D_k^2 I_1^2(b_k) + \frac{1-\mu}{1-2\mu} \frac{1}{R^2} \times \sum_{k=1}^{\infty} D_k^2 F_{5k} + \\ & \left. + \frac{2\mu}{1-2\mu} \frac{1}{R^2} \sum_{k=1}^{\infty} D_k^2 F_{4k} + \frac{\pi}{2h^2} \sum_{k=1}^{\infty} D_k^2 (2k-1)^2 F_{3k} \right\}. \end{aligned} \quad (42)$$

Коэффициенты  $D_k$  находим из системы уравнений Ритца  $\frac{\partial \Pi}{\partial D_k} = 0$ .

Откуда

$$D_k = (-1)^{k+1} \frac{4\mu(1-2\mu)I_1(b_k)Q}{(1-\mu)\pi^2 R^2 G (2k-1)L_k}, \quad (43)$$

где

$$\begin{aligned} L_k &= 2(1-\mu)F_{5k} + 4\mu F_{4k} + \pi^2(1-2\mu) \frac{R^2}{h^2} \times \\ & \times (2k-1)^2 F_{3k} - \frac{4\mu^2}{1-\mu} I_1^2(b_k). \end{aligned} \quad (44)$$

Определим осевую деформацию (осадку) уплотнительного элемента:

$$\Delta = - \int_{-h/2}^{h/2} f'(z) ds = - \int_{-1}^1 f'(s) ds = -2f(1). \quad (45)$$

Используя выражение для  $f(s)$  (40), получаем

$$\Delta = \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \frac{Q}{\pi R^2 G} + \frac{\mu}{1-\mu} \frac{4h}{\pi R} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{D_k I_1(b_k)}{2k-1}, \quad (46)$$

$$\Delta = \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \frac{Qh}{\pi R^2 G} \left[ 1 + \frac{32\mu^2}{\pi^2(1-\mu)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \frac{I_1^2(b_k)}{L_k} \right], \quad (47)$$

где  $L_k$  определяется выражением (43):

$$\begin{aligned} L_k &= \frac{1-\mu}{2} b_k^2 I_1^2(b_k) \left\{ \left[ \frac{I_0(b_k)}{I_1(b_k)} \right]^2 + \left[ \frac{I_2(b_k)}{I_1(b_k)} \right]^2 - \right. \\ & \left. - \frac{I_3(b_k)}{I_1(b_k)} - \frac{2I_0(b_k)I_2(b_k)}{I_1^2(b_k)} + 1 + \frac{4\mu(1-3\mu)}{(1-\mu)^2} \frac{1}{b_k^2} \right\}, \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \Pi &= \pi R^2 h G \left\{ -\frac{1-2\mu}{4(1-\mu)} \frac{Q^2}{\pi^2 R^4 G} - \frac{\mu}{1-\mu} \frac{4Q}{\pi^2 R^3 G} \times \right. \\ & \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} D_k I_1(b_k) - \frac{2\mu^2}{(1-\mu)(1-2\mu)} \frac{1}{R^2} - \frac{\mu}{1-\mu} \times \\ & \times \sum_{k=1}^{\infty} D_k^2 I_1(b_k) + \frac{1-\mu}{1-2\mu} \frac{1}{R^2} \times \sum_{k=1}^{\infty} D_k^2 F_{5k} + \\ & \left. + \frac{2\mu}{1-2\mu} \frac{1}{R^2} \times \sum_{k=1}^{\infty} D_k^2 F_{4k} + \frac{\pi^2}{2h^2} \times \sum_{k=1}^{\infty} D_k^2 (2k-1)^2 F_{3k} \right\}. \end{aligned} \quad (49)$$

Коэффициенты  $D_k$  находим из системы уравнений Ритца

$$\frac{\partial \Pi}{\partial D_k} = 0.$$

Обозначим

$$M_k = L_k \frac{1}{I_1^2(b_k)}. \quad (50)$$

Выразим  $M_k$  через две функции Бесселя [13]  $I_0$  и  $I_1$ . Так как

$$I_2(b_k) = I_0(b_k) - \frac{2}{b_k} I_1(b_k), \quad (51)$$

$$I_3(b_k) = \frac{4}{b_k} I_0(b_k) + \left( 1 + 8 \frac{1}{b_k^2} \right) I_1(b_k), \quad (52)$$

то

$$M_k = 2(1-2\mu) \left\{ b_k \frac{I_0(b_k)}{I_1(b_k)} - 1 - \frac{\mu(3\mu-1)}{(1-\mu)^2} \right\}. \quad (53)$$

Еще раз перепишем формулу (45) для осевой деформации (осадки) уплотнительного элемента с учетом выражения (47):

$$\Delta = \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \frac{Qh}{\pi R^2 G} \left[ 1 + \frac{32\mu^2}{\pi^2(1-\mu)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \frac{1}{M_k} \right]. \quad (54)$$

Для того чтобы получить такую силу цилиндрического уплотнительного элемента со свободными торцами, нужно приложить силу

$$Q_0 = 2(1+\mu)\pi R^2 G \frac{\Delta}{h}. \quad (55)$$

Сравнивая формулы (51) и (52), находим, что

$$Q = \beta Q_0, \tag{56}$$

где  $\beta$  – коэффициент ужесточения уплотнительного элемента за счет прижатия к торцам металлических опорных шайб,

$$\beta = \frac{1-\mu}{1+\mu} \left[ 1 - 2\mu + \frac{64\mu^2}{R^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k^2}{(2k-1)^4 M_k} \right]^{-1}. \tag{57}$$

Из этих формул могут быть сделаны выводы о том, что:

1) граничное условие на боковой поверхности уплотнения для  $\sigma_2$  выполняется, т. е.  $\sigma_2 = 0$ ;

2) нормальная сила в сечении, перпендикулярном оси уплотнителя, равно внешней нагрузке.

### 5. Определение напряженно-деформированного состояния уплотнительного элемента скважинного пакера и результаты расчетов

Вычислим напряжения по закону Гука:

$$\sigma_z = -\frac{Q}{\pi R^2} \left\{ 1 + \frac{\mu^2}{(1-\mu)(1-2\mu)} \cdot \frac{16}{\pi^3} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} [2I_1(b_k) - b_k I_0(b_k \rho)] N_k^{-1} \cos \frac{\pi}{2} (2k-1) S \right\}. \tag{58}$$

$$\sigma_r = -\frac{Q}{\pi R^2} \frac{\mu}{1-\mu} \left\{ 1 + \frac{\mu}{1-2\mu} \cdot \frac{16}{\pi^3} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} \times \left[ 2 \frac{\mu}{1-\mu} I_1(b_k) - \frac{1-\mu}{\mu} b_k I_0(b_k \rho) + \frac{1-2\mu}{\mu \rho} I_1(b_k \rho) \right] \times N_k^{-1} \cos \frac{\pi}{2} (2k-1) S \right\}. \tag{59}$$

Результаты расчетов по определению коэффициента ужесточения  $\beta$ , а также напряжения для уплотнительного элемента пакера по параметрам  $\frac{\beta}{h} = 0,6 - 1,2$ ;  $\rho = \frac{r}{R}$ ;  $\mu = 0,47; 0,48; 0,49$ , представлены на рис. 2, 3.

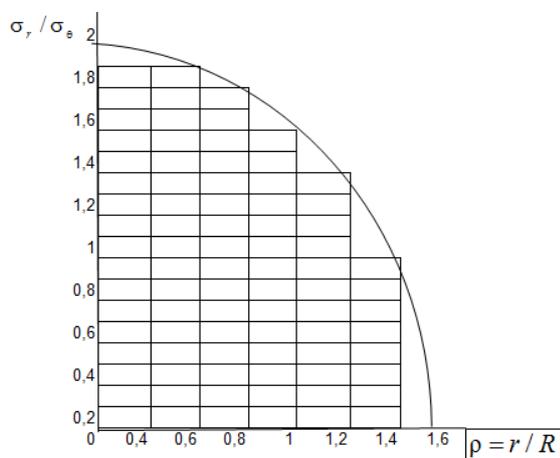


Рис. 2. Зависимость распределения напряжений от геометрического параметра уплотнения

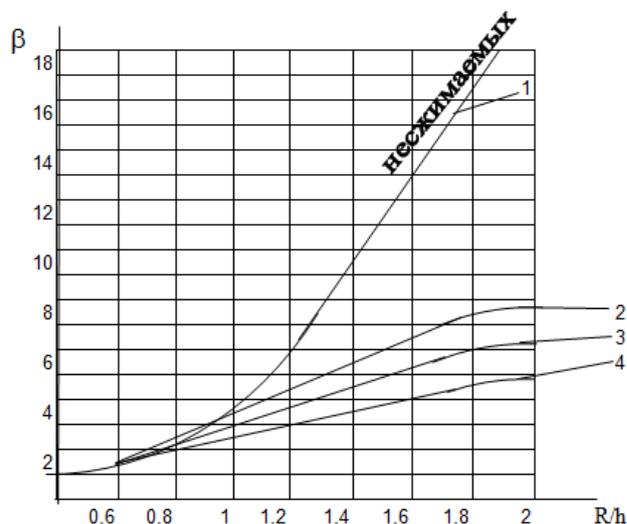


Рис. 3. Зависимость коэффициента ужесточения уплотнения от безразмерного геометрического параметра: 1 – несжимаемая резина ( $\mu=0,5$ ), 2–4 – сжимаемая резина ( $\mu=0,49; 0,48; 0,47$  соответственно)

Как видно из расчетов, с увеличением параметра  $r/R$  безразмерное напряжение уменьшается по параболическому закону (рис. 2). Из рис. 3 видно, что малая сжимаемость оказывает существенное влияние на коэффициент ужесточения. Из приведенных графиков следует, что приведенные выше результаты являются свидетельством того, что сжимаемость резины оказывает существенное влияние на жесткость уплотнения.

### 6. Обсуждение результатов исследования

В данной работе задача теории упругости материала – резинового уплотнения пакера – рассмотрена как задача нахождения условного экстремума. С этой целью функционал энергии дополнили интегралом по объему уплотнителя от произведения множителя Лагранжа на объемную деформацию. Из условий стационарности этого функционала и уравнения сжимаемости, благодаря такому подходу, определены перемещения и гидростатические напряжения. Вместе с тем, следует указать на определенные ограничения, присущие полученным результатам. В частности, речь может идти о следующем. Для больших деформаций, то есть когда имеет место предельный переход при коэффициенте Пуассона  $\mu = 0,5$  – условию сильной сжимаемости, вариационные уравнения Лагранжа дают иногда грубые погрешности. Тем не менее, данные ограничения в рассмотренной задаче не являются критичными, поэтому результаты данного исследования полезны и могут быть применены для многих видов уплотнительных систем. Учет названных ограничений делает перспективным продолжение исследований в данном направлении, т. к. позволит повысить точность расчетов для решения не только прикладных задач повышения надежности уплотняющих элементов пакеров, но и теоретического выявления закономерностей, возникающих в процесс деформации уплотняющего элемента.

## 7. Выводы

1. Полученная аналитическая формула для определения коэффициента ужесточения  $\beta$ , а также напряжения для уплотнительного элемента пакера по параметрам  $\beta/h = 0,6-1,2$ ;  $\rho = r/R$ ;  $\mu = 0,47; 0,48; 0,49$ , может быть применена для решения задач уплотнения скважинного пакера с учетом малой сжимаемости резины. При этом показано, что с увеличением параметра  $r/R$  безразмерное напряжение уменьшается по параболическому закону.

2. Показано, что на основе выбора координатных функций в функционале потенциальной энергии деформации, соответствующей реализации принципа Лагранжа для резиновых элементов пакера, можно учесть фактор сжимаемости резины. При этом полученные результаты подтверждают, что сжимаемость резины оказывает существенное влияние на жесткость уплотнительного элемента пакеров и данный фактор обязательно должен учитываться в аналитическом описании его напряженно-деформированного состояния.

## Литература

1. Червинский, В. П. О совершенствовании уплотнений деталей комплексов подземного скважинного оборудования [Текст] / В. П. Червинский, А. С. Гальченко, Н. В. Мельник // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2010. – Т. 4, № 6 (46). – С. 28–30. – Режим доступа: <http://journals.uran.ua/eejet/article/view/2995/2798>
2. Полонский В. Л. Особенности работы резиновых уплотнений – пакеров [Текст] / В. Л. Полонский, А. П. Тюрин // Современное машиностроение. Наука и образование. – 2012. – № 2. – С. 592–597.
3. Уплотнения и уплотнительная техника: Справочник. 2-е изд., перераб. и доп. [Текст]. – М.: Машиностроение, 1994. – 445 с.
4. Poturayev, V. N. Rubber and rubber-metallic machine components [Text]. – “Machinebuilding”, Moscow, 1966.
5. Куренов, М. В. Особенности использования разбухающих пакеров для разобщения горизонтальных участков скважин на шельфе Каспийского моря [Текст] / М. В. Куренов, Д. В. Елисеев // Вестник АГТУ. – 2012. – № 2 (52). – С. 69–71.
6. Аванесов, В. А. Пакееры для проведения технологических операций и эксплуатации скважин [Текст] / В. А. Аванесов, Е. М. Москалева. – УГТУ Ухта, 2008. – 91 с.
7. Han, C. Study on well hard shut-in experiment based on similarity principle and erosion of ram rubber [Text] / C. Han, J. Zhang // Engineering Failure Analysis. – 2013. – Vol. 32. – P. 202–208. doi: 10.1016/j.engfailanal.2013.03.016
8. Zhai, C. Research on a New Composite Sealing Material of Gas Drainage Borehole and Its Sealing Performance [Text] / C. Zhai, Z. Hao, B. Lin // Procedia Engineering. – 2011. – Vol. 26. – P. 1406–1416. doi: 10.1016/j.proeng.2011.11.2318
9. Chandrasekaran, V. C. Rubber Seals for Oil Field Service [Text] / V. C. Chandrasekaran // Rubber Seals for Fluid and Hydraulic Systems, 2010. – P. 45–55. doi: 10.1016/b978-0-8155-2075-7.10005-x
10. Liu, Q. A new effective method and new materials for high sealing performance of cross-measure CMM drainage boreholes [Text] / Q. Liu, Y. Cheng, L. Yuan, Y. Fang, D. Shi, S. Kong // Journal of Natural Gas Science and Engineering. – 2014. – Vol. 21. – P. 805–813. doi: 10.1016/j.jngse.2014.10.023
11. Parker’s rubber materials extend seal life in harsh environments [Text]. – Sealing Technology. – 2015. – Vol. 2015, Issue 7. – P. 2. doi: 10.1016/s1350-4789(15)30185-9
12. Цыбин, А. А. Крепление скважин и разобщение пластов гидравлическими пакерами с металлическими уплотнительными элементами [Текст] / А. А. Цыбин, С. А. Цыбин // Инженер-нефтяник. – 2008. – № 4. – С. 21–23.
13. Al-Hiddabi, S. A. Analytical model of elastomer seal performance in oil wells [Text] / S. A. Al-Hiddabi, T. Pervez, S. Z. Qamar, F. K. Al-Jahwari, F. Marketz, S. Al-Houqani, M. van de Velden // Applied Mathematical Modelling. – 2015. – Vol. 39, Issues 10–11. – P. 2836–2848. doi: 10.1016/j.apm.2014.10.028
14. Zeng, D. Corrosion Property Testing of AFLAS Rubber under The Simulation modes of High Acid Gas Wells [Text] / D. Zeng, X. Yang, D. Zhu, Z. Zhang, D. Cao, X. Chong, T. Shi // Energy Procedia. – 2012. – Vol. 16. – P. 822–827 doi: 10.1016/j.egypro.2012.01.132
15. Yamabe, J. 20 – Hydrogen-induced degradation of rubber seals [Text] / J. Yamabe, S. Nishimura // Gaseous Hydrogen Embrittlement of Materials in Energy Technologies, 2012. – P. 769–816. doi: 10.1533/9780857093899.3.769
16. Guan, H. Study on evaluation index system of rubber materials for sealing [Text] / H. Guan, F. Yang, Q. Wang // Materials & Design. – 2011. – Vol. 32, Issue 4. – P. 2404–2412. doi: 10.1016/j.matdes.2010.12.030
17. Rubber and PEEK polymer-based composite developed for sealing applications [Text] // Sealing Technology. – 2011. – Vol. 2011, Issue 12. – P. 2–3. doi: 10.1016/s1350-4789(11)70407-x
18. Аксенов А. Анализ задач взаимодействия «жидкость – конструкция» с использованием программных комплексов ABAQUS и FlowVision [Текст] / А. Аксенов, В. Коньшин // САПР и графика. – 2006. – № 9. – С. 20–24
19. Кропотин, О. В. Методика прогнозирования надежности и ресурса подвижных герметизирующих устройств с учетом формоизменения элементов в процессе фрикционного взаимодействия [Текст] / О. В. Кропотин // Известия Самарского научного центра РАН. – 2012. – Т. 14, № 4 (5). – С. 1253–1256.
20. Панченко, А. Ю. Развитие формализма метода частиц для расчета условий на границе раздела твердого тела с жидкой средой [Текст] / А. Ю. Панченко, Е. В. Шилько, С. В. Астафуров, С. Ю. Коростелев, С. Г. Псахье // Известия Томского политехнического университета. – 2008. – Т. 313, № 2. – С. 85–90.

21. Кропотин, О. В. Оптимизация конструкции герметизирующего устройства с использованием метода исследования пространства параметров [Текст] / О. В. Кропотин, Ю. К. Машков, О. А. Кургузова, С. В. Шилько // Омский научный Вестник. – 2013. – № 3 (123). – С. 101–104.
22. Колтунов, М. А. Геометрические нелинейная задача теории вязко упругости. Механика эластомеров. Т. 1 [Текст]: межвед. сб. / М. А. Колтунов, И. Е. Трояновский. – Краснодар. изд. Кубин. Гос. Ун-та, 1977. – С. 36–46.
23. Квитка, А. Л. Напряженно деформированное состояние тел вращения [Текст] / А. Л. Квитка, П. П. Ворошко, С. Д. Бобрицкая. – Киев, Наукова думка, 1977. – 208 с.
24. Сниегс, М. И. Решение некоторых осесимметричных задач теории упругости для несжимаемого материала методом конечных элементов [Текст] / М. И. Сниегс // Вопросы Динамики и прочности. – 1974. – Вып. 30. – С. 116–119.
25. Черных К.Ф. Шубина И.М. Законы упругости для изотропных нежимаемых материалов В кн: механика эластомеров. Т 1 [Текст]: межвед. сб. – Краснодар. изв. Кубин. Гос. Ун-та, 1977. – С. 54–64.
26. Глуд, С. Вариационные методы в задачах о собственных значениях [Текст] / С. Глуд; перев. с англ. – М.: «Мир», 1970. – 328 с.
27. Ильюшин, А. А. Основы математической теории термовязкой упругости [Текст] / А. А. Ильюшин, Б. Е. Победря. – М.: «Наука», 1970. – 280 с.
28. Москвитин, В. В. Сопротивление вязко упругих материалов [Текст] / В. В. Москвитин. – М.:«Наука», 1972. – 263 с.
29. Reissner, F. On some variational theorems in elasticity problems of continuum mechanics [Text] / F. Reissner. – Philadelphia, 1961. – 354 p.
30. Эглайс, В. О. Алгоритм интуитивного поиска для оптимизации сложных систем [Текст] / В. О. Эглайс // Вопросы Динамики и прочности. – 1980. – С. 28–33.
31. Павловский, А. А. Применение вариационного принципа рейсенера в задаче о кинематическом возбуждении резинометаллического амортизатора [Текст] / А. А. Павловский, С. А. Глухих // Вопросы Динамики и прочности. – 1977. – Вып. 35. – С. 124–130.
32. Mixlin, S. G. Variational methods in mathematical physics [Text] / S. G. Mixlin. – Moscow: “Science”, 1970.