

Література

1. Криваковская, Р. В. Анализ способов оценки достоверности входных данных для оценки состояния воздуха. / Р. В. Криваковская // Восточно-европейский журнал передовых технологий. № 6, 2012. Экология, технологии пищевых производств, безопасность жизнедеятельности. С. 44-47.
2. Попов, О.О. Математичне та комп'ютерне моделювання техногенних навантажень на атмосферу міста від стаціонарних точкових джерел забруднення [Текст] : дис. ... канд. техн. наук : 01.05.02 / О.О. Попов – К., 2010. – 198 с.
3. Яцишин, А.В. Комп'ютерні засоби прогнозування техногенних навантажень на атмосферу [Текст] / А.В. Яцишин, О.О. Попов, В.О. Артемчук // Східно-Європейський журнал передових технологій - 2009. – Вип. 5/2 (41). – С. 33-36.
4. Пампура, В.И. Анализ радиоцепей и их схемной надежности. [Текст] / В.И. Пампура – К.: Техника, - 1967. – 324 с.

**Abstract**

The article considers the question of definition of the analytical expression of relative errors for the value of statistical modifications of models of the IAEA and Roberts, depending on the relative errors of measurement of input parameters of models. The relevance of this work is related with the relevance of modeling with low-quality input data. The novelty consists in the definition of expressions to calculate the errors, which will permit to determine the values of the errors of the input parameters, at which the value of the errors of a model is too large, and it is unreasonable to apply it in practice. Also, the expressions of error can be used to determine the level of impact of different types of input data on the simulation result. The work on the determination of errors is a part of the work connected with the unreliability of data in the system of estimation of the atmospheric air

**Keywords:** mathematical modeling, the relative error

Наведено модель оцінки рівня варіативності матриці пасажирських кореспонденцій, яка враховує розмірність матриці. Визначено закономірність зміни кількості варіантів матриці пасажирських кореспонденцій при різних характеристиках транспортних зв'язків в місті та варіативності формування циклів перетворення матриці

Ключові слова: пасажирська кореспонденція, комбінаторний аналіз, матриця кореспонденцій, цикл перетворення, ймовірність

Представлена модель оценки уровня вариативности матрицы пассажирских корреспонденций, учитывающая размерность матрицы. Определена закономерность изменения количества вариантов матрицы пассажирских корреспонденций при различных характеристиках транспортных связей в городе и вариативности формирования циклов преобразования матрицы

Ключевые слова: пассажирская корреспонденция, комбинаторный анализ, матрица корреспонденций, цикл преобразования, вероятность

УДК 656.025

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ УРОВНЯ ВАРИАТИВНОСТИ МАТРИЦЫ ПАССАЖИРСКИХ КОРРЕСПОНДЕНЦИЙ

**А. В. Россолов**

Кандидат технических наук\*

Контактный тел.: (057) 707-37-83

E-mail: ross\_a@rambler.ru

**Е. В. Любый**

Кандидат технических наук\*

Контактный тел.: (057) 707-37-83

E-mail: lion\_khadi@mail.ru

\*Кафедра транспортных систем и логистики  
Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет  
ул. Петровского, 25, г. Харьков, Украина, 61002

## 1. Введение

Основной целью функционирования маршрутной сети городского пассажирского транспорта является удовлетворение потребностей населения в передвижениях с минимальными затратами времени. Организа-

ция эффективной работы городского пассажирского транспорта возможна при наличии корректной и достоверной информации о спросе населения на услуги городского пассажирского маршрутного транспорта (ГПМТ). В большинстве случаев спрос населения на услуги пассажирского маршрутного транспорта

представляется в виде матрицы пассажирских корреспонденций (МПК), получение которой сопряжено с решением ряда методологических вопросов. Одним из них является сложность описания процесса передвижения пассажиров в крупных городах, что обусловлено развитостью городской инфраструктуры, значительными размерами городской территории, большим количеством альтернативных вариантов реализации культурно-бытовых и трудовых потребностей. В большинстве научных работ, посвященных моделированию МПК, процесс формирования пассажирской корреспонденции формализуется как детерминированный, при котором функциональная взаимосвязь описывается с использованием, как правило, одного транспортного фактора. Однако в последних работах, которые посвящены поиску методов расчета МПК, показано, что спрос населения на услуги ГПМТ носит случайный характер, следовательно, количество вариантов МПК для каждого города будет больше одного.

## 2. Анализ существующих подходов к моделированию вариантов МПК

Существующие модели и методы получения МПК можно выделить в две группы. К первой относятся широко распространённые модели, основанные на априорных гипотезах об аналогии процесса формирования спроса на услуги ГПМТ с физическими процессами (закон гравитации, термодинамики и т.д.). Результатом моделирования пассажирских корреспонденций при таком подходе является один вариант МПК. Это обусловлено тем, что корреспонденция рассматривается как детерминированная величина, зависящая, как правило, от трудности сообщения между транспортными районами. Такой детерминистический подход к определению пассажирских корреспонденций имеет ряд недостатков. Основными из них являются невысокая точность результатов моделирования (ошибка может колебаться от 200 до 300 процентов [1]) и необходимость калибровки полученных данных.

Ко второй группе относятся модели, основанные на гипотезе о стохастическом характере процесса формирования спроса на услуги пассажирского маршрутного транспорта. Стохастичность предопределяет наличие большого количества различных исходов при неизменных значениях входящих параметров. Ключевым вопросом при этом является оценка возможного количества конечных состояний исследуемого объекта, чем в рамках решаемой задачи являются варианты МПК. В [2] предложен показатель оценки состояния спроса – величина транспортной работы городского пассажирского транспорта (ГПТ), экстремумы которой являются верхней и нижней границами совокупности вариантов  $\Omega$  МПК. При этом в [2] метод определения мощности множества  $\Omega$  не предложен.

При большой величине интервала достоверных состояний спроса практически невозможно выполнить моделирование всех элементов множества  $\Omega$ , при этом могут возникнуть сложности в получении репрезентативной выборки из  $\Omega$ .

## 3. Постановка задачи

Объектом исследования является процесс формирования спроса на передвижения пассажиров ГПТ. Предметом исследования является зависимость вариативности МПК от ее размерности. Объект исследования в результате формализации имеет вид следующей функции:

$$h_{ij} = f(D_i, A_j, \epsilon), \quad (1)$$

где  $h_{ij}$  – величина пассажирской корреспонденции между  $i$ -м и  $j$ -м транспортными районами (ТР), пасс.;

$D_i$  – ёмкость  $i$ -го ТР по отправлению, пасс.;

$A_j$  – ёмкость  $j$ -го ТР по прибытию, пасс.;

$\epsilon$  – случайные факторы, предопределяющие характер распределения ёмкостей транспортных районов по ячейкам матрицы корреспонденций.

Результаты исследований, представленные в [3, 4], позволили сделать вывод, что транспортные факторы не являются превалирующими при выборе места трудовой деятельности. Перечень факторов, предопределяющих, например, формирование пары «жилье-работа», довольно значителен, при этом отсутствуют ярко выраженные факторные признаки, оказывающие наибольшее влияние [3, 4]. Фактически инженеру-транспортнику, планирующему работу городского пассажирского транспорта, корректно выявить влияние большого перечня факторных признаков на выбор пары «жилье-работа» практически невозможно. Исходя из этого, влияние факторных признаков рассматривается как случайное –  $\epsilon$ .

Основными условиями моделирования МПК является:

$$\sum_{j=1}^r h_{ij} = D_i, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^r h_{ij} = A_j, \quad (3)$$

где  $r$  – количество ТР, ед.

Таким образом, пусть каждый вариант МПК получается в результате случайного циклического перемещения некоторого количества корреспонденций между ячейками матрицы по аналогии с решением транспортной задачи линейного программирования, но без оптимизационного характера. При этом выполняется условия (2) и (3). Величина перемещаемых по циклу корреспонденций является случайной. Исходный вариант МПК, который циклично преобразовывается, не должен быть детерминирован характеристиками транспортного процесса. Для его расчета предлагается использовать аналитические зависимости [5].

Исходя из выше обозначенного, можно сформулировать цель данного исследования – моделирование количества возможных вариантов МПК при различных ее размерностях.

## 4. Решение поставленной задачи

На первом этапе решения поставленной задачи использовался комбинаторный анализ. Каждый цикл изменения МПК является, по сути, сочетанием неко-

того количества элементов. Согласно [6] количество сочетаний без повторов из  $m \times n$  элементов определяется по зависимости

$$C_n^k = \frac{(m \cdot n)!}{(m \cdot n - k)!k!}, \quad (4)$$

где  $m, n$  – количество элементов соответственно по горизонтали и вертикали, ед;

$k$  – количество элементов в сочетании, ед.

Однако применение (4) в контексте решаемой задачи вызывает сложности, так как при выполнении цикла перемещения в каждой строке и столбце матрицы может быть задействована лишь одна ячейка [7], что приводит к сокращению размерности матрицы. Принимая во внимание это условие, методом индукции произведем построение математической модели.

На втором этапе решения задачи рассмотрен вариант матрицы, в которой количество строк и столбцов одинаково, то есть  $m = n$ . Количество ячеек в матрице, из которых может начинаться цикл, составляет  $m^2$ . Минимальная длина простейшего цикла составляет четыре ячейки, которые между собой создают замкнутый контур. По аналогии с решением транспортной задачи линейного программирования нечетные ячейки приняты основными, так как минимальная величина корреспонденции, которую можно перемещать по контуру, определяется среди этих ячеек. При этом количество вариантов местоположения нечетной ячейки (третьей вершины в случае простейшего контура) для построения простейшего цикла составляет  $(m-1)^2$ . С учетом выше изложенного количество простейших циклов (4 ячейки в контуре) преобразования МПК с размерностью  $m \times m$  будет определяться:

$$C = \frac{m^2 \cdot (m-1)^2}{2}, \quad (5)$$

где  $C$  – количество циклов в матрице, ед.

Увеличение количества вершин в цикле до 6 приведет (5) к виду:

$$C = \frac{m^2 \cdot (m-1)^2 \cdot (m-2)^2}{3}. \quad (6)$$

Очевидно, что составляющая  $(m-2)^2$  показывает количество ячеек в матрице, которые могут быть использованы в качестве третьей нечетной вершины. Агрегируя (5) и (6), количество циклов с  $g$ -м количеством ячеек в нем определяется по следующей зависимости

$$C = \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (m-i)^2}{k}, \quad \text{при } h_{ij} > 0; m, k > 0; m, i, k \in Z, \quad (7)$$

где  $k$  – количество ячеек в цикле с нечетными номерами, ед.

$$k = \frac{g}{2}, \quad (8)$$

где  $g$  – количество ячеек МПК, задействованных в цикле, ед.

Необходимо отметить, что МПК может характеризоваться нулевыми значениями емкостей ТР по отправлению или прибытию. В этом случае ее размер-

ность будет  $m \times n$ , так как строка или столбец с нулевой емкостью исключается из матрицы. В этом случае количество возможных циклов в ней определяется по аналогии с (7), но с учетом изменения размерности массива данных получаем:

$$C = \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (m-i) \cdot (n-i)}{k}, \quad \text{при } h_{ij} > 0; m \neq k, m, k > 0; m, i, k \in Z. \quad (9)$$

При расчете количества циклов в матрице возникает вопрос о наибольшей длине цикла, то есть максимальном количестве ячеек, которые могут быть задействованы в одном цикле.

Очевидно, что  $k_{\max} = \min(m; n)$ , так как при  $k > \min(m; n)$  числитель (9) принимает значение равное нулю.

В результате выполнения цикла в МПК возможно обнуление значения корреспонденции в одной или нескольких ячейках. В этом случае в модели (8) или (9) необходимо ввести дополнительный компонент, учитывающий вероятность построения цикла с ячейками МПК, в которых корреспонденции равны нулю.

Для этого необходимо определить вероятность появления в МПК корреспонденций с нулевыми значениями. Так как количество корреспондирующих пассажиров между ТР рассматривается как случайная величина, используя математическую статистику, можно определить закон распределения данной величины. Очевидно, что величина корреспонденции может быть только целочисленной. Соответственно в качестве гипотез о ее распределении рассматриваются дискретные законы.

В качестве статистических данных для решения данного вопроса были взяты результаты сплошного натурного обследования трудовых передвижений населения города Харькова в 1989 году. Аналогов данному обследованию в других крупных городах Украины не было, в связи с их высокой стоимостью и трудоемкостью. Таким образом, ценность этих данных очевидна даже несмотря на временной период, прошедший с момента проведения обследования. В результате проверки гипотез о законе распределений выявлено, что случайная величина  $h_{ij}$  имеет схожесть с геометрическим распределением (рис. 1).

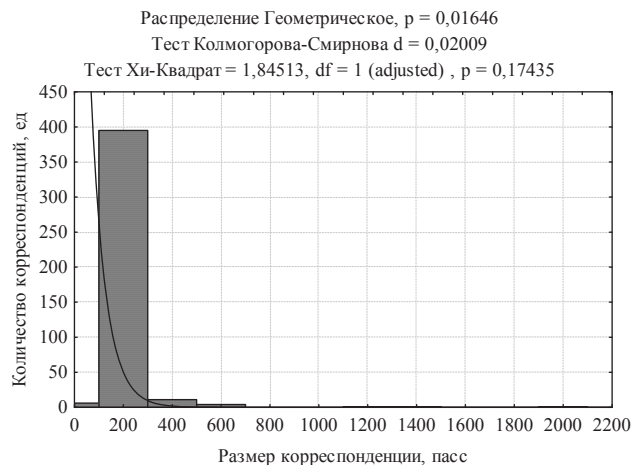


Рис. 1. Зависимость распределения величины пассажирской корреспонденции

Согласно полученному закону распределения, вероятность появления нулевой корреспонденции в МПК соответствует значению параметра  $p$ . На основе этой величины необходимо определить вероятность появления хотя бы одной корреспонденции с нулевым значением в цикле преобразования МПК, что предложено выполнять, используя формулу Бернулли [8]:

$$P(0) = 1 - q^n, \tag{9}$$

где  $P(0)$  – вероятность попадания в цикл хотя бы одной корреспонденции с нулевым значением;

$q$  – вероятность наступления противоположного события событию 0;

$n$  – количество испытаний, ед.

Применительно решаемой задачи количеством испытаний является число ячеек с нечетными номерами, задействованных в цикле.

Исходя из этого, конечный вид формулы для расчета вероятности появления в цикле хотя бы одной корреспонденции с нулевым значением следующий:

$$P(0) = 1 - (1 - p_0)^k, \tag{10}$$

где  $p_0$  – вероятность появления в МПК корреспонденции с нулевым значением.

С учетом (10) общее количество практически возможных циклов  $C_B$  в матрице размерностью  $m \times n$  определяется по формуле:

$$C = \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (m-i) \cdot (n-i)}{k} \cdot (1 - (1 - (1 - p_0)^k)). \tag{11}$$

Используя (11), произведена оценка возможного количества вариантов МПК для матриц трех размерностей:  $60 \times 60, 100 \times 100, 140 \times 140$ .

При этом варьирование диапазона задействованных в цикле ячеек с нечетными номерами будет одинаковым, а именно  $k \in [2; 60]$ . Соответственно длина цикла  $g \in [4; 120]$ . Результаты расчетов представлены на рис. 2.

При отображении оси ординат использован логарифмический масштаб, так как значения результирующего признака  $C_B$  охватывают значительный диапазон.

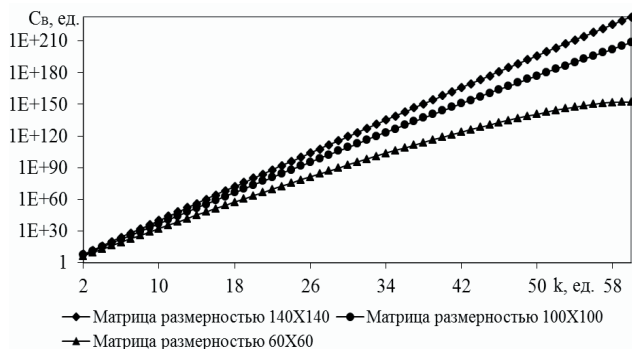


Рис. 2. Зависимость возможного количества циклов в МПК от размерности модели

Расчеты показали, что даже при построении простейших циклов количество возможных вариантов МПК достигает больших значений. При этом размерность МПК оказывает значительное влияние на величину  $C_B$  (табл. 1).

Таблица 1

Результаты моделирования количества возможных вариантов МПК

Длина цикла	Количество возможных вариантов МПК		
	размерность МПК 60×60	размерность МПК 100×100	размерность МПК 140×140
4	6061227	47405032	183163836
40	3,731·10 <sup>66</sup>	6,10046·10 <sup>76</sup>	1,453·10 <sup>83</sup>
80	1,506·10 <sup>125</sup>	1,6191·10 <sup>150</sup>	2,678·10 <sup>164</sup>
120	4,263·10 <sup>161</sup>	8,0554·10 <sup>217</sup>	2,178·10 <sup>242</sup>

Анализ результатов расчетов позволил сделать вывод, что увеличение количества ТР при моделировании МПК приводит к повышению точности моделирования спроса на услуги ГПМТ, что, например, для крупных и крупнейших городов является очень актуальным вопросом.

Однако, в свою очередь увеличение количества ТР в модели спроса на передвижения населения приводит к скачкообразному возрастанию уровня вариативности МПК.

Следует также отметить, что значение вероятности  $p_0$  оказывает непосредственное влияние на количество возможных вариантов МПК. Так при уменьшении корреспондирующих связей между ТР происходит обнуление значений корреспонденций и, соответственно, повышается вероятность появления хотя бы одной «нулевой» ячейки в цикле преобразования МПК.

Вследствие этого уровень вариативности МПК снижается: при размерности матрицы ( $60 \times 60$ ), длине цикла 40, но вероятности  $p_0$  равной 0,0329 (увеличение на 200 процентов), величина  $C_B$  уменьшилась на  $4,16 \cdot 10^{82}$  единиц (28 процентов).

## 5. Выводы

Полученное количество вариантов МПК указывает, что для крупных городов, которые характеризуются большой численностью жителей и площадью, моделирование спроса на передвижения ГПТМ необходимо выполнять с учетом стохастического характера формирования пар «жильё-работа» и «жильё-зона отдыха (досуга)». Размерность модели спроса на услуги ГПМТ оказывает существенное влияние на уровень вариативности МПК. При этом сокращение ТР и уменьшение количества транспортных связей хоть и снижает вариативность МПК, но при этом мощность множества  $\Omega$  остается весьма значительной, что вызывает сложности получения репрезентативной выборки МПК. В связи с этим моделирование реальных вариантов МПК целесообразно выполнять с использованием основ-

ных аспектов интервального моделирования спроса на передвижения, однако, необходима разработка мероприятий по сужению интервала практически возможных вариантов МПК.

#### Литература

1. Брайловский, Н. О. Моделирование транспортных систем [Текст] / Н. О. Брайловский, Б. И. Грановский. – М. : «Транспорт», 1978. – 125 с.
2. Горбачов, П. Ф. Нова концепція моделювання потреб населення у трудових пересуваннях міським пасажирським транспортом [Текст] / П. Ф. Горбачов // Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна. – 2009. – № 27. – С. 210 – 214.
3. Горбачов, П. Ф. Оцінка впливу транспортних факторів на результати вибору людиною робочого місця [Текст] / П. Ф. Горбачов // Вестник ХНАДУ. – 2008. – № 43. – С. 86 – 91.
4. Горбачёв, П. Ф. Влияние условий передвижения на выбор пары «жильё-работа» [Текст] / П. Ф. Горбачёв, А. В. Россолов // Сб. науч. трудов. Автомобильный транспорт. – 2007. – № 21. – С. 64 – 68.
5. Горбачёв, П. Ф. Интервальное моделирование спроса на трудовые передвижения в крупнейших городах [Текст] / П. Ф. Горбачёв, А. В. Россолов, К. В. Костенко // Вісник Східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля. – 2011. – № 159. – С. 248 – 253.
6. Виленкин, Н. Я. Комбинаторика [Текст] / Н. Я. Виленкин. – М. : Наука, 1969. – 328 с.
7. Банди, Б. Основы линейного программирования : пер. с англ. [Текст] / Б. Банди, – М. : Радио и связь, 1989. – 176 с.
8. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для вузов [Текст] / В. Е. Гмурман. – 5-е изд. – М. : Высшая школа, 1977. – 479 с.

#### Abstract

*Represented are the results of a mathematical model construction allowing to estimate the variation level of the origin-destination passengers matrix. The elements of the combinatorial analysis, synthesis, theory of probability and mathematical statistics were used during model development.*

*The main aspect of the investigation is the determination of the regularity of possible origin-destination matrix amount change under the condition of numerous dimensions of the demand model for passengers transportation. The process of passengers demand on the route city transport formation is considered to be a stochastic in this research.*

*This is due to many scientific works proving that the transport factors don't have a dominant influence on the regularity of passengers demand formation in the public transport service. This problem was investigated by the authors of this article earlier.*

*The research results show that the variation level of the origin-destination passengers matrix is very high especially for big cities with more than 500 000 citizens. Thus, it has been investigated the effect of origin-destination matrix dimensions on the level of its variability.*

*It is defined that the reduction of transport connections amount leads to insignificant decrease of possible variants of the origin-destination matrix. So, in order to determine the most probable states of the passengers demand on the passenger route transport it is necessary to use the main aspects of the interval origin-destination matrix modeling*

**Keywords:** *correspondence of passengers, combinatorial analysis, origin-destination matrix, conversion cycle, probability*