

*Представлено математичну модель перемішування при культивуванні біологічних агентів чутливих до дії напруження зсуву. Розв'язання математичної моделі дозволяє визначити розподілення швидкостей по товщині примежового шару, градієнти швидкості, розподілення зсувних напружень, сили тертя на поверхні перемішуючого пристрою та витрати енергії на подолання сили тертя при русі лопати мішалки в культуральній рідині*

*Ключові слова: біологічний агент, ферментер, культуральна рідина, зсувні напруження, примежовий шар, перемішуючий пристрій, математична модель*

*Представлена математическая модель перемешивания при культивировании биологических агентов, чувствительных к воздействию напряжения сдвига. Решение математической модели позволяет определить распределение скоростей по толщине пограничного слоя, градиенты скорости, распределение напряжений сдвига, силы трения на поверхности перемешивающего устройства и затраты энергии на преодоление силы трения при движении лопасти мешалки в культуральной жидкости*

*Ключевые слова: биологический агент, ферментёр, культуральная жидкость, напряжения сдвига, пограничный слой, перемешивающее устройство, математическая модель*

# МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПЕРЕМІШУВАННЯ ПРИ КУЛЬТИВУВАННІ БІОЛОГІЧНИХ АГЕНТІВ, ЧУТЛИВИХ ДО НАПРУЖЕНЬ ЗСУВУ

**Л.І. Ружинська**

Кандидат технічних наук\*

Контактний тел.: 050-961-75-15

**В.М. Поводзинський**

Кандидат технічних наук\*

E-mail: vnpovodzinskiy@mail.ru

**Є.М. Чередник\***

Контактний тел.: 098-308-02-08

E-mail: yevgen.cherednyk@gmail.com

**Є.В. Морозова\***

\*Кафедра біотехніки та інженерії

Національний технічний університет

України "Київський політехнічний інститут"

пр. Перемоги, 37, м. Київ, Україна, 03056

Контактний тел.: 096-683-83-22

E-mail: gm-90@ukr.net

## 1. Вступ

Культивування біологічних агентів (БА) з метою отримання біологічно активних речовин (БАР) та біомаси реалізується у ферментері в умовах штучно створеного зовнішнього оточення. Ферментер, як апарат для проведення тепло-масообмінних процесів забезпечує можливість керування біосинтезом у культуральній рідині з метою використання потенціалу БА.

Сучасні біотехнологічні процеси доволі часто орієнтовані на використання в якості БА клітинних об'єктів, таких як: клітини ссавців та міцеліальні культури мікроорганізмів. І перші, і другі відносяться до тих БА, що можуть існувати в обмеженому діапазоні кінетичної енергії, що внесена в культуральну рідину при перемішуванні. Перемішування, як основний процес, що відбувається у ферментаційній апаратурі спрямований на вирівнювання градієнтів концентрацій речовин та енергії.

## 2. Постановка задачі

Процес перемішування спрямований на рівномірний розподіл зважених часток та енергії, а також на диспергацію крапель та бульбашок у культуральній

рідині при її примусовому русі. В ферментерах різної конструкції необхідно досягти найкращих умов транспортування поживних субстратів до поверхні біологічних агентів і відведення продуктів метаболізму та тепла. При цьому виникають циркуляційні потоки, що супроводжується виникненням зсувних напружень, характер і інтенсивність яких залежить від конструкцій ферментерів і перемішуючих пристроїв. Інтенсифікація масопередачі при перемішуванні достатньо часто обмежується чутливістю біологічних агентів до зсувних деформацій, а отже і напружень, що виникають при роботі перемішуючих пристроїв, особливо в шарах культурального середовища, яке безпосередньо контактує з поверхнею рухомих елементів. В таких процесах режими перемішування і конструкція перемішуючих пристроїв повинна відповідати умовам мінімізації їх негативного впливу на біологічні агенти. З метою якісного і кількісного аналізу зсувних напружень, що виникають в шарах рідини, і що знаходяться в безпосередньому контакті з поверхнями лопатей перемішуючого пристрою, пропонується математична модель руху рідини в примежовому шарі біля лопатей.

При обертвовому русі перемішуючого пристрою виникають зсувні деформації, а отже і напруження в шарах культурального середовища, які безпосередньо

контактують з поверхнею лопаті мішалки. З метою якісного і кількісного аналізу зсувних напружень, що виникають в шарах рідини, що знаходяться в безпосередньому контакті з поверхнями лопатей перемішувального пристрою, будемо математичну модель руху рідини в примежовому шарі біля лопатей [1].

### 3. Мета і задача роботи

Метою є розробка математичної моделі перемішування при культивуванні біологічних агентів, чутливих до дії напруження зсуву і знайти найкращі умови перемішування.

### 4. Розрахункові дані та їх обробка

Розглянемо рух рідини у примежовому шарі, біля поверхні лопаті мішалки (рис. 1). Рух рідини описується диференціальними рівняннями Нав'є-Стокса. Розмістимо початок координат в перерізі, що відповідає точці лопаті, яка входить в рідину. Вісь x направимо вздовж лопаті в напрямку руху рідини в протилежному напрямі руху лопаті, а вісь y – перпендикулярно до площини лопаті. Вважаємо, що рух рідини по ширині лопаті відсутній.

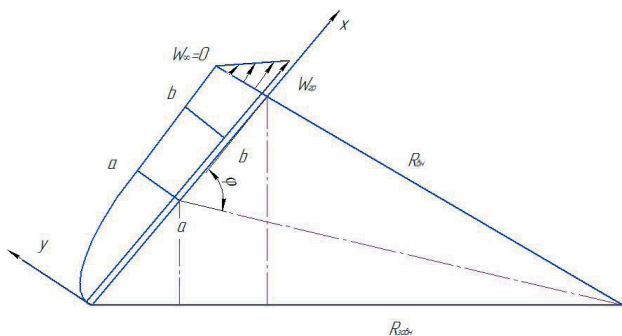


Рис. 1. Схема руху рідини в примежовому шарі біля лопаті перемішувального пристрою (залежність товщини примежового шару від кута φ)

Запишемо рівняння Нав'є-Стокса і рівняння нерозривності примежового шару.

$$\begin{cases} W_x \frac{\partial W_x}{\partial x} + W_y \frac{\partial W_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \sigma \left( \frac{\partial^2 W_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_x}{\partial y^2} \right); \\ W_x \frac{\partial W_y}{\partial x} + W_y \frac{\partial W_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \sigma \left( \frac{\partial^2 W_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_y}{\partial y^2} \right); \\ \frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Граничні умови:

$$y = 0, W_y = 0; \quad (2)$$

$$W_x = W_{xrp}; \quad (3)$$

$$y = \delta_{rp}, W_y = 0; \quad (4)$$

$$W_x = 0. \quad (5)$$

Розглянемо процес перемішування в перерізах a-a і b-b (рис. 1). Запишемо вираз для витрат рідини в перерізах a-a і b-b:

$$G_{a-a} = \rho L \int_0^h W_x dy; \quad (6)$$

$$G_{b-b} = \rho L \int_0^h W_y dx. \quad (7)$$

Зміна витрати рідини на відрізку dx визначається за рівнянням:

$$\frac{dG_{a-a}}{dx} dx = \rho L \frac{d}{dx} \left( \int_0^h W_x dy \right) dx. \quad (8)$$

Запишемо зміну імпульсу вздовж осі OX:

$$\rho \frac{d}{dx} \left( \int_0^h W_x^2 dy \right) dx; \quad (9)$$

$$\rho W_{rp} \frac{d}{dx} \left( \int_0^h W_x dy \right) dx. \quad (10)$$

Враховуючи, що швидкість  $W_{rp}$ :

$$W_{rp} = \omega R \cos \phi. \quad (11)$$

Рівняння кількості руху запишеться у вигляді:

$$-\rho W_{rp} \frac{d}{dx} \left( \int_0^h W_x dy \right) dx + \rho \frac{d}{dx} \left( \int_0^h W_x^2 dy \right) dx = -\tau_w dx, \quad (12)$$

або

$$\frac{d}{dx} \left( \int_0^h (W_{rp} - W_x) W_x dy \right) dy = \frac{\tau_w}{\rho}. \quad (13)$$

Для подальшого визначення товщини примежового шару необхідно знайти вираз для визначення швидкості. Нехай цей вираз має вигляд степеневого поліному третього порядку [3]:

$$W_x = a + by + cy^2 + dy^3. \quad (14)$$

Тоді вираз для швидкості приймає вигляд:

$$W_x = W_{xrp} - \frac{3W_{xrp}}{\delta} y + \frac{3W_{xrp}}{\delta^2} y^2 - \frac{3W_{xrp}}{\delta^3} y^3. \quad (15)$$

Остаточно:

$$W_x = W_{xrp} \left( 1 - \frac{3y}{\delta} + 3 \frac{y^2}{\delta^2} - \frac{y^3}{\delta^3} \right) = W_{xrp} \left( 1 - \frac{y}{\delta} \right)^3. \quad (16)$$

Приймаємо позначення:

$$1 - \frac{3y}{\delta} + 3 \frac{y^2}{\delta^2} - \frac{y^3}{\delta^3} = f(y, \delta). \quad (17)$$

Знаходимо рівняння збереження імпульсу:

$$\frac{d}{dx} \int_0^h \left[ (W_{y_{\text{зр}}} - W_{x_{\text{зр}}} \cdot f(y, \delta)) W_{x_{\text{зр}}} \cdot f(y, \delta) \right] dy = \frac{\tau \omega}{\rho}. \quad (18)$$

Після інтегрування, рівняння запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} & -\frac{d}{dx} \left[ W_{y_{\text{зр}}} - W_{x_{\text{зр}}} \cdot \left( y - \frac{3y^2}{2\delta} + \frac{3y^3}{3\delta^2} - \frac{1y^4}{4\delta^3} \right) \right]_0^h - \\ & - W_{x_{\text{зр}}}^2 \cdot \left( y - \frac{6y^2}{2\delta} + \frac{15y^3}{3\delta^2} - \frac{20y^4}{4\delta^3} + \frac{15y^5}{5\delta^4} - \frac{6y^6}{6\delta^5} + \frac{1y^7}{7\delta^6} \right)_0^h = \\ & = \frac{\tau \omega}{\rho}. \end{aligned} \quad (19)$$

З урахуванням виразу для:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left[ \omega^2 R^2 \sin \varphi \cos \varphi \left( \delta - \frac{3}{2}\delta + \delta - \frac{1}{4}\delta \right) - \right. \\ & \left. - \omega^2 R^2 \sin^2 \varphi \left( \delta - 3\delta + 5\delta + 3\delta - \delta + \frac{1}{7}\delta \right) \right] = \frac{\tau \omega}{\rho}; \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & \omega^2 R^2 \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{2} \sin 2\varphi \cdot \frac{1}{4}\delta - \sin^2 \varphi \cdot \frac{1}{7}\delta \right] = \\ & = \omega^2 R^2 \delta \frac{d}{dx} \left[ \frac{\sin 2\varphi}{8} - \frac{\sin^2 \varphi}{7} \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Значення для напруження зсуву запишемо у вигляді:

$$\tau_{\omega} = \mu \left( \frac{dW_x}{dy} \right). \quad (22)$$

Середній градієнт швидкості знаходимо з виразу:

$$\frac{dW_x}{dy} = \frac{W_{x_{\text{зр}}}}{\delta}. \quad (23)$$

Тоді рівняння (21) остаточно приймає вигляд:

$$\omega^2 R^2 \delta \frac{d}{dx} \left[ \frac{\sin 2\varphi}{8} - \frac{\sin^2 \varphi}{7} \right] = \frac{\mu}{\rho} \frac{W_{x_{\text{зр}}}}{\delta}, \quad (24)$$

або

$$\omega^2 R^2 \delta d\delta \left[ \frac{\sin 2\varphi}{8} - \frac{\sin^2 \varphi}{7} \right] = \frac{\mu}{\rho} \sin \varphi dx. \quad (25)$$

З рівняння (25) знаходимо вираз для  $\delta$ :

$$\delta = \sqrt{\frac{2\sigma \sin \varphi \cdot x}{\omega R \left( \frac{\sin 2\varphi}{8} - \frac{\sin^2 \varphi}{7} \right)}}. \quad (26)$$

Знаходимо градієнт швидкості  $\frac{dW_x}{dy}$  після диференціювання виразу (16):

$$\begin{aligned} \frac{dW_x}{dy} &= W_{x_{\text{зр}}} \cdot \left( -\frac{3}{\delta} + 3 \frac{y}{\delta^2} - \frac{y^2}{\delta^3} \right) = -\frac{3W_{x_{\text{зр}}}}{\delta} \left( 1 - \frac{2y}{\delta} + \frac{y^2}{\delta^2} \right) = \\ &= -\frac{3W_{x_{\text{зр}}}}{\delta} \left( 1 - \frac{y}{\delta} \right)^2. \end{aligned} \quad (27)$$

Вираз для градієнта швидкості і напруження зсуву на поверхні лопаті:

$$y=0, \quad \frac{dW_x}{dy} = -\frac{3W_{x_{\text{зр}}}}{\delta} = -\frac{3\omega R \sin \varphi}{\delta}; \quad (28)$$

$$\tau_w = -\mu \frac{3\omega R \sin \varphi}{\delta}. \quad (29)$$

Потужність, що витрачається на перемішування визначається з виразу:

$$N = M_{\text{кр}} \cdot \omega, \quad (30)$$

де

$$M_{\text{кр}} = F \cdot R. \quad (31)$$

Силу зсуву знаходимо з виразу:

$$\begin{aligned} F &= H \int_0^1 \frac{3\mu \omega R \sin \varphi}{\delta_x} dx = \\ &= 3\mu \omega R \sin \varphi H \int_0^1 \frac{\sqrt{\omega R} \cdot \sqrt{\frac{\sin 2\varphi}{8} - \frac{\sin^2 \varphi}{7}}}{\sqrt{2\sigma \sin \varphi} \cdot \sqrt{x}} dx = \\ &= \frac{6\mu \omega R \sin \varphi H \sqrt{\omega R} \cdot \sqrt{\frac{\sin 2\varphi}{8} - \frac{\sin^2 \varphi}{7}}}{\sqrt{2\sigma \sin \varphi}} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{x_0}^{-1}. \end{aligned} \quad (32)$$

Остаточно потужність визначається за рівнянням:

$$N = \frac{6\mu \omega^2 R^2 \sin \varphi H \sqrt{\omega R} \cdot \sqrt{\frac{\sin 2\varphi}{8} - \frac{\sin^2 \varphi}{7}} \cdot \sqrt{l}}{\sqrt{2\sigma \sin \varphi}}. \quad (33)$$

## 5. Візуалізація отриманих розрахунків

Отримані формули дозволяють дослідити товщину прилежового шару і розподілення напруження зсуву в шарі.

Було розраховано величину напруження зсуву при різні значення  $\varphi$  та  $\omega$ . Всі отримані результати мають спільну ознаку: чим менша відстань від краю перемішувального пристрою, тим більша величина напруження зсуву.

Тому далі для прикладу наведено графік залежності  $\tau(y)$ .

$$\text{При } \varphi = 30^\circ, \quad \omega = 6,28 \frac{M}{c}$$

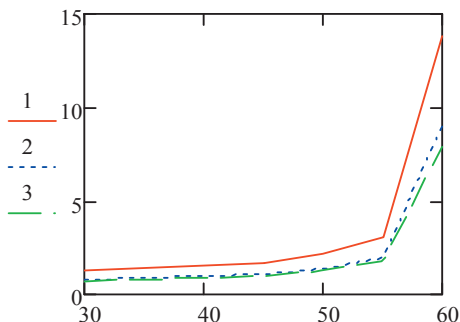


Рис. 2. Графік залежності товщини прилежого шару від кута  $\phi$ , де  $\delta_1$  - товщина при  $n = 1c^{-1}$ ;  $\delta_2$  - товщина при  $n = 2,33c^{-1}$ ;  $\delta_3$  - товщина при  $n=3c^{-1}$

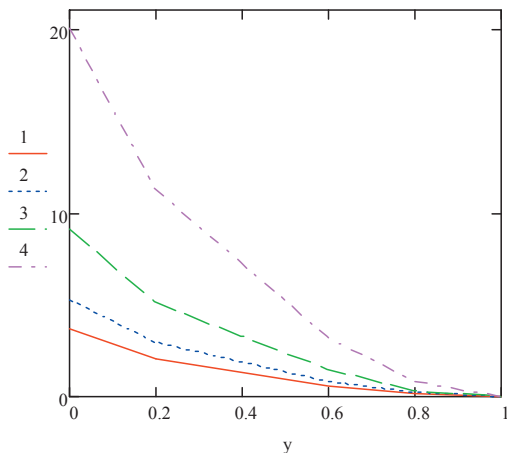


Рис. 3. Графік залежності  $\tau(y)$ , де  $\tau_1$  при  $x=0,15$  м;  $\tau_2$  при  $x=0,075$  м;  $\tau_3$  при  $x=0,025$  м;  $\tau_4$  при  $x=0,0125$  м - 1-долі від товщини прилежого шару  $\delta$

На рис. 2, 3 наведені залежності, які розраховані для культуральної рідини з такими параметрами: в'язкість  $\mu = 1,55 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$ , густина  $\rho = 1060 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ .

**6. Висновки**

При розташуванні лопаті впоперек потоку напруження зсуву на кромці лопаті досягає найбільших значень, що може привести до руйнування живих клітин. Розташовуючи лопаті під різним кутом до напрямку вектора кутової швидкості можна зменшити значення напруження зсуву, а збільшуючи довжину лопаті і зменшуючи відстань між лопатями, можна досягти того, що прилежові слої будуть досягати один одного і цей ефект може привести до більш інтенсивно перемішування культуральної рідини.

Література

1. Соколов, В.Н., Яблокова М.А. Аппаратура микробиологической промышленности.-Л.: Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1988.- 278с.
2. Резенчук, О.Є., Поводзинський В.М, Шибецький В.Ю. Класифікація та аналіз роботи ферментерів з пневматичним перемішуванням // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – Київ : Нац. техн. ун-т України «КПІ». – 2011. – № 3. – С. 79-84.
3. Юдаев, Б. Н. Техническая термодинамика. Теплопередача: Учеб. для неэнергетич. спец. вузов.-М.: Высш. шк., 1988.-479 с.
4. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. Шлихтинг, перев.с немецкого, Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», Москва, 1974. – 724с.

**Abstract**

The development of modern production of various goods is determined largely by the introduction of new technologies, including the biotechnology, which is based on the use of biological agents for the synthesis of new goods. The use of biological agents in industrial processes is possible when creating favorable conditions (temperature level, substrate transportation, removal of metabolic products) for their activity in industrial equipment, namely, in fermenters. To ensure favorable conditions various methods of mixing are used.

The article studies the process of mixing in the fermenter for cultivation of the biological agents, sensitive to the action of transverse strains. A mathematical model of movement of culture fluid in the boundary layer near the moving elements of a mixing device was developed. The solution of the mathematical model helps to determine the distribution of velocities along the thickness of the boundary layer, velocity gradients, distribution of transverse strains, of the friction force on the surface of a switching device and power consumption for overcoming of the friction force when the mixer's blade is moving in the culture fluid. The graphic dependences of velocity and transverse strain, obtained by calculation, were presented. The mathematical model permits to determine the dependence of the transverse strain on the number of mixers' rotations and the angle of inclination of mixers' plane to the direction of movement.

**Keywords:** biological agent, fermenter, culture fluid, transverse strains, boundary layer, mixing device, mathematical model