

*Розглядаються математичні моделі фільтраційних процесів з метою вивчення поведінки ґрунтових вод в екологічних (наводки, підтоплення територій) та технологічних (видобування сланцевого газу) аспектах. Для опису вказаних процесів використовуються моделі Дарсі та Форхгеймера з сталими коефіцієнтами, реалізований чисельний метод розв'язання відповідних систем*

*Ключові слова: чисельний метод, течія, ґрунтові води, моделі Дарсі та Форхгеймера*

*Рассматриваются математические модели фильтрационных процессов с целью изучения поведения ґрунтовых вод в экологических (наводки, подтопления территорий) и технологических (добыча сланцевого газа) аспектах. Для описания указанных процессов используются модели Дарси и Форхгеймера с постоянными коэффициентами, реализован численный метод решения соответствующих систем*

*Ключевые слова: численный метод, течение, ґрунтовые воды, модели Дарси и Форхгеймера*

# МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ В ЗАДАЧАХ ОЦІНКИ РІВНЯ ТА ЯКОСТІ ҐРУНТОВИХ ВОД

**А.П. Олійник**

Доктор технічних наук, доцент\*

Контактний тел.: (034) 224-32-19

E-mail: andrij-olijnyk@rambler.ru

**Л.О. Штаєр**

Кандидат технічних наук\*

Контактний тел.: (034) 72-71-70

E-mail: lida.shtayer@gmail.com

**О.І. Клапоуцак**

Аспірант\*

Контактний тел.: (034) 72-71-70

E-mail: oksana\_kl@meta.ua

\*Кафедра комп'ютерних технологій  
в системах управління і автоматики

Івано-Франківський

національний технічний університет нафти і газу

вул. Карпатська, 15, м. Івано-Франківськ, Україна, 76019

## 1. Вступ

Проблема оцінки рівня та якості ґрунтових вод є актуальною науково-технічною задачею в світлі складних геокліматичних процесів, що відбуваються в країнах Європи та призводять до катастрофічних повеней (Чеська республіка, Німеччина, 2002; Україна 1998, 2008; Польща, Словаччина, 2012; Російська Федерація, 2012).

Крім того, явища поширення рідини в ґрунтах вимагають вивчення у зв'язку з перспективою розробки родовищ сланцевого газу в районах Львівської, Тернопільської, Івано-Франківської областей та на родовищах Донбасу (Одеське та Юзівське родовища), оскільки при реалізації технології видобутку сланцевого газу виникає загроза забруднення ґрунтових вод. Розробка методів математичного моделювання фільтраційних процесів з урахуванням особливостей їх протікання (проникність середовища, швидкості фільтрації, тиск рідини, особливості конфігурації досліджуваних областей) дозволяє одержати детальний кількісний опис процесів та вивчити особливості поширення рідини в пористому середовищі, що має велике значення для вирішення широкого класу економічних та екологічних проблем.

## 2. Аналіз літературних даних і постановка проблеми

Вказані питання досліджувались багатьма авторами [1, 2, 3], було встановлено та описано основні закономірності течії ґрунтових вод [4], яка описується параболічними рівняннями Бусінеска:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = k \frac{\partial}{\partial x} \left[ (H(x, y) + h) \frac{\partial h}{\partial x} \right] + k \frac{\partial}{\partial y} \left[ (H(x, y) + h) \frac{\partial h}{\partial y} \right], \quad (1)$$

де  $h = h(x, y, t)$  – функція, що задає вільну поверхню ґрунтових вод;  $k = \frac{S_0 \rho g}{m}$ ,  $\rho$  – густина води,  $g$  – прискорення вільного падіння,  $S_0$  – коефіцієнт, що визначається властивостями ґрунту. Реалізація моделі (1) пов'язана зі значними складностями, обумовленими складною геометричною конфігурацією області дослідження, неможливістю коректно задати граничні умови. Найбільш поширеним способом вивчення фільтраційних процесів є методи моделювання, що базуються на використанні напівемпіричної системи рівнянь Дарсі [1, 4, 5], який використовує гіпотезу про те, що швидкість руху рідини є такою, що величиною  $V^2$  можна знехтувати в порівнянні з величиною  $V$ , де  $V$  – характерна швидкість руху рідини. Вказана гіпотеза не завжди виконується в реальних

системах, тому необхідно розробити удосконалені моделі фільтраційних процесів.

### 3. Ціль і задачі дослідження

Метою роботи є розробка математичних моделей фільтраційних процесів для рідин, що характеризуються величиною швидкості, яка не задовольняє гіпотезі системи рівняння Дарсі, вивчення основних закономірностей процесу поширення рідини в пористому середовищі з урахуванням особливостей геометрії досліджуваних областей, що дозволить робити достатньо точні прогнози рівнів паводкових вод та ґрунтових вод, швидкості та розмірів зони поширення рідини при реалізації технологічних процесів видобутку сланцевого газу.

### 4. Моделювання фільтраційних процесів

При побудові математичної моделі приймаються наступні допущення [5]:

1. Течія рідини в циліндричній формі з радіусом основи  $R$  та висотою  $H$  є симетричною відносно вертикальної осі області, фактично, розглядається течія в прямокутній області.

2. Динамічна в'язкість  $\mu$  та густина  $\rho$  рідини вважаються сталими.

3. Температура середовища та його проникність вважаються сталими.

4. Тиск в точках області при вивченні фільтраційних процесів в задачі оцінки рівня паводкових та ґрунтових вод визначається лише атмосферним тиском та тиском стовпа рідини, при моделюванні фільтраційних процесів при видобутку сланцевого газу тиск визначається технологічними параметрами.

Задача оцінки швидкості фільтрації в середовищі з опором в прямокутній області:

$$G = \{0 \leq x \leq R; 0 \leq y \leq H\}, \tag{2}$$

при умові  $V \gg V^2$ , де  $V$  – модуль вектора швидкості  $\vec{V}(u; v)$  зводиться до задачі розв'язку системи рівнянь Дарсі:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \\ u = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}; \\ v = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{k\rho g}{\mu}, \end{cases} \tag{3}$$

де  $u, v$  – компоненти вектора швидкості фільтрації;  $p$  – тиск рідини. В тому випадку, коли умова  $V \gg V^2$  не виконується, два останні рівняння системи (3) записуються з використанням закону фільтрації Форхгеймера [6]:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \\ -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\mu}{k} u - \beta \frac{\rho V^2}{\sqrt{k}} \frac{u}{V} = 0; \\ -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g - \frac{\mu}{k} v - \beta \frac{\rho V^2}{\sqrt{k}} \frac{v}{V} = 0, \end{cases} \tag{4}$$

де  $\beta$  – безрозмірний коефіцієнт, який залежить від структури пористого середовища,  $\beta \approx 1$ ;  $k$  – коефіцієнт, який за розмірністю співпадає з коефіцієнтом проникності;  $V$  – характерна швидкість фільтрації. Системи (3) та (4) доповнюються граничними умовами виду:

$$p|_{\partial G} = f(x, y), \tag{5}$$

де  $f(x, y)$  неперервна функція в області  $G$ , або

$$p|_{\partial G} = g(x, y), \tag{6}$$

де  $g(x, y)$  – кусково-неперервна функція. Умови (5) описують випадок, коли стінки або границі області  $G$  є вільно проникними для рідини, у випадку використання умов (6) вирішуються задачі дослідження фільтраційної течії за умови, коли частина області  $G$  має непроникні для рідини границі. Крім того, розв'язок задач (3) та (4) з умовами (6) дозволяє вивчити розмір зони впливу наявності витоків з області на конфігурацію течії в цілому.

Важливим моментом є те, що системи (3) та (4) можуть бути зведені до виду:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \\ u = -C_1 \frac{\partial p}{\partial x}; \\ v = -C_1 \frac{\partial p}{\partial y} + C_2 g, \end{cases} \tag{7}$$

а вигляд констант  $C_1$  та  $C_2$  залежить лише від типу моделі ((3) або (4)). Таким чином, з математичної точки зору системи (3) та (4) є ідентичними, шляхом елементарних перетворень система (7) зводиться до задачі Діріхле для тиску рідини:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0, \tag{8}$$

з граничними умовами (5) та (6). Для чисельного розв'язання задачі Діріхле з відповідними граничними умовами використовується метод верхньої релаксації по рядках [7].

Математичні особливості розв'язання задачі методом верхньої релаксації вивчено в роботі [8], встановлено залежність між значеннями параметрів релаксації та збіжністю ітераційного процесу. Розроблено комплекс програм, який дозволяє реалізувати моделі (3) та (4), проведено серію розрахунків, які дозволяють встановити закономірності процесу фільтрації.

### 5. Результати досліджень

1. За результатами математичного моделювання процесу фільтрації

встановлено, що фізична, якісна картина процесу фільтраційної течії не залежить від характерної величини швидкості фільтрації: всі основні висновки [8, 9], одержані для моделі Дарсі в допущенні, що

$$V \gg V^2, \tag{9}$$

де  $V$  – характерна швидкість, є справедливими і для фільтраційних процесів, для яких умова (9) не виконується.

2. Проведено дослідження горизонтальної компоненти швидкості по висоті області при  $x=R$ . Виявлено, що, незалежно від моделі фільтраційної течії (3) або (4) та кількість зон проникнення рідини через границю області, вплив наявності цих зон є відчутним лише в невеликому околі цих зон, тобто, наявність витоків по висоті області практично не впливає на параметри течії внизу цієї області – відмінність в результатах розрахунків складає менше 0,5%. Це дозволяє зробити висновок про те, що виявлення координати витoku, як і самого факту його наявності є неможливим в рамках моделей Дарсі (3) та Форхгеймера (4). Особливості розподілу горизонтальної компоненти швидкості подано на рис. 1, 2.

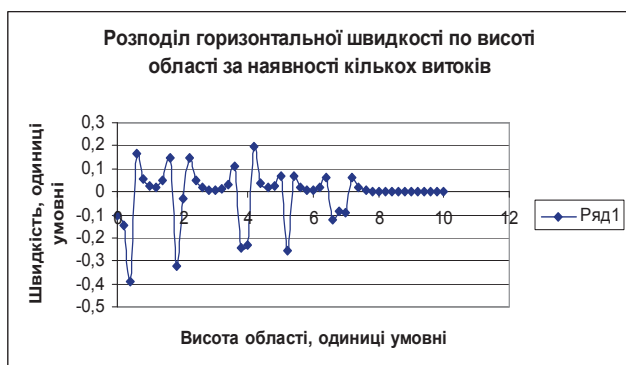


Рис. 1. Залежність між горизонтальною компонентою швидкості та висотою колони (випадок 5 зон витоків)



Рис. 2. Залежність між горизонтальною компонентою швидкості та висотою колони (випадок 1 зони витoku)

Знаходячи витрату рідини через зони відбору  $[u_i, u_{i+1}]$ ,  $i=1, \dots, L$ , де  $L$ - кількість зон відбору,

та порівнюючи з потоком рідини, що прибуває в область, можна оцінити швидкість накопичення води в області: нехай витрата рідини через зони відбору складає  $Q_1$ ,  $Q_1 = \rho VS$ ;  $V$  – горизонтальна швидкість,  $\rho$  – густина рідини;  $S$  – площа зон відбору – наприклад, для циліндричної області  $S_i = 2\pi R l_i$ , де  $l_i$  – висота  $i$ -ої зони відбору,  $S = \sum_{i=1}^L S_i$ , а інтенсивність надходження води  $Q_2$ , при цьому слід зазначити, що розмірність  $[Q_1] = [Q_2] = \frac{кг}{с}$ .

Знаходячи значення

$$Q = Q_2 - Q_1, Q > 0, \tag{10}$$

та приймаючи, що

$$Q = \frac{V_0 \rho}{t}, V_0 = S_{осн} h, \tag{11}$$

де  $V_0$  – об'єм, який займає вказана маса води,  $S_{осн}$  – площа основи області,  $t$  – час, та враховуючи, що для циліндричної області

$$V_0 = \pi R^2 h, \tag{12}$$

Одержуємо:

$$h = \frac{Qt}{\pi R^2 \rho}, \tag{13}$$

де  $h$  – рівень води через час  $t$  при заданій інтенсивності надходження води.

## 6. Висновки

1. Створені математичні моделі процесу фільтрації рідини через середовище з певним рівнем проникності дозволяє оцінити рівень ґрунтових та паводкових вод та вивчити особливості процесу фільтрації (розподіл тиску та швидкості фільтрації), а також оцінити розміри областей поширення рідини в середовищі.

2. Моделі фільтрації з урахуванням умови (9) та без цієї умови дають однаковий результат з точки зору фізичної картини процесу.

3. Напрямки подальших досліджень можуть бути пов'язані з дослідженням вказаної моделі для випадку  $\mu = \mu(x, y), k = k(x, y)$ , при цьому задачі (3) та (4) зводяться до необхідності розв'язання задачі Пуасона для тиску рідини з умовами типу (5), (9).

## Література

1. Лейбензон, Л.С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде [Текст] / Л.С. Лейбензон – М.-Л.: Гостехиздат, 1947. – 244 с.
2. Полубаринова-Кочина, П.Я. Теория движения грунтовых вод [Текст] / П.Я.Полубаринова – Кочина - М.: Наука, 1977. – 664 с.
3. Нигматулин, Р.И. Основы механики гетерогенных сред [Текст] / Р.И.Нигматулин – М.: Наука, 1978. – 332 с.
4. Самарский, А.А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. [Текст] / А.А.Самарский – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 320 с.

5. Олійник, А.П. Математическое моделирование нестационарной фильтрации с целью оценки физико-механических свойств грунтов в зоне трубопровода [Текст] / А.П.Олійник, М.В.Панчук – Сб. м-лов XI Межвузовской школы – семинара «Методы и средства технической диагностики» - Ивано-Франковск, 1992 – С.137-140.
6. Леонтьев, Н.Е. Основы теории фильтрации: Учебное пособие. [Текст] / Н.Е. Леонтьев – Изд-во прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2009. – 88 с.
7. Андерсон, Д. Вычислительная гидромеханика и теплообмен [Текст] / Д. Андерсон, Дж. Таннехил, Р.Плетчер – М.: Мир, 1990 – Т.1 -384с.
8. Олійник, А.П. Дослідження впливу параметрів релаксації на збіжність чисельного методу послідовної верхньої релаксації для задачі Діріхле [Текст] // А.П. Олійник, Л.О. Штаєр / Карпатські математичні публікації, 2012 – Т.4, №2 – С.289-296.
9. Шешенин, С.В. Моделирование нестационарной фильтрации, вызванной разработкой месторождений [Текст] // С.В.Шешенин, Э.Р.Канушев, Н.Б.Артамонова / Вестник Московского Университета. Серия 1: Математика. Механика, 2011, №5 – С.66-68.

### Abstract

The article concerns the mathematical models of filtration of groundwaters taking into account the environmental (flooding) and technological (extraction of shale gas) factors. The models of Darcy and Forchheimer were considered with appropriate boundary conditions; the numerical implementation of the models was carried out. It was determined that the pattern of the filtration under conditions that  $V \gg V^2$ , where  $V$  is a typical filtration rate and without this condition, is identical, according to its qualitative measures. The peculiarities of the filtration process for the areas with different configurations of fluid invaded zones through the area boundary were determined; the impact of these zones on the spatial nature of the flow in the studied area was assessed. The obtained results permit to assess the level of groundwaters, and the peculiarities of their distribution in terms of environmental characteristics of the flow in the presence of different geometrical configuration of leakage zones through the studied area. These results can be used to assess the impact of the environmental and technological factors on water quality and to prevent flood waters

**Keywords:** numerical method, flow, groundwaters, models of Darcy and Forchheimer

Побудовано математичну модель процесу взаємодії лазерного випромінювання з ембрионом на основі чисельних значень коефіцієнтів теплопровідності його слоїв і математичного розрахунку розподілу температури в ембріоні

Ключові слова: математична модель, коефіцієнти теплопровідності

Построена математическая модель процесса взаимодействия лазерного излучения с эмбрионом на основе численных значений коэффициентов теплопроводности его слоев и математического расчета распределения температуры в эмбрионе

Ключевые слова: математическая модель, коэффициенты теплопроводности

УДК 517.955\$635.5

## РАСЧЕТ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ В МНОГОСЛОЙНОЙ СТРУКТУРЕ ЭМБРИОНА

Д. А. Левкин

Аспирант

Кафедра кибернетики

Харьковский национальный технический университет

сельского хозяйства им. П.Василенко

ул. Артема, 44, г. Харьков, Украина, 61002

Контактный тел.: (057) 716-42-63

E-mail: artur.lav@3g.ua

### 1. Введение

При тепловом воздействии лазера на эмбрион актуальной научной задачей является уменьшение травмируемости blastomeres. Эмбрион - это сферический микробиологический объект, состоящий из зоны пеллюцида, перивителлированного пространства и blastomeres. Зона пеллюцида на 90% состоит

из воды, 5% которой составляют белковые молекулы. Blastomeres имеют сферическую форму и являются белковыми компонентами эмбриона. Согласно неоднородному химическому составу слоев эмбриона, при взаимодействии лазерного излучения с эмбрионом происходит неравномерное распределение температуры по его слоям [1]. Для уменьшения травмируемости эмбриона при построении математической моде-