Запропоновано наближені аналітико-числові методи математичного моделювання високотемпературних нелінійних процесів теплоперенесення. Розглянуто чотири моделі теплового режиму гірничих масивів при пожежах у шахтних виробках – перші та треті крайові задачі нелінійної теплопровідності при сталих та змінних граничних умовах

Ключові слова: математичне моделювання, високотемпературні процеси, гірничі масиви, аналітико-числові методи

Предложены приближенные аналитико-численные методы математического моделирования высокотемпературных нелинейных процессов теплопереноса. Рассмотрены четыре модели теплового режима горных массивов при пожарах в шахтных выработках – первые и третьи краевые задачи нелинейной теплопроводности при постоянных и переменных граничных условиях

Ключевые слова: математическое моделирование, высокотемпературные процессы, горные массивы, аналитико-численные методы

УДК 536-12:517.956.4:622

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОПЕРЕНОСА

А. П. Слесаренко
Доктор физико-математических наук, профессор, лауреат Государственной премии Украины,
ведущий научный сотрудник
Институт проблем машиностроения им. Подгорного НАН Украины
ул. Пожарского, 2/10, г. Харьков, Украина, 61046
Контактный тел.: (057) 265-51-89, 096-386-30-22

И. Р. Венгеров
Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник
Институт физики горных процессов НАН Украины
ул. Р. Люксембург, 72, г. Донецк, Украина, 83114
Контактный тел.: (062) 337-80-46, 050-998-34-67

1. Введение

Углубление угольных шахт и интенсификация угледобычи сопровождаются, в ряде случаев, аварийными ситуациями: внезапными выбросами и обрушениями, взрывами метана, эндогенными и экзогенными пожарами.

Разработка методов профилактики, тушения и локализации последних невозможна без математического моделирования тепловых режимов горных массивов и выработок [1]. Соответствующие математические модели формулируются как краевые задачи нелинейной теплопроводности, решаемые обычно численными методами, требующими анализа сходимости вычислительных алгоритмов в каждом конкретном случае и зачастую малопригодными для проведения оперативных инженерных расчетов.

Более перспективны, на наш взгляд, приближенные аналитико-численные методы решения нелинейных краевых задач, базирующиеся на структурах решений (региональных и глобальных), что было показано в работах А.П. Слесаренко [2].

В настоящей работе такие приближенные аналитико-численные методы используются для решения ряда задач высокотемпературного нагрева горного массива (пожарными газами с температурой порядка 10^3 К).

Получены аналитические выражения, с приемлемой для инженерных расчетов точностью позволяющие прогнозировать температурную динамику, определять степень влияния различных параметров моделей, рассчитывать возникающие в массиве термоупругие напряжения.

2. Анализ литературных источников

Анализ литературных источников показал [2], что нелинейные краевые задачи теплопроводности твердых тел решаются, наряду с численными методами, аналитическими: использованием автомодельных переменных, подстановок, полных и частичных линеаризаций и т.д. [2-5]. Эти методы, как правило, применяются к задачам с краевыми условиями простейшего вида и с ограниченным набором функций температуры – теплофизических параметров систем.

Поэтому актуальной является проблема разработки достаточно общих, но алгоритмически простых приближенных аналитико-численных методов, к которым относятся методы, использующие фиксированные структуры решений, в частности аппроксимации нестационарных температурных полей в классах экспоненциальных и степенных функций и структуры региональных решений линеаризованных задач переноса в слоистых системах.

В настоящей работе мы ограничиваемся одномерными моделями теплопереноса во внешних областях $\Omega_+^{(1)} = \{x \in (0,\infty)\}$.

3. Цель работы

Целью работы является демонстрация предлагаемых методов аппроксимации и стратификации на четырех, практически важных, моделях подземных пожаров. Используем метод экспоненциальной аппроксимации температурных полей в ограниченных оценками локализации полей конечных областях [3] и методы стратификации двух видов: а) стратификации по координате x (разбиение, специальным образом, конечной области $\Omega_\delta^{(1)}$ на конечное число слоев); б) хроностратификации по переменной t (разбиение заданного конечного интервала времени процесса t_s на ряд хронослоев).

4. Решаемые задачи

1) Формулировка предпосылок моделирования высокотемпературных процессов на основе краевых задач для нелинейных (с зависящими от температуры теплофизпараметрами) уравнений теплопроводности. 2) Первая краевая задача с постоянной граничной температурой. 3) Первая краевая задача с переменной граничной температурой. 4) Третья краевая задача с постоянной температурой греющей среды (пожарных газов). 5) Третья краевая задача с переменной температурой греющей среды. Начальное распределение температуры в горном массиве считаем, во всех случаях, однородным.

Задача №1. Предпосылки моделирования. Формулировка последних заключается в ответах на следующие вопросы: 1) какой процесс моделируется – нагревание или охлаждение области $\Omega_k^{(m)}$; 2) каковы минимальная $(\bar{T})$ и максимальная $(\bar{\bar{T}})$ температуры в области и на её границах в моделируемый период $t\in[0,t_s], t_s<\infty$; 3) как с изменением температуры изменяются теплофизпараметры; 4) как оценивается зона локализации температурного поля; 5) как находятся аппроксимации температурного поля.

Первый вопрос актуален потому, что в отличие от процессов линейной теплопроводности, при нелинейной теплопроводности нет эквивалентности задач на нагревание и охлаждение из-за явлений термического гистерезиса горных пород. Вид функций $C(T)$ и $\lambda(T)$ при нагревании до высоких температур и остывании затем до умеренных, различен [2]. В частности, при моделировании подземных пожаров, необходимо рассмотрение двух подзадач: первая должна обеспечить прогноз температур горного массива при возникновении, развитии и стабилизации пожара, характеризуемого динамикой температуры нагревающей массив среды (пожарных газов и др.) - $T_Г(t), t\in(0,t_s)$. Вторая подзадача решает ту же задачу в период затухания пожара, его тушения и последующей вентиляции выработки $(t\in(t_s,\infty))$. Мы рассматриваем только первую подзадачу, полагая, что горный массив нагревается. Функция $T_Г(t)$ при этом должна быть представлена в нормализованном (бимонотонном) виде:

$$T_Г(t)=T_Г(0)+\left[T_Г(t_s)-T_Г(0)\right](t/t_s)^{n_T},\quad T_Г(0)=T_Г^{(-)}, T\ (t_s)=T_Г^{(+)}. \tag{1}$$

Формулой (1) описывается и случай «термического удара»: при $t>0$ и $n_T=0$, $\hat{T}_Г(t)=T_Г^{(+)}=\text{const}$. Он является мажорантным, представляя «правую» (верхнюю) границу оценочной вилки для величины зоны локализации поля.

Ответ на второй вопрос следует из того факта, что максимальная температура в горном массиве не может превышать $T_Г^{(+)}$ при отсутствии в нём тепловых источников. При наличии их, что характеризуется заданием функции их плотности $F(\eta,t)\le\bar{\bar{F}}$ при $\eta\in\Omega_+^{(m)}$ и $t\in(0,t_s)$, будем иметь:

$$T^{(m)}(\eta,t)\le\frac{\bar{\bar{F}}}{C_{\min}}t_s=T_F^{(+)},\quad C_{\min}=\min C(T),\quad T\in\left[\bar{T},\bar{\bar{T}}\right]. \tag{2}$$

Здесь:

$$\bar{T}=\min T^{(m)}(\eta,t)=\min\varphi(\eta),\quad \eta\in[\eta_-,\infty), \tag{3}$$

$$\bar{\bar{T}}=\max\left\{T_Г^{(+)},T_F^{(+)}\right\}. \tag{4}$$

Следовательно, в любой точке области $\Omega_+^{(m)}$ и для любого момента времени $t\in(0,t_s)$, имеет место вилка

$$\bar{T}\le T^{(m)}(\eta,t)\le\bar{\bar{T}},\quad \Delta\bar{\bar{T}}=\max\Delta T^{(m)}=\bar{\bar{T}}-\bar{T}. \tag{5}$$

Здесь $\Delta\bar{\bar{T}}-$ температурный диапазон модели (ширина вилки).

Для ответа на третий вопрос достаточно нормализовать (представить - бимонотонными аппроксимациями) первичные зависимости $c(T)$ и $\lambda(T)$:

$$\hat{c}(T)=\hat{c}(\bar{T})+\left[c(\bar{\bar{T}})-c(\bar{T})\right]\left(\frac{T-\bar{T}}{\Delta\bar{\bar{T}}}\right)^{n_c},\quad c(\bar{T})=c^{(-)}, c(\bar{\bar{T}})=c^{(+)}=K_c c^{(-)}, \tag{6}$$

$$\hat{\lambda}(T)=\lambda(\bar{T})+\left[\lambda(\bar{\bar{T}})-\lambda(\bar{T})\right]\left(\frac{T-\bar{T}}{\Delta\bar{\bar{T}}}\right)^{n_\lambda},\quad \lambda(\bar{T})=\lambda^{(-)}, \lambda(\bar{\bar{T}})=\lambda^{(+)}=K_\lambda\lambda^{(-)}. \tag{7}$$

Масштабные множители K_c и K_λ, определяемые $\Delta\bar{\bar{T}}$, могут принимать значения меньше или больше единицы. Для коэффициента теплопроводности $a=a(T)$ получаем:

$$\hat{a}(T)=\frac{\hat{\lambda}(T)}{\hat{c}(T)}=a^{(-)}\left[\frac{1+(K_\lambda-1)\theta^{n_\lambda}}{1+(K_c-1)\theta^{n_c}}\right],\quad \theta=\frac{T-\bar{T}}{\Delta\bar{\bar{T}}}, a^{(-)}=a(\bar{T})=\frac{\lambda^{(-)}}{c^{(-)}},$$
$$a^{(+)}=a(\bar{\bar{T}})=\frac{K_\lambda}{K_c}a^{(-)}=\frac{\lambda^{(+)}}{c^{(+)}},\quad \hat{a}(T)=a^{(-)}+\left(a^{(+)}-a^{(-)}\right)\theta^{n_a}, n_a=n_a(n_\lambda,n_c,K_c,K_\lambda). \tag{8}$$

Для ответа на четвертый вопрос заметим следующее. Как показано в [3], при линейной теплопроводности в отсутствие источников тепла, для $\delta_+(t)-$ зон локализации полей в областях $\Omega_+^{(m)}$ можно использовать выражение: $\delta_+(t)=4\sqrt{at}\,(a=\mathrm{const})$. В нелинейных средах, где $a=a(T)$, как показано в [6], приведенная формула справедлива при учете в ней переменности a. Поэтому возможен «вилочный» подход:

$$\bar{\delta}(t)\le\delta_+(t)\le\bar{\bar{\delta}}(t),\quad \bar{\delta}(t)=\eta_-+4\sqrt{\bar{a}t},\quad \bar{\bar{\delta}}(t)=\eta_-+4\sqrt{\bar{\bar{a}}t}, \quad (9)$$

$$\bar{a}=a^{(-)},\quad \bar{\bar{a}}=a^{(+)},\quad \eta_-=\begin{cases}0, & m=1,\\ r_0, & m=2,3,\end{cases}\quad t\in(0,t_s). \quad (10)$$

На основе (9) осуществляем переход от сингулярной области к конечной: $\Omega_+^{(m)}\to\Omega_\delta^{(m)}=\left\{\eta\in(\eta_-,\bar{\bar{\delta}}(t)\right\}$. Область $\Omega_\delta^{(m)}$ может быть далее преобразована, процедурой стратификации, в слоистую систему (двух-, трех- или многослойную).

Пятый вопрос корректен только для случая однородного начального условия $\left(\varphi(\eta)=T_n=\mathrm{const}\right)$ при отсутствии источников тепла в $\Omega_+^{(m)}$. Для этого случая записываем вилку, граничные значения которой – ранее уже использованные экспоненциальные аппроксимации [3]:

$$\bar{T}^{(m)}(\eta,t)\le T^{(m)}(\eta,t)\le\bar{\bar{T}}^{(m)}(\eta,t),\quad \eta\in\Omega_\delta^{(m)},\quad t\in(0,t_s), \quad (11)$$

$$\bar{T}^{(m)}(\eta,t)=T_n+\left(T_\Gamma(t)-T_n\right)\exp\left[-\beta^{(m)}\left(\frac{\eta-\eta_-}{\bar{\delta}(t)-\eta_-}\right)\right], \quad (12)$$

$$\bar{\bar{T}}^{(m)}(\eta,t)=T_n+\left(T_\Gamma(t)-T_n\right)\exp\left[-\beta^{(m)}\left(\frac{\eta-\eta_-}{\bar{\bar{\delta}}(t)-\eta_-}\right)\right]. \quad (13)$$

Из последних формул для полуширины вилки $\hat{R}(\eta,t)$ получаем:

$$\hat{R}(\eta,t)=0,5\left[\bar{\bar{T}}^{(m)}(\eta,t)-\bar{T}^{(m)}(\eta,t)\right]=$$

$$=\Delta T(t)\left\{\exp\left[-\beta^{(m)}\left(\frac{\eta-\eta_-}{\bar{\bar{\delta}}(t)-\eta_-}\right)\right]-\exp\left[-\beta^{(m)}\left(\frac{\eta-\eta_-}{\bar{\delta}(t)-\eta_-}\right)\right]\right\}, \quad (14)$$

$$\Delta T(t)=T_\Gamma(t)-T_n\le\Delta\bar{\bar{T}},$$

$$\Delta T(t_s)=T_\Gamma(t_s)-T_n=T_\Gamma^{(+)}-T_n=\Delta\bar{\bar{T}}.$$

Задача №2. Первая краевая задача с постоянной граничной температурой. Для m=1. $\beta^{(1)}=3,551$ [3] и формулы (12,13) принимают вид:

$$\bar{T}(x,t)=T_n+\left(T_\Gamma^{(+)}-T_n\right)\exp\left[-3,551\left(\frac{x}{4\sqrt{\bar{a}t}}\right)\right],$$
$$x\in\left[0,4\sqrt{\bar{\bar{a}}t}\right],\ t>0, \quad (15)$$

$$\bar{\bar{T}}(x,t)=T_n+\left(T_\Gamma^{(+)}-T_n\right)\exp\left[-3,551\left(\frac{x}{4\sqrt{\bar{\bar{a}}t}}\right)\right],$$
$$x\in\left[0,4\sqrt{\bar{\bar{a}}t}\right],\ t>0. \quad (16)$$

Положим в (14): m=1, $x/\sqrt{\bar{\bar{a}}t}=\eta$, $\bar{\bar{a}}/\bar{a}=K_a$, тогда:

$$\hat{R}(x,t)=\hat{R}(\eta,K_a)=0,5\left[\exp(-3,551\eta)-\exp\left(-3,551K_a^{0,5}\eta\right)\right]. \quad (17)$$

Численные расчеты по (17) при $\eta\in(0,1]$, $Ka\in[1,2;1,5]$, $\Delta\eta=0,01$, $\Delta K_a=0,1$ дают значения $\hat{R}(\eta,K_a)$, приведенные в табл. 1

Таблица 1

Относительная полуширина аппроксимационной вилки

K_a	η									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
1,2	0,01	0,015	0,015	0,015	0,01	0,01	0,01	0,005	0,005	0,005
1,3	0,015	0,022	0,022	0,022	0,015	0,015	0,012	0,008	0,008	0,005
1,4	0,02	0,03	0,03	0,03	0,02	0,02	0,015	0,01	0,01	0,005
1,5	0,025	0,035	0,037	0,035	0,022	0,018	0,012	0,01	0,01	0,007

Из таблицы следует:

1) в принятом диапазоне значений η и K_a, $\hat{R}(\eta,K_a)\le 3,7\%$; 2) в качестве приближенного решения задачи №2 $-T^{(1)}(x,t)$ можно принять полусумму $T_{cp}^{(1)}(x,t)=0,5\left(\bar{T}(x,t)+\bar{\bar{T}}(x,t)\right)$; 3) с ростом параметра K_a полуширина вилки возрастает (и, как показали расчеты, при $K_a>1,5$ достигает значений $\ge$ 5%). При $K_a\le 1,5$ решение задачи №2 исчерпывается использованием одного из двух практически эквивалентных выражений

$$T^{(1)}(x,t)=T_n+0,5\left(T_\Gamma^{(+)}-T_n\right)\times$$
$$\times\left[\exp\left(-3,551K_a^{0,5}\eta\right)+\exp(-3,551\eta)\right], \quad (18)$$

$$T^{(1)}(x,t)=T_n+\left(T_\Gamma^{(+)}-T_n\right)\exp\left[-3,551\left(\frac{x}{\delta_{1,cp}}\right)\right],$$
$$\delta_{1,cp}=\left(\frac{1+Ka^{0,5}}{2}\right)\bar{\delta}(t),\quad \bar{\delta}(t)=4\sqrt{\bar{a}t}. \quad (19)$$

В случае, если условие задачи №2 таковы, что $K_a=\bar{\bar{a}}/\bar{a}>1,5$ применим стратификацию области $\Omega_\delta^{(1)}=\left\{x\in(0,\delta(t))\right\}$ на две подобласти (слоя) переменной ширины:

$$\Omega_\delta^{(1)}\to\left\{\Omega_{\delta1}^{(1)},\Omega_{\delta2}^{(1)}\right\},\quad \Omega_{\delta1}^{(1)}=\left\{x\in\left(0,\delta_1(t)\right)\right\},$$
$$\Omega_{\delta2}^{(1)}=\left\{x\in\left(\delta_1(t),\delta_2(t)\right)\right\}.$$

Здесь параметр $\delta_1(t)-$ расстояние, пройденное после начала процесса изотермой $T=T_{\Gamma0}<T_\Gamma^{(+)}$ за время t, а параметр $\delta_2(t)-$ ширина зоны локализации температурного поля к этому моменту времени, т.е. $T\left(\delta_1(t),t\right)=T_{\Gamma0}$, $T(\delta_2(t),t)=T_\Pi$. Оба эти параметра могут быть представлены в виде: $\delta_i(t)=Z_i\sqrt{at}\,(i=1,2)$, $Z_2=4$, а Z_1 – требует определения.

Поскольку $a=a(T)$, воспользуемся оценками (т.е., построим вилку):

$$\begin{gathered}\bar{\delta}_1(t)\le\delta_1(t)\le\bar{\bar{\delta}}_1(t),\bar{\delta}_2(t)\le\delta_2(t)\le\bar{\bar{\delta}}_2(t),\\ \bar{\delta}_1(t)=Z_1\sqrt{\hat{a}t},\bar{\bar{\delta}}_1(t)=Z_1\sqrt{\bar{\bar{a}}t},\bar{\delta}_2(t)=4\sqrt{\bar{a}t},\bar{\bar{\delta}}_2(t)=4\sqrt{\hat{a}t},\\ \hat{a}=a(T_{\ 0}),\bar{a}=a(T_?),\bar{\bar{a}}=a(T^{(+)}),\\ K_a=K_{a1}\cdot K_{a2},K_{a1}=\bar{\bar{a}}/\hat{a},K_{a2}=\hat{a}/\bar{a}.\end{gathered}\qquad(20)$$

Поскольку $K_{a1}\le 1{,}5$, $K_{a2}\le 1{,}5$, то $K_a\le 2{,}25$.. Если $K_a>2{,}25$, то двухслойную стратификацию надо заменить на трёхслойную, которая будет справедлива при $K_a=K_{a1}\cdot K_{a2}\cdot K_{a3}\le(1.5)^3\approx 3.38$. Если же $K_a>3{,}38$ необходима четырёхслойная стратификация и т.д.

Значения $\bar{a}=a(T_П)$ и $\bar{\bar{a}}=a(T_Г^{(+)})$ находится из (10), а значение $\hat{a}=a(T_{Г0})$ определяется (а по нему и значение «промежуточной» температуры $T_{Г0}$) из условия:

$$K_{a2}=\frac{\hat{a}}{\bar{a}}=\frac{a(T_{Г0})}{a(T_п)}=1{,}5.\qquad(21)$$

Для оценки параметра Z_1 воспользуемся решением линейной задачи о термическом ударе [3], принимающем в задаче №2 вид:

$$T(x,t)=T_п+\left(T_Г^{(+)}-T_п\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\hat{a}t}}\right).\qquad(22)$$

Если в (22) положить $T(x,t)=T_{Г0}, x=Z_1\sqrt{\hat{a}t}$, то получим:

$$\theta_{Г0}=\frac{T_{Г0}-T_п}{T_Г^{(+)}-T_п}=\operatorname{erfc}\left(\frac{Z_1}{2}\right).\qquad(23)$$

Из (23), по известным $T_п,T_Г^{(+)},T_{Г0}$, параметр Z_1 легко находится, так что далее считаем его известным. Теперь параметры $\delta_1(t)$ и $\delta_2(t)$ в (20) определим как среднеарифметические граничных значений вилок:

$$\delta_{1,ср}(t)=0{,}5\left(\bar{\delta}_1(t)+\bar{\bar{\delta}}_1(t)\right)=\frac{Z_1}{2}\left(\sqrt{\hat{a}t}+\sqrt{\bar{\bar{a}}t}\right)=K_1\bar{\delta}(t),\qquad(24)$$

$$\delta_2(t)=\delta_{2,ср}(t)=0{,}5\left(\bar{\delta}_2(t)+\bar{\bar{\delta}}_2(t)\right)=\left(\frac{1+K_{a2}^{0{,}5}}{2}\right)\bar{\delta}(t)=K_2\bar{\delta}(t),\ (25)$$

$$K_1=\frac{1}{8}Z_1\left(1+K_{a1}^{0{,}5}\right)Ka_2^{0{,}5},\quad K_2=\frac{1}{2}\left(1+K_{a2}^{0{,}5}\right),\quad \bar{\delta}(t)=4\sqrt{\bar{a}t}.\ (26)$$

Температурное поле в слое $\Omega_{\delta_2}^{(1)}$ можно представить в виде экспоненциальной аппроксимации для $\bar{T}^{(1)}(x,t)$ (15), осуществив в ней замены

$$T_Г^{(+)}\to T_{Г0},\quad x\to x-\delta_{1,ср}(t),\quad \bar{\delta}(t)\to(K_2-K_1)\bar{\delta}(t):$$

$$T_{2,ср}^{(1)}=T_п+(T_{Г0}-T_п)\exp\left[-3{,}551\left(\frac{x-K_1\bar{\delta}(t)}{(K_2-K_1)\bar{\delta}(t)}\right)\right],\quad(27)$$

$$x\in\left[K_1\bar{\delta},K_2\bar{\delta}\right].$$

В слое $\Omega_{\delta 1}$ можно воспользоваться аналогичной аппроксимацией, потребовав выполнения для поля $T_{1,ср}^{(1)}(x,t)$ граничных условий:

$$T_{1,ср}^{(1)}(0,t)=T^{(+)},T_{1,ср}^{(1)}\left(\delta_{1,ср}(t),t\right)=T_{Г0}.$$

Сопряжение температурных полей на общей границе слоёв $\Omega_{\delta 1}^{(1)}$ и $\Omega_{\delta 2}^{(1)}$ будет автоматическим, но условие равенства производных, вытекающее из физики процесса

$$\left.\frac{\partial T_{1,ср}^{(1)}}{\partial x}\right|_{x=\delta_{1,ср}(t)}=\left.\frac{\partial T_{2,ср}^{(1)}}{\partial x}\right|_{x=\delta_{1,ср}(t)},\quad t>0,\qquad(28)$$

может оказаться не соблюдающимся. Чтобы обеспечить выполнение (28), воспользуемся для поля в $\Omega_{\delta 1}^{(1)}$ полиномиальной (квадратичной) аппроксимацией:

$$T_{1,ср}^{(1)}(x,t)=A(t)+B(t)x+C(t)x^2,x\in\left[0,\delta_{1,ср}(t)\right],t>0.\ (29)$$

Коэффициенты $A(t),B(t),C(t)$ определяем из (28) и условий

$$\left.T_{1,ср}^{(1)}(x,t)\right|_{x=0}=T_Г^{(+)},\quad \left.T_{1,ср}^{(1)}(x,t)\right|_{x=\delta_{1,ср}(t)}=T_{Г0}.\qquad(30)$$

В итоге получаем:

$$\begin{gathered}A(t)=T_г^{(+)},\quad B(t)=-\frac{\left(2T_Г^{(+)}-T_{Г0}-T_п\right)-\Psi(K)(T_{Г0}-T_п)}{K_1\bar{\delta}(t)},\\ \Psi(K)=\frac{K_2+2{,}51K_1}{K_2-K_1},\quad C(t)=\frac{\left(T_Г^{(+)}-T_п\right)-\Psi(K)(T_{Г0}-T_п)}{K_1^2\bar{\delta}^2(t)},\end{gathered}\qquad(31)$$

$$\begin{gathered}T_{1,ср}^{(1)}(x,t)=T_г^{(+)}-\left[\frac{\left(2T_Г^{(+)}-T_{Г0}-T_п\right)-\Psi(K)(T_{Г0}-T_п)}{K_1}\right]\left(\frac{x}{\bar{\delta}(t)}\right)+\\ +\left[\frac{\left(T_Г^{(+)}-T_п\right)-\Psi(K)(T_{Г0}-T_п)}{K_1^2}\right]\left(\frac{x}{\bar{\delta}(t)}\right)^2,\ x\in\left(0,K_1\bar{\delta}(t)\right).\end{gathered}\qquad(32)$$

Т.о., функции $T_{1,ср}^{(1)}(x,t)$ (32) и $T_{2,ср}^{(1)}(x,t)$ (27) представляют приближенное решение задачи №2 – о термическом ударе в области $\Omega_\delta^{(1)}$ с теплофизпараметрами, зависящими от температуры. Это решение, при $t=0$, когда $\delta_{1ср}(t)=K_1\bar{\delta}(t)=0$ и $T_{1,ср}^{(1)}(x,t)$ не существует, за счет $T_{1,ср}^{(1)}(x,t)$, как это следует из (27), обращается в $T_П$, т.е. удовлетворяет начальному условию. При $t\to\infty$, когда напротив, решение $T_{1,ср}^{(1)}(x,t)$ распространяется на область $x\in(0,\infty)$, из (32) следует, что $\lim_{t\to\infty}T_{1,ср}^{(1)}(x,t)=T_Г^{(+)}$, как это вытекает из постановки задачи. Общий вид решения:

$$T^{(1)}(x,t)=\begin{cases}T_{1,ср}^{(1)}(x,t), & x\in\left(0,\delta_{1,ср}(t)\right), \quad t>0,\\ T_{2,ср}^{(1)}(x,t), & x\in\left(\delta_{1,ср}(t),\delta_{2,ср}(t)\right), \quad t>0.\end{cases}\qquad(33)$$

Задача №3. Первая краевая задача с переменной граничной температурой. В этом случае функция $T_Г(t)$ бимонотонновозрастаетот $T_Г(0)=T_п$ до $T_Г(t_s)=T_Г^{(+)}$ согласно (1), а решение соответствующей линейной задачи не позволяет найти, в достаточной простой форме, закон движения изотермы $T(x,t)=T_{Г0}$. В отсутствие этого закона построить аппроксимации полей $T_1(x,t)\le T_{Г0}$ и $T_2(x,t)>T_{Г0}$ нельзя. Это обстоятельство требует отказа от пространственной стратификации, использованной в задаче №2, и осуществления хроностратификации – разбиения всего интервала времени задачи $t\in(0,t_s]$ на два: $t\in(0,t_Г)$ и $t\in[t_Г,t_s]$. Решение будем искать в виде:

$$T^{(2)}(x,t)=\begin{cases}T_1^{(2)}(x,t), & x\in\left(0,\delta_{1,cp}^{(2)}(t)\right), \quad t\in[0,t\ ],\\ T_2^{(2)}(x,t), & x\in\left(0,\delta_{2,cp}^{(2)}(t),\right), \quad t\in[t\ ,t_s].\end{cases} \qquad (34)$$

Пусть, как и в предыдущем случае, температуре $T_{Г0}=T_Г(t_Г)$ будетсоответствоватьзначение $\hat{a}=a(T_{Г0})$ такое, что $\hat{a}/\bar{a}=K_{a1}=1{,}5$. Тогда по аналогии с задачей №2, можем записать:

$$T_1^{(2)}(x,t)=T_n+\left(T_r(t)-T_n\right)\exp\left[-3{,}51\left(\frac{x}{\delta_{1,cp}^{(2)}(t)}\right)\right], \qquad (35)$$

$$x\in\left(0,\delta_{1,cp}^{(2)}(t)\right), t\in(0,t_r).$$

Здесь:

$$\delta_{1,cp}^{(2)}(t)=0{,}5\left(\bar{\delta}_1^{(2)}(t)+\bar{\bar{\delta}}_1^{(2)}(t)\right)=$$

$$=0{,}5\left(4\sqrt{\bar{a}t}+4\sqrt{\hat{a}t}\right)=\left(\frac{1+Ka_1^{0,5}}{2}\right)\delta^{(2)}(t), \qquad (36)$$

$$\delta^{(2)}(t)=\bar{\delta}(t)=4\sqrt{\bar{a}t}.$$

Если $T_{Г0}=T_Г(t_s)=T_Г^{(+)}$, т.е. $K_a=\bar{\bar{a}}/\bar{a}\le 1{,}5$ для всего периода процесса, то (35) будет приближенным решением задачи №3.

Если же $T_Г(t_s)=T_Г^{(+)}>T_{Г0}$, $K_{a2}=\bar{\bar{a}}/\hat{a}\le 1{,}5$, то можно находить решения на интервале $t\in[t_{Г0},t_s]-T_2^{(2)}(x,t)$. Если окажется, что $K_{a2}>1{,}5$, необходимо хроностратификацию осуществлять на три временных слоя.

Пусть $K_{a2}\le 1.5$, т.е. соблюдено требуемое условие достаточности получаемого приближенного решения (т.е. «узости» соответствующей вилки). Тогда решение $T_2^{(2)}(x,t)$ можно представить в виде:

$$T_2^{(2)}(x,t)=T_n+\left(T_Г(t)-T_n\right)\exp\left[-3{,}551\left(\frac{x}{\delta_{2,cp}^{(2)}(t)}\right)\right], \qquad (37)$$

$$x\in\left(0,\delta_{2,cp}^{(2)}(t)\right), t\in(t_Г,t_s).$$

Здесь:

$$\delta_{2,cp}^{(2)}(t)=0{,}5\left(\bar{\delta}_2^{(2)}(t)+\bar{\bar{\delta}}_2^{(2)}(t)\right)=$$

$$=0{,}5\left(4\sqrt{\hat{a}t}+4\sqrt{\bar{\bar{a}}t}\right)=\left(\frac{1+K_{a2}^{0,5}}{2}\right)K_{a1}^{0,5}\bar{\delta}(t). \qquad (38)$$

Т.о., решение задачи №3 имеет вид (34), где $T_1^{(2)}(x,t)$ и $T_2^{(2)}(x,t)$ определены, соответственно, (35) и (37).

Параметр $\bar{\delta}(t)=4\sqrt{\bar{a}t}$ известен,

т.к. $\bar{a}=a(T_П)$, $\delta_{1,cp}^{(2)}(t)=1{,}11\bar{\delta}(t)$ (т.к. $K_{a1}=1{,}5$),

$$\delta_{2,cp}^{(2)}(t)=0{,}612\left(1+K_{a2}^{0,5}\right)\bar{\delta}(t).$$

Параметр K_{a2} находится из соотношения $Ka2=\bar{\bar{a}}/\hat{a}$, где $\bar{\bar{a}}=a\left(T_Г^{(+)}\right),\hat{a}=a(T_{Г0})$. Величина T_0 следует из условия $K_{a1}=\hat{a}/\bar{a}=1{,}5\left(\hat{a}=a(T_{Г0})\right)$. Значение $t=t_Г$ находится из (1):

$$t\ =\left(\frac{T_{Г0}-T_n}{T_Г^{(+)}-T_n}\right)^{1/n_T}\times t_s. \qquad (39)$$

Задача №4. Третья краевая задача с постоянной температурой греющей среды. Здесь предполагается, что в граничном условии третьего рода на границе $x=0$ области $\Omega_\delta^{(1)}$ в момент времени $t=0$ скачком устанавливается и далее сохраняется постоянная температура границей среды $-T_Г^{(+)}$:

$$\lambda\left(T^{(3)}\right)\frac{\partial T^{(3)}(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=0}=\alpha_0\left[T^{(3)}(x,t)-T_Г^{(+)}\right]_{x=0}, t\in(0,t_s). \quad (40)$$

Здесь: $T^{(3)}(x,t)-$ температурное поле в области $\Omega_\delta^{(1)}\left(T^{(3)}(x,t)<T_Г^{(+)}\right),\alpha_0=\mathrm{const}-$ коэффициент конвективного теплообмена, $\lambda\left(T^{(3)}\right)\Big|_{x=0}=\lambda\left(\mu^{(+)}(t)\right)$, $\mu^{(3)}(t)-$ переменная температура на границе области $x=0$. Использовать решение задачи №2 нельзя, т.к. нет оценки для движения изотермической поверхности, позволившей осуществить двухслойную стратификацию по координате.

Воспользуемся аналогией с задачей №2, где граничная функция $T_Г(t)$ бимонотонно возрастает при $t\in(0,t_s)$. В настоящей задаче №4 эту роль играет функция $\mu^{(3)}(t)$, которую, в духе метода функций склейки [3] будем считать известной, сводя третью краевую задачу к первой. Осуществляем хроностратификацию на два временных слоя: $t\in(0,t_Г)$ и $t\in[t_Г,t_s]$. Для решений на этих слоях используем, адаптируя к настоящей задаче, выражения (35) и (37):

$$T_1^{(3)}(x,t)=T_n+\left[\mu_1^{(3)}(t)-T_n\right]\exp\left[-3{,}551\left(\frac{x}{\delta_{1,cp}^{(3)}(t)}\right)\right], \qquad (41)$$

$$x\in\left(0,\delta_{1,cp}^{(3)}(t)\right), t\in(0,t_Г),$$

$$T_2^{(3)}(x,t)=T_n+\left[\mu_2^{(3)}(t)-T_n\right]\exp\left[-3{,}551\left(\frac{x}{\delta_{2,cp}^{(3)}(t)}\right)\right], \qquad (42)$$

$$x\in\left(0,\delta_{2,cp}^{(3)}(t)\right), t\in(t_Г,t_s).$$

Здесь:

$$T^{(3)}(x,t)=\begin{cases}T_1^{(3)}(x,t)\\ T_2^{(3)}(x,t)\end{cases}, \quad \mu^{(3)}(t)=\begin{cases}\mu_1^{(3)}(x,t), & t\in(0,t_Г),\\ \mu_2^{(3)}(x,t), & t\in[t_Г,t_s].\end{cases} \qquad (43)$$

Параметры $\delta_{i,cp}^{(3)}(t)(i=1,2)$ формально совпадают с $\delta_{i,cp}^{(2)}(t)$, но входящие в пик величины, кроме $\bar{a}=a(T_n)$, определены иначе: $\hat{a}=a\left(\mu^{(3)}(t_Г)\right)=a(T_{Г0}),\bar{\bar{a}}=a\left(\mu^{(3)}(t_s)\right)$.

Здесь $\mu^{(3)}(t_\Gamma)=T_{\Gamma 0}$ – такое значение, которое обеспечивает выполнение условия $\hat{a}/\bar{a}=K_{a1}=1{,}5$, а $\mu^{(3)}(t_s)=\mu_s^{(3)}\le T_\Gamma^{(+)}$.

Функция $\mu^{(3)}(t)$ должна быть определена с помощью граничного условия (40) с учетом (43), т.е. представленного для каждого из двух хронослоёв:

$$\lambda\left(\mu_1^{(3)}(t)\right)\frac{\partial T_1^{(3)}}{\partial x}\bigg|_{x=0}=\alpha_0\left(\mu_1^{(3)}(t)-T_\Gamma^{(+)}\right),\quad t\in(0,t_\Gamma),\qquad(44)$$

$$\lambda\left(\mu_2^{(3)}(t)\right)\frac{\partial T_2^{(3)}}{\partial x}\bigg|_{x=0}=\alpha_0\left(\mu_2^{(3)}(t)-T_\Gamma^{(+)}\right),\quad t\in[t_\Gamma,t_s].\qquad(45)$$

Подстановка в (44) и (45) решений (41) и (42) даёт:

$$\theta_{\mu 1}(t)=\left[1+\frac{3{,}551\lambda\left(\mu_1^{(3)}(t)\right)}{\alpha_0\delta_{1,cp}^{(3)}(t)}\right]^{-1},\qquad \theta_{\mu 1}(t)=\frac{\mu_1^{(3)}(t)-T_n}{T_\Gamma^{(+)}-T_n},\quad t\in(0,t_\Gamma),\qquad(46)$$

$$\theta_{\mu 2}(t)=\left[1+\frac{3{,}551\lambda\left(\mu_2^{(3)}(t)\right)}{\alpha_0\delta_{2,cp}^{(3)}(t)}\right]^{-1},\qquad \theta_{\mu 2}(t)=\frac{\mu_2^{(3)}(t)-T_n}{T_\Gamma^{(+)}-T_n},\quad t\in[t_\Gamma,t_s].\qquad(47)$$

В температурном диапазоне задачи

$$T^{(3)}(x,t)\in\left[T_n,T_\Gamma^{(+)}\right]$$

зависимость $\lambda=\lambda(T)$ в нормализованном виде даётся (7).

В более узких температурных диапазонах $\mu_1^{(3)}(t)\in[T_n,T_{r0}]$ и $\mu_2^{(3)}(t)\in\left[T_{r0},T_r^{(+)}\right]$ можно воспользоваться линейными аппроксимациями $\lambda=\lambda(T)$:

$$\lambda\left(\mu_1^{(3)}(t)\right)=\lambda^{(-)}+\left(\hat{\lambda}-\lambda^{(-)}\right)\left(\frac{\mu_1^{(3)}(t)-T_n}{T_{\Gamma 0}-T_n}\right),\qquad(48)$$

$$\lambda\left(\mu_2^{(3)}(t)\right)=\hat{\lambda}+\left(\lambda^{(+)}-\hat{\lambda}\right)\left(\frac{\mu_2^{(3)}(t)-T_n}{T_\Gamma^{(+)}-T_{\Gamma 0}}\right),\qquad(49)$$

Последние зависимости приводятся, как легко проверить, к видам:

$$\lambda\left(\mu_1^{(3)}(t)\right)=\Delta\lambda_1R_1\left(\theta_{\mu 1}(t)+\theta_{01}\right),\qquad \lambda\left(\mu_2^{(3)}(t)\right)=\Delta\lambda_2R_2\left(\theta_{\mu 2}(t)+\theta_{02}\right),\qquad(50)$$

где

$$\Delta\lambda_1=\hat{\lambda}-\bar{\lambda},\quad \Delta\lambda_2=\bar{\bar{\lambda}}-\hat{\lambda},\qquad R_1=\frac{T_\Gamma^{(+)}-T_n}{T_{\Gamma 0}-T_n},\quad R_2=\frac{T_\Gamma^{(+)}-T_n}{T_\Gamma^{(+)}-T_{\Gamma 0}},\qquad \theta_{01}=\frac{\bar{\lambda}}{\Delta\lambda_1R_1},\quad \theta_{02}=\frac{\hat{\lambda}}{\Delta\lambda_2R_2}-R_1^{-1}.\qquad(51)$$

Поскольку, в соответствии с ранее сказанным, $\delta_{1,cp}^{(3)}(t)=4{,}45\sqrt{at}$ а $\delta_{2,cp}^{(3)}(t)=5{,}45\sqrt{at}$, выражения (46) и (47) с учетом (50) и (51) приводятся к виду:

$$\theta_{\mu i}^2(t)+\left(\chi_i(t)+\theta_{0i}\right)\theta_{\mu i}(t)-\chi_i(t)=0,\quad i=1,2,\qquad(52)$$

где

$$\chi_1(t)=1{,}267\left(\frac{\alpha_0}{\Delta\lambda_1R_1}\right)\sqrt{at},\chi_2(t)=1{,}553\left(\frac{\alpha_0}{\Delta\lambda_2R_2}\right)\sqrt{at}.\qquad(53)$$

Отбросив вторые корни уравнений (52) как не имеющие физического смысла, решения последних приводим к виду:

$$\theta_{\mu i}(t)=\left(\frac{\chi_i(t)+\theta_{0i}}{2}\right)\left[\sqrt{1+\frac{4\chi_i(t)}{\left(\chi_i(t)+\theta_{0i}\right)^2}}-1\right].\qquad(54)$$

Т.о., функции $\mu_i^{(3)}(t)(i=1,2)$ найдены:

$$\mu_i^{(3)}(t)=T_n+\left(T_\Gamma^{(+)}-T_n\right)\theta_{\mu i}(t).\qquad(55)$$

Поскольку при $t\to 0\;\theta_{\mu 1}(t)=0$, а при $t\to\infty,\theta_{\mu 2}(t)\to 1$, найденные функции $\mu_i^{(3)}(t)$ удовлетворяют условиям начального и конечного состояний

Задача №5. Третья краевая задача с переменной температурой греющей среды. Ход решения повторяет задачу №4, но в итоге формулы (52) несколько видоизменяются, принимая вид:

$$\theta_{\mu i}^2(t)+\left(\chi_i(t)+\theta_{0i}\right)\theta_{\mu i}(t)-\chi_i(t)\theta_r(t)=0,\quad i=1,2,\qquad(56)$$

где

$$\theta_r(t)=\frac{T_\Gamma(t)-T_n}{T_\Gamma^{(+)}-T_n},\quad \theta_\Gamma(t)\in[0,1]$$

при $T_\Gamma(0)=T_n$ и $t\in(0,\infty)$.

Все другие обозначения соответствуют задаче №4. Решения уравнений (56) соответствуют (54), где под знаком квадратного корня в числителе дроби надо осуществить замену: $\chi_i(t)\to\chi_i(t)\theta_\Gamma(t)$. Сравнение формул для $\mu_i^{(3)}(t)$ в задачах №4 и №5 показывает, что в последнем случае эти функции в задаче №5 меньше таковых в задаче №4 при всех $t\in(0,\infty)$, что соответствует физике процесса и подтверждает мажорантный характер решений задач о термическом ударе.

5. Выводы

1. Использование фиксированных аналитических структур решений краевых задач и зависимостей теплофизических параметров от температуры позволяет осуществлять аппроксимации нестационарных температурных полей в простых классах функций и унифицировать разрешающие алгоритмы.

2. Метод «вилок», т.е. минимальных и максимальных аппроксимаций температурных полей и зон термического влияния граничных условий позволяет легко найти численные оценки и установить погрешности используемых приближений.

3. Относительная погрешность определения температур горного массива, определяемая полушириной «вилки» не превышает 3,7%, а погрешность экспоненциальной аппроксимации точного решения не превышает 1%.

4. Методы математического моделирования на основе аппроксимации, стратификации областей и хроностратификации дают возможность достаточно просто найти приближенные решения задач, позволяющие увеличить оперативность и надежность инженерных расчетов планирования противопожарных мероприятий.

Литература

1. Пашковский, П.С. Математическое моделирование динамики температуры при пожаре в шахтной вентиляционной сети [Текст] / П.С. Пашковский, В.З. Брюм, А.В. Ревякин // Горноспасательное дело. – 2007. - № 44. – С. 12-17.
2. Венгеров, И.Р. Теплофизика шахт и рудников. Математические модели. – Монография в 2-х томах, том 1 [Текст] / И.Р. Венгеров. - Донецк: Норд-Пресс.- 2008. – 632 с.
3. Венгеров, И.Р. Теплофизика шахт и рудников. Математические модели. – Монография в 2-х томах, том 2 [Текст] / И.Р. Венгеров. - Донецк: Донбасс. – 2012. – 685 с.
4. Колесников, П.М. Методы теории переноса в нелинейных средах [Текст] / П.М. Колесников. – Минск: Наука и техника. – 1981. – 336 с.
5. Коздоба, Л.А. Вычислительная теплофизика [Текст] / Л.А. Коздоба. – Киев: Наукова думка. – 1992. – 352 с.
6. Зельдович, Я.Б. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений, изд. 2-е, доп. [Текст] / Я.Б. Зельдович, Ю.П. Райзер. – Москва: Наука. – 1966. – 688 с.

Abstract

Mathematical modeling of thermal conditions of massifs during underground fires is the theoretical basis for engineering calculations, planning and firefighting.

The article suggests approximate analytical and numerical methods of mathematical modeling of high-temperature heating of a semi-infinite massif taking into account the dependence of its thermalphysic parameters on temperature.

We have examined four mathematical models based on the first and third boundary problems of nonlinear heat transfer with constant and variable temperatures of the heating medium (gas fire).

We have used the method of approximation of unsteady temperature fields, the method of stratification of the decision area, and the method of chronostratification (partitioning of process on the final time intervals).

We have obtained the solutions in forms, which can reduce them “to the number” with a PC; we have estimated the error of the approximate methods, which is less than 5%. The results can be used to improve the reliability, efficiency and quality of engineering calculations in mining industry.

***Keywords**: mathematical modeling, high-temperature processes, massifs, analytical and numerical methods*