*software modules: the measuring module, the module of determination of the parameters of mathematical models, the module of transformation of parameters of mathematical models, the module of communication with DBMS, the module of determination of the parameters of technological schemes of production of ferrites. The method of determination of the parameters of technological schemes of production of ferrites was considered. The method is based on a comparison of the parameters of technological schemes of production of ferrites with the parameters of the mathematical model of Giles - Atterton. The comparison is made using the group method of data handling. The group method of data handling (GMDH) relates to a family of inductive algorithms for mathematical modeling of multiparametric data. The method is based on the recursive selective selection of models, on the basis of which more complex models can be built. The modeling accuracy at each further step of recursion increases due to the complication of models*

***Keywords**: computer system, magnetic characteristics, model of Giles – Atterton, technological schemes, production of ferrites*

***В даній статті на прикладах декількох задач показано деякі переваги застосування підходу кластеризації критеріального простору при розв'язані багатокритеріальних задач лінійного програмування***

***Ключові слова: кластеризація, критеріальний простір, багатокритеріальність, лінійне програмування***

***В данной статье на примерах нескольких задач показаны некоторые преимущества применения подхода кластеризации критериального пространства при решении многокритериальных задач линейного программирования***

***Ключевые слова: кластеризация, критериальное пространство, многокритериальность, линейное программирование***

УДК 519.8

# ОБГРУНТУВАННЯ ПІДХОДУ КЛАСТЕРИЗАЦІЇ КРИТЕРІАЛЬНОГО ПРОСТОРУ В ВЕКТОРНИХ ЗАДАЧАХ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

**Н.Е. Кондрук**
Кандидат технічних наук, доцент*
Контактний тел.: 068-142-92-50
E-mail: kondrukne@gmail.com

**М.М. Маляр**
Кандидат технічних наук, доцент, завідувач*
Контактний тел.: 067-724-07-14
E-mail: malyarmm@gmail.com

*Кафедра кібернетики і прикладної математики
ДВНЗ «Ужгородський національний університет»
вул. Університетська, 14, м. Ужгород, Україна, 88000

## 1. Вступ

Рушійною силою розвитку теорії прийняття рішень є нові задачі та завдання, які виникають. Так, можна виділити цілий клас прикладних задач [1], які зводяться до багатокритеріальних, критеріальний простір яких складається із великої кількості рівнозначних, непорівнюваних часткових критеріїв. Це зв'язано з тим, що при дослідженні складних систем і об'єктів використання скалярної задачі оптимізації приводить до математичної моделі, яка є неадекватна реальній задачі.

Тому є актуальним створення спеціальних методів обробки інформації для розв'язання багатокритеріальних задач великої критеріальної розмірності. Дана робота присвячена обгрунтуванню застосування спеціально розробленого математичного апарату, що оснований на підході кластеризації критеріального простору [2] для розв'язання векторних задач лінійного програмування із критеріальним простором великої розмірності.

## 2. Аналіз літератури

Характерною особливістю багатьох практичних задач дослідження є їх велика розмірність. При такій вимірності класичні методи математичного програмування виявляються малоефективними. Це зумовлює необхідність розробки спеціальних методів, призначених для задач такого типу.

Велика розмірність може виникнути в критеріальному просторі та просторі альтернатив.

Вирішенням проблеми великої розмірності в критеріальному просторі займалися Воронін А.М., Фетина Е.П. та ін. реалізовуючи ідею групування критеріїв ефективності по смисловим характеристикам на основі принципу ієрархії.

Дана робота є продовженням зазначеного напрямку для класу багатокритеріальних задач лінійного програмування в умовах коли неможливе групування критеріїв за смисловими характеристиками, порівняння чи впорядкування часткових критеріїв або коли задача носить математичний характер.

## 3. Мета і задачі дослідження

Обґрунтувати доцільність та переваги використання підходу кластеризації критеріального простору [2] для підвищення ефективності розв'язання векторних задач лінійного програмування із критеріальним простором великої розмірності.

## 4. Основна частина

Найбільш уживаним та обґрунтованим методом розв'язання багатокритеріальних задач лінійного програмування є зведення її до однокритеріальної за допомогою адитивної згортки.

Тому будемо порівнювати отриманий розв'язок знайдений за допомогою адитивної згортки з розв'язком отриманим згідно використання підходу кластеризації критеріального простору задачі описаного в [2].

Враховуючи, що часткові критерії в багатьох прикладних задачах (наприклад, задачах збалансованого харчування та дієтотерапії [1]), як правило вважаються рівнозначними, то їх вагові коефіцієнти пропонується вважати рівними. Тому обмежимось розглядом деяких задач багатокритеріальних задач лінійного програмування із рівнозначними критеріями.

**Задача 1.**

Нехай задано векторну задачу лінійного програмування, критеріальний простір якої містить п'ять критеріїв та множину альтернатив $X$ (рис. 1).

На рис. 1 зображено паретівську множину AB непокращувальних альтернатив та локальні розв'язки задачі.

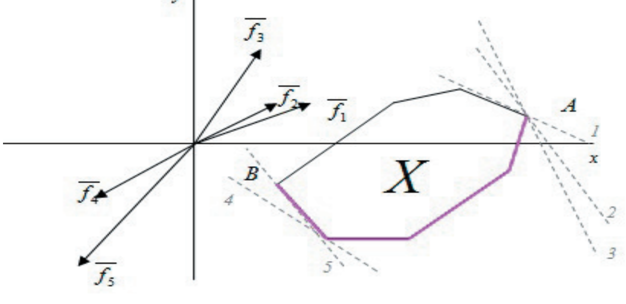


Рис. 1. Геометрична інтерпретація задачі 1

*Розв'язання задачі 1 за допомогою адитивної згортки*

Як відомо, недоліком методу адитивної згортки є можливість компенсації одних критеріїв за рахунок інших (рис. 2).

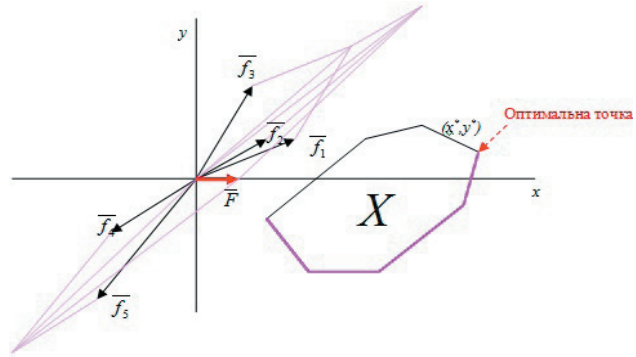


Рис. 2. Приклад можливої компенсації рівнозначних критеріїв ( $\overline{f_1}, \overline{f_2}, \overline{f_3}$ ) за рахунок інших ( $\overline{f_4}, \overline{f_5}$ ) при адитивній згортці ( $\overline{F}$ )

*Висновок до отриманого розв'язку адитивною згорткою.* Як видно з рис. 2, три критерії: $\overline{f_1}, \overline{f_2}, \overline{f_3}$ компенсували свої оцінки за рахунок критеріїв $\overline{f_4}, \overline{f_5}$ при згортанні їх адитивною згорткою $\overline{F}$. Розв'язком при цьому буде точка оптимуму $\left(x^*, y^*\right)$, в якій досягають максимальні значення лише критерії, $\overline{f_1}, \overline{f_2}, \overline{f_3}$, а критерії $\overline{f_4}, \overline{f_5}$ свої мінімальні значення.

*Розв'язання задачі 1 із використанням підходу кластеризації критеріального простору задачі на множини сильно зв'язаних критеріїв [2].*

Провівши кластеризацію критеріального простору на множини сильно зв'язаних критеріїв методами описаними в [3-5] отримаємо два кластери.

До першого кластеру відносяться вектори $\overline{f_1}, \overline{f_2}, \overline{f_3}$, а до другого $\overline{f_4}, \overline{f_5}$.

Далі згідно методу описаного в [2] проводиться згортка критеріїв кластерів та визначення їх представників. Враховуючи, що результатами кластеризації на множини сильно зв'язаних, що не допускають суперечливості критеріїв будуть кластери, які містять вектори близькі по куту, то при використанні адитивної згортки всередині кластерів компенсація одних критеріїв за рахунок інших малоймовірна. Крім того, адитивна згортка є найпростішою та обґрунтованою, тому пропонується для згортки критеріїв кластерів використовувати саме її. Для «усунення» проблеми компенсації одних векторів за рахунок інших, доцільно користуватися першим методом згортки [2], тобто за представником кожного кластеру є орт сумарного вектора всіх градієнтів локальних цільових функцій всередині кластеру.

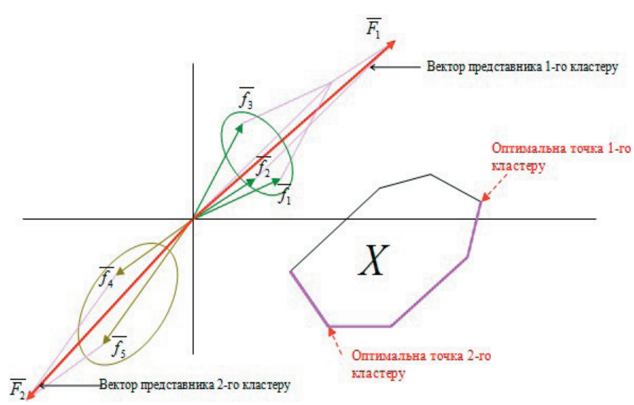


Рис. 3. Приклад визначення представників кластерів $\overline{F_1}$ і $\overline{F_2}$

Таким чином, вищеозначені кроки приведуть до зведення вхідної задачі до багатокритеріальної задачі лінійного програмування меншої критеріальної розмірності (надалі згідно прикладу представленому на рис. 3 пропонується розглядати два критерії: $\overline{F}_1$ та $\overline{F}_2$ ).

Яким чином, може бути проведена згортка представників кластерів ( $\overline{F}_1$ , $\overline{F}_2$ ) наведено в [2]. Крім того, види згорток мають бути вибрані в залежності від конкретної ситуації та фізичного змісту критеріїв задачі, або за згодою із ОПР.

Очевидно з метою «уникнення» проблеми компенсації при використанні адитивної згортки доцільно скористатись першим методом побудови представників кластерів [2], тобто за цей вектор взяти орт сумарного вектора всіх локальних градієнтів цільових функцій кожного кластеру.

Методи визначення вагових коефіцієнтів кластерів описані в [6]. Щоб підсилити рівноважливість всіх критеріїв доцільно ваги представників кластерів взяти однаковими. В якості суперкритерію також візьмемо адитивну згортку представників кластерів.

Тоді отримана однокритеріальна задача буде мати наступний вигляд:

$$F = \frac{1}{2}\overline{F}_1 + \frac{1}{2}\overline{F}_2 \rightarrow \text{extr},$$

$$x \in X.$$

Геометричну інтерпретацію розв'язання даної задачі показано на рис. 4.

По суті для розв'язання даної задачі використано тільки адитивні згортки із різними вагами, які підібрані не довільно, а на основі інформації про взаємозв'язки між критеріями. Тому, в данному прикладі використання підходу методів кластеризації лише дещо модифікувало метод адитивної згортки.

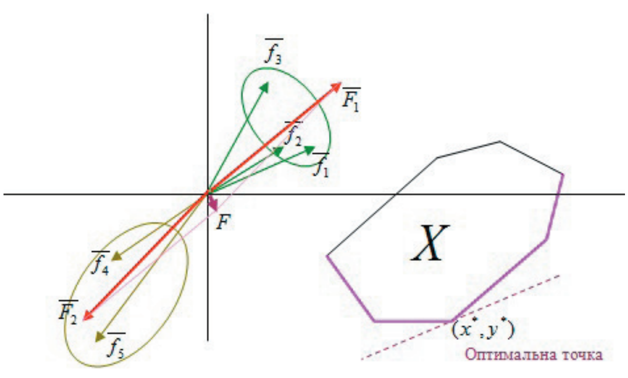


Рис. 4. Оптимальний розв'язок задачі для знаходження якого використано підхід кластеризації критеріального простору

**Висновок 1**. Таким чином, знайдений оптимальний розв'язок задачі 1 із використанням підходу кластеризації критеріального простору [2] гарантовано буде паретівським (непокращувальним, ефективним) і крім того в певній мірі відображатиме принцип «золотої середини» по відношенню до множини Паретто.

Використання ж кластеризації критеріального простору на множини сильно зв'язаних критеріїв [3-5] дає змогу усунути проблему компенсації однієї групи критеріїв за рахунок інших при адитивній згортці, завдяки точному підбору вагів локальних критеріїв. Отриманий розв'язок при цьому в деякій мірі є компромісним для всіх локальних критеріїв одночасно.

**Задача 2.**

Нехай потрібно розв'язати деяку багатокриріальну задачу лінійного програмування, причому знайдений ефективний розв'язок при цьому має максимізувати (мінімізувати) максимальну по кількості підмножину локальних критеріїв.

Дана умова не є випадковою, бо відображає специфіку деяких прикладних задач (див [1]).

Перейдемо до конкретної нескладної задачі критеріальний простір якої містить 7 критеріїв. На рис. 5 зображена геометрична інтерпретація даної задачі та виділено множину Парето непокращувальних альтернатив, показано локально оптимальні точки для кожного з часткових критеріїв.

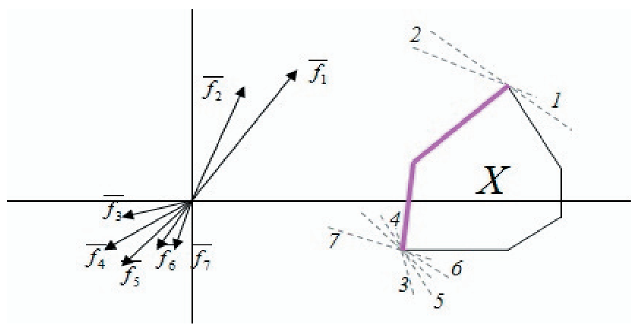


Рис. 5. Геометрична інтерпретація задачі 2

*Розв'язання задачі 2 за допомогою методу адитивної згортки*

Як і в попередній задачі будемо рахувати, що критерії є рівноважливими. Використаємо адитивну згортку (рис. 6) для знаходження розв'язку задачі без застосування вивчення взаємозв'язків між критеріями.

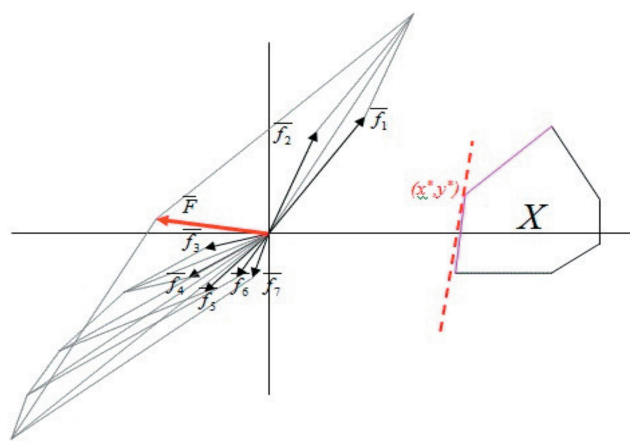


Рис. 6. Знаходження розв'язку задачі 2 за допомогою адитивної згортки

Як видно із рис. 6 розв'язком задачі 2 буде оптимальна точка $\left(x^*, y^*\right)$, яка на відміну від попередньої задачі є «компромісною» для всіх часткових критеріїв, але в той же час не є локально оптимальною для жодного із критеріїв, що не задовольняє постановку задачі 2.

*Розв'язання задачі 2 із використанням підходу кластеризації критеріального простору [2].*

Проведемо кластеризацію критеріального простору на множини сильно зв'язаних критеріїв [3-5]. При цьому отримаємо два кластери: перший кластер містить критерії $\overline{f_1}, \overline{f_2}$, а другий $\overline{f_3}, \overline{f_4}, \overline{f_5}, \overline{f_6}, \overline{f_7}$. Виберемо кластер потужність якого є найбільшою (другий). Цей кластер назвемо головним.

У якості згортки критеріїв кластерів використаємо адитивну згортку із однаковими вагами. Вагу головного кластеру берем рівну 1, а ваги всіх інших кластерів рівні нулеві. Далі як і в попередній задачі для побудови інтегрального суперкритерію використаємо адитивну згортку представників кластерів, чим зводимо вихідну задачу до однокритеріальної. Розв'язок якої буде точка $\left(x^*, y^*\right)$ зображена на рис. 7.

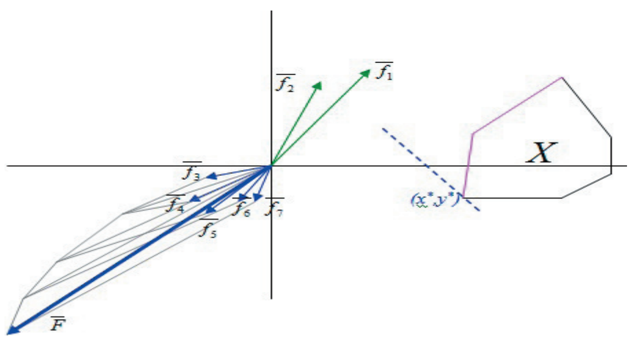


Рис. 7. Розв'язок задачі 2 узагальненим методом

*Висновок 2*. Отримана оптимальна точка з використанням підходу кластеризації критеріального простору буде гарантовано паретівською, бо по суті вона знайдена за допомогою адитивної згортки при чому критерії «головного» кластеру беруться з однаковими вагами, а критерії інших кластерів з нульовими.

Точка $\left(x^*, y^*\right)$ рис. 7 буде повністю задовольняти поставленій умові задачі 2, тобто буде локально оптимальною для п'ятьох з семи критеріїв.

Використання підходу кластеризації критеріального простору при адитивній згортці дало можливість знайти таку оптимальну точку, яка є локально оптимальною для максимальної кількості критеріїв критеріального простору, завдяки точному підбору вагових коефіцієнтів часткових критеріїв.

## 5. Висновок

Таким чином, проведений порівняльний аналіз отриманих розв'язків задачі 1 та задачі 2 різними методами показує, що використання підходу кластеризації критеріального простору для розв'язання векторних задач лінійного програмування дозволяє «маніпулювати» потрібною мірою «компромісності» знайденого розв'язку при застосуванні адитивної згортки; усунути проблему компенсації однієї групи критеріїв за рахунок інших при адитивній згортці; знайти ефективний розв'язок, який задовольняє наперед визначеним специфічним умовам. Проведення кластеризації критеріального простору на множини сильно зв'язаних критеріїв дозволяє вивчити взаємозв'язки між критеріями ефективності, що в свою чергу дає можливість точнішого підбору їх вагових коефіцієнтів.

Що ж до задач великої критеріальної розмірності, то доцільність використання для їх розв'язання кластеризації критеріального простору є ще більш обґрунтованою, оскільки в цих задачах взаємозв'язки між критеріями ефективності мають значно складнішу структуру.

Література

1. Кондрук, Н. Е. Застосування багатокритеріальних моделей для задач збалансованого харчування [Текст] / Н. Е. Кондрук, М. М. Маляр // Вісник Черкаського державного технологічного університету. Серія: технічні науки. 2010. – №1. – Вип. 1– С. 3-7.
2. Кондрук, Н. Э. Некоторые применения кластеризации критериального пространства для задач выбора [Текст] / Н. Э. Кондрук, Н. Н. Маляр // Компьютерная математика. – 2009. – № 2.– С. 142-149.
3. Кондрук, Н. Е. Кластеризація критеріїв ефективності у задачах вибору [Текст] / Н. Е. Кондрук (Цицика), М. М. Маляр // Вісник Київського університету. Серія: ф.–м. наук. – 2005. – Вип. 3. – С. 305–308.
4. Кондрук, Н. Е. Алгоритм кластеризації критеріального простору для задач вибору [Текст] / Н. Е. Кондрук, М. М. Маляр // Вісник Київського університету. Серія: ф. –м. наук. – 2006. – Вип. 3. – С. 225-229.
5. Маляр, М. М. Алгоритм зменшення кількості критеріїв в багатокритеріальній задачі лінійного програмування [Текст] / М.М. Маляр, Н.Е. Цицика //Вісник Київського університету. Серія ф.–м. наук. – 2004. – Вип. 2. – С. 288–292.
6. Кондрук, Н. Е. Визначення вагових коефіцієнтів кластерів критеріального простору [Текст] / Н. Е. Кондрук, М. М. Маляр// Матеріали міжнар. наук.-практ. конф. «Інфотех – 2007», 10-16 вересня 2007 р.: в 2-х ч. Ч.1– Севастополь, 2007. – С. 90-92.

***Abstract***

*The article is devoted to the substantiation of appropriateness and benefits of using of clusterization of criterial space to improve the efficiency of solution of vector problems of linear programming with criterial space of large dimension. The examples of two multicriteria problems of linear programming showed that the clusterization of criterial space for their solution in comparison with the usual method of additive convolution permitted to "manipulate" the necessary degree of "compromise" of the found optimal solution and provided an opportunity to resolve the issue of compensation of one group of criteria for the account of others, using conventional additive convolution. Clusterization of criterial space on sets of strongly bound criteria permits to explore the relationship between the criteria of efficiency, which in turn allows more precise selection of weight coefficients*

***Keywords**: clusterization, criterial space, multicriteria, linear programming*