

## Низкочастотное рассеяние на полупространстве, заполненном периодической жидкотвердой средой с наклонными слоями

© Ю. В. Роганов<sup>1</sup>, В. Ю. Роганов<sup>2</sup>, 2017

<sup>1</sup>Tesseral Technologies Inc., Киев, Украина

<sup>2</sup>Институт кибернетики НАН Украины, Киев, Украина

Поступила 31 мая 2017 г.

Розроблено низкочастотну ефективну модель для середовища з нахиленими рідкими і твердими шарами з проковзуванням, що періодично повторюються. Показано, що для ефективного періодичного  $n$ -шарового середовища з твердими похилими шарами з проковзуванням існують  $n + 1$  плоских хвиль з фіксованою горизонтальною повільністю, які поширюються вниз. Визначено крайові умови за низкочастотного розсіяння на межі між твердим півпростором і півпростором, заповненим ефективним середовищем. Ці умови залежать від кута нахилу шарів періодичного середовища та його заповнення. На підставі крайових умов виведено лінійні системи рівнянь для коефіцієнтів відбиття і заломлення. Низкочастотне розсіяння на півпросторі з нахиленими твердими шарами з проковзуванням описується системою  $n + 3$  рівнянь з  $n + 3$  невідомими. При наявності рідкого шару кількість рівнянь і невідомих дорівнює  $n + 2$ . Якщо нижній напівпростір складається з горизонтальних шарів, кількість рівнянь і невідомих дорівнює 3. Отримано явні формули для коренів цієї системи рівнянь, якщо шари горизонтальні. Теорію продемонстровано на різних прикладах розрахунку коефіцієнтів відбиття і заломлення.

**Ключові слова:** періодичне рідкотверде середовище, дисперсійне рівняння, розсіяння, коефіцієнти відбиття і заломлення.

**Введение.** Периодические горизонтально-слоистые среды с твердыми изотропными слоями, находящимися в жестком контакте, в низкочастотном пределе эквивалентны однородной вертикальной трансверсально-изотропной среде [Backus, 1962]. Свойства такой среды определяются осреднением по периоду определенных функций от параметров слоев.

В статье [Schoenberg, Muir, 1989] показано, что эффективной средой для периодической горизонтально-слоистой среды с анизотропными слоями является однородная анизотропная среда, коэффициенты упругости и плотность которой также вычисляются с помощью техники осреднения по периоду.

Эффективная среда для периодической горизонтально-слоистой среды с проскальзываниями между твердыми слоями, которые пропорциональны приложенным напряжениям, является хорошей моделью трещиноватой среды [Schoenberg, 1983]. По свойствам она также является однородной анизотропной средой. Эффективной средой для периодической горизонтально-слоистой среды с жидкими слоями является жидкая среда с эллиптически анизотропной плотностью [Молотков, 1979; Molotkov, 1982].

Будем в дальнейшем считать, что параметры слоев симметричны относительно вертикальной плоскости  $XZ$ , в которой рассматривается волновое поле.

Во всех перечисленных случаях классический метод [Аки, Ричардс, 1983] позволяет определить коэффициенты отражения и преломления на границе между упругим и эффективным полупространствами, исходя из краевых условий контакта на интерфейсе. Для эффективной среды с твердыми горизонтальными слоями это — условие непрерывности на границе между полупространствами напряжений  $\tau_{13}$ ,  $\tau_{33}$  и скоростей смещений  $u_1$ ,  $u_3$ . Для эффективной среды с жидкими горизонтальными слоями это — непрерывность  $u_3$ ,  $\tau_{33}$  и отсутствие касательных напряжений  $\tau_{13}=0$ .



Условия проскальзывания на границах слоев означают, что там отсутствуют касательные напряжения  $\tau_{13}=0$ , а компоненты  $u_1$  скоростей смещений разрывны. В работах [Schoenberg, 1984; Молотков, 1991; Molotkov, 1992; Роганов, Роганов, 2016] показано, как преобразовать пропагатор  $\mathbf{M}$ , чтобы в нем автоматически учитывались условия проскальзывания на промежуточных границах. Модифицированный пропагатор является  $2 \times 2$ -матрицей и задается формулой

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{M}\mathbf{G}, \quad (1)$$

где

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} -\mathbf{M}_{32} / \mathbf{M}_{31} & -\mathbf{M}_{34} / \mathbf{M}_{31} \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и  $\mathbf{M}_{ij}$  — элементы матрицы  $\mathbf{M}$ . Матрице  $\mathbf{P}$  соответствует системная матрица  $\tilde{\mathbf{A}}_i(\omega)$ , для которой  $\mathbf{P} = \exp(i\omega d \tilde{\mathbf{A}}_i(\omega))$ . Используя разложение в ряд

$$\log \mathbf{P} = \log(\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \mathbf{P})) = (\mathbf{I} - \mathbf{P}) + (\mathbf{I} - \mathbf{P})^2 / 2 + \dots \quad (2)$$

и учитывая, что

$$\mathbf{I} - \mathbf{P} = I\omega d \begin{pmatrix} 0 & \frac{q_i^2}{\rho_i(1-v_i^2 p^2)} \\ \rho_i & 0 \end{pmatrix} + O(\omega^2), \quad (3)$$

получаем формулу для системной матрицы в низкочастотном приближении эффективной среды с одним периодически повторяющимся  $i$ -м твердым слоем с условием проскальзывания на промежуточных границах:

$$\mathbf{A}_i = \tilde{\mathbf{A}}_i(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{I\omega d} \log \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{q_i^2}{\rho_i(1-v_i^2 p^2)} \\ \rho_i & 0 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где  $q_i^2 = \frac{1}{\alpha_i^2} - p^2$  — вертикальная медленность и  $v_i^2 = 4\beta_i^2 \left(1 - \frac{\beta_i^2}{\alpha_i^2}\right)$  — пластинчатая скорость для  $i$ -го слоя. Системная матрица (4) описывает вертикальную трансверсально-изотропную среду со скоростями  $qP$  и  $qSV$  волн по вертикали  $\alpha_i$ ,  $0$  соответственно и параметрами Томсона  $\epsilon=0$  и  $\delta = -2\frac{\beta_i^2}{\alpha_i^2} \left(1 - \frac{\beta_i^2}{\alpha_i^2}\right)$ . Значение параметра  $\delta$  достигает значения  $-0,5$ , если  $\alpha_i^2 = 2\beta_i^2$ .

Системной матрицей горизонтально-слоистой периодической упругой среды в низкочастотном диапазоне является осреднение системных матриц (4) по мощностям слоев [Roganov, Stovas, 2012]:

$$\mathbf{A}_e = \epsilon_1 \mathbf{A}_1 + \dots + \epsilon_n \mathbf{A}_n = \begin{pmatrix} 0 & \left\langle \frac{q_i^2}{\rho_i(1-v_i^2 p^2)} \right\rangle \\ \rho & 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Собственными числами системной матрицы  $\mathbf{A}_e$  являются вертикальные медленности  $q$  плоских волн в эффективной среде. Поскольку  $\det(q\mathbf{I} - \mathbf{A}_e) = q^2 - \rho \left\langle \frac{q_i^2}{\rho_i(1 - v_i^2 p^2)} \right\rangle$ , то дисперсионное уравнение для эффективной среды имеет вид

$$\varepsilon_1 \frac{1/\alpha_1^2 - p^2}{\rho_1(1 - v_1^2 p^2)} + \dots + \varepsilon_n \frac{1/\alpha_n^2 - p^2}{\rho_n(1 - v_n^2 p^2)} = \frac{q^2}{\rho}. \quad (6)$$

Корнями уравнения (6) являются значения вертикальных медленностей  $\pm q(p)$  нисходящей и восходящей плоских волн с горизонтальной медленностью  $p$ . Если левая часть уравнения (6) отрицательна, то эти волны являются неоднородными.

В частном случае, если все слои являются жидкими, то  $v_i = 0$ . Тогда из формулы (5) следует, что в низкочастотном диапазоне

$$\mathbf{A}_e = \begin{pmatrix} 0 & \left\langle \frac{1}{\alpha_i^2 \rho_i} \right\rangle - \left\langle \frac{1}{\rho_i} \right\rangle p^2 \\ \left\langle \rho_i \right\rangle & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

и дисперсионное уравнение задается формулой

$$\left\langle \frac{1}{\rho_i} \right\rangle p^2 + \frac{q^2}{\left\langle \rho_i \right\rangle} = \left\langle \frac{1}{\alpha_i^2 \rho_i} \right\rangle. \quad (8)$$

Соотношения (7), (8) показывают, что эффективной низкочастотной средой горизонтально-слоистой жидкой среды является обобщенная жидкая среда, плотность которой есть эллиптический тензор с компонентами  $\rho_1 = \left\langle 1/\rho_i \right\rangle^{-1}$  и  $\rho_3 = \left\langle \rho_i \right\rangle$ , а модуль упругости  $\lambda^{-1} = \left\langle 1/(\alpha_i^2 \rho_i) \right\rangle$ . Этот результат был опубликован в статьях [Молотков, 1979; Molotkov, 1982].

Обозначим  $u_1^{(i)}, u_3^{(i)}$  скорости смещений и  $\tau_{11}^{(i)}, \tau_{33}^{(i)}$  — напряжения для волны в  $i$ -м слое. Параметры  $u_3^{(i)}, \tau_{33}^{(i)}$  являются непрерывными и удовлетворяют уравнениям  $\begin{pmatrix} u_{3,3}^{(i)} \\ \tau_{33,3}^{(i)} \end{pmatrix} = i\omega \mathbf{A}_i \begin{pmatrix} u_3^{(i)} \\ \tau_{33}^{(i)} \end{pmatrix}$ .

Поэтому из соотношения (5) следует, что для эффективных параметров  $u_3, \tau_{33}$  справедливы равенства

$$u_{3,3} = \varepsilon_1 u_{3,3}^{(1)} + \dots + \varepsilon_n u_{3,3}^{(n)}, \quad (9)$$

$$\tau_{33,3} = \varepsilon_1 \tau_{33,3}^{(1)} + \dots + \varepsilon_n \tau_{33,3}^{(n)}. \quad (10)$$

Соотношения (9), (10) являются основой при выводе системы уравнений для волнового поля в низкочастотном пределе [Молотков, Хило, 1984; Molotkov, Khilo, 1986; Молотков, 1994; Molotkov, 1997].

Параметры  $u_3^{(i)}, \tau_{33}^{(i)}, \tau_{13}^{(i)}$  являются непрерывными в многослойной среде. Поэтому в низкочастотном пределе следует считать, что  $u_3 = u_3^{(i)}, \tau_{33} = \tau_{33}^{(i)}, \tau_{13}^{(i)} = 0$  для всех  $i = 1, \dots, n$ . Следовательно, распространение волн в  $i$ -м слое описывается уравнениями

$$\frac{\partial \tau_{11}^{(i)}}{\partial t} = (\lambda_1^{(i)} + 2\mu_1^{(i)}) u_{1,1}^{(i)} + \lambda_1^{(i)} u_{3,3}^{(i)}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \tau_{33}^{(i)}}{\partial t} = \lambda_1^{(i)} u_{1,1}^{(i)} + (\lambda_1^{(i)} + 2\mu_1^{(i)}) u_{3,3}^{(i)}, \quad (12)$$

$$\rho_i \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial t} = \tau_{33,3}^{(i)}, \quad (13)$$

$$\rho_i \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial t} = \tau_{11,1}^{(i)}. \quad (14)$$

Умножим равенства (12), (13) соответственно на  $\varepsilon_i / (\lambda_1^{(i)} + 2\mu_1^{(i)})$ ,  $\varepsilon_i$  и просуммируем их по  $i=1, \dots, n$ . Затем с помощью соотношений (9) и (10) исключим производные  $u_{3,3}^{(i)}$  из  $\tau_{33,3}^{(i)}$ . В результате получим соотношения

$$\rho \frac{\partial u_3}{\partial t} = \tau_{33,3}, \quad (15)$$

$$\tilde{\lambda}^{-1} \frac{\partial \tau_{33}}{\partial t} = \sum_i \varepsilon_i b_i u_{1,1}^{(i)} + u_{3,3}, \quad (16)$$

где  $\tilde{\lambda}^{-1} = \sum_i \frac{\varepsilon_i}{\rho_i \alpha_i^2}$ ,  $\rho = \sum_i \varepsilon_i \rho_i$ ,  $b_i = 1 - \frac{2\beta_i^2}{\alpha_i^2}$ . Обозначим,  $a_i = \tilde{\lambda}^{-1} v_i^2 \rho_i$ .

Из уравнений (11) и (12) исключим переменную  $u_{3,3}^{(i)}$  и подставим в результат значение  $\partial \tau_{33} / \partial t$  из (16):

$$\tilde{\lambda}^{-1} \frac{\partial \tau_{11}^{(i)}}{\partial t} = a_i u_{1,1}^{(i)} + b_i \sum_j \varepsilon_j b_j u_{1,1}^{(j)} + b_i u_{3,3}. \quad (17)$$

Соотношения (14)—(17) представляют полную систему дифференциальных уравнений относительно  $2n+2$  переменных  $u_1^{(i)}, u_3, \tau_{11}^{(i)}, \tau_{33}$  для низкочастотной модели горизонтально-слоистой периодической среды с проскальзыванием.

Отметим, что переменные  $u_1^{(i)}, \tau_{11}^{(i)}$  в эффективной среде определяют предельные значения этих параметров в  $i$ -м слое, но определены они везде, во всем пространстве.

Уравнения (16) и (17) выражают закон Гука для эффективной среды. Однако соответствующая матрица упругости несимметрична. Матрица станет симметричной, если вместо переменных  $\tau_{11}^{(i)}$  использовать переменные  $\varepsilon_i \tau_{11}^{(i)}$ .

Для исследования свойств плоских волн в эффективной среде будем считать, что все компоненты  $u_1^{(i)}, u_3, \tau_{11}^{(i)}, \tau_{33}$  волнового поля содержат множитель  $\exp[I\omega(x_1 p + x_3 q - t)]$ ,  $I = \sqrt{-1}$ . Выполним по переменным  $x_1, x_3, t$  преобразование Фурье и новые переменные обозначим  $p, q, \omega$ . После преобразования Фурье система уравнений (14)—(17) примет вид

$$\begin{cases} \mathbf{w}_1 = -\mathbf{B}\mathbf{w}_2, \\ \mathbf{w}_2 = -\tilde{\lambda}\mathbf{C}\mathbf{w}_1, \end{cases} \quad (18)$$

где

$$\mathbf{w}_1 = (u_1^{(1)}, \dots, u_1^{(n)}, u_3)^T, \quad \mathbf{w}_2 = (\tau_{11}^{(1)}, \dots, \tau_{11}^{(n)}, \tau_{33})^T, \quad \mathbf{B} = \text{diag}\left(\frac{p}{\rho_1}, \dots, \frac{p}{\rho_n}, \frac{q}{\rho}\right),$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{L} + \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{L} = p \text{diag}(a_1, \dots, a_n, 0), \quad \mathbf{v}_1 = (b_1, \dots, b_n, 1), \quad \mathbf{v}_2 = (p\varepsilon_1 b_1, \dots, p\varepsilon_n b_n, q).$$

Из (18) следует, что  $\mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{w}_2 = \tilde{\lambda}^{-1}\mathbf{w}_2$ . Следовательно,  $\mathbf{w}_2$  является собственным вектором матрицы

$$\mathbf{C}\mathbf{B} = \mathbf{R} + \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_3 \quad (19)$$

с собственным значением  $\tilde{\lambda}^{-1}$ , где

$$\mathbf{R} = p^2 \operatorname{diag} \left( \frac{a_1}{\rho_1}, \dots, \frac{a_n}{\rho_n}, 0 \right), \quad \mathbf{v}_3 = \left( \frac{p^2 \varepsilon_1 b_1}{\rho_1}, \dots, \frac{p^2 \varepsilon_n b_n}{\rho_n}, \frac{q^2}{\rho} \right). \quad (20)$$

Согласно приложению (утверждение 1), вектор  $\mathbf{w}_2$  можно определить по формуле

$$\mathbf{w}_2 = \tilde{\lambda}^{-1} \left( \frac{\mathbf{v}_{li}}{\tilde{\lambda}^{-1} - \mathbf{R}_{ii}} \right) = \left( \frac{b_1}{1 - v_1^2 p^2}, \dots, \frac{b_n}{1 - v_n^2 p^2}, 1 \right). \quad (21)$$

Поэтому справедливо равенство

$$\frac{\varepsilon_1 b_1^2 p^2}{\rho_1 (1 - v_1^2 p^2)} + \dots + \frac{\varepsilon_n b_n^2 p^2}{\rho_n (1 - v_n^2 p^2)} + \frac{q^2}{\rho} = \tilde{\lambda}^{-1}, \quad (22)$$

равносильное дисперсионному уравнению (6).

Из соотношения (18) следует

$$\mathbf{w}_1 = -\mathbf{B}\mathbf{w}_2 = - \left( \frac{pb_1}{\rho_1 (1 - v_1^2 p^2)}, \dots, \frac{pb_n}{\rho_n (1 - v_n^2 p^2)}, \frac{q}{\rho} \right). \quad (23)$$

Формулы (21) и (23) определяют все компоненты плоской волны в  $n$ -слойной периодической среде с проскальзыванием в низкочастотном пределе. Смысл переменных  $u_i^{(i)}, \tau_{11}^{(i)}$  в эффективной среде остался прежним: они являются значениями соответствующих параметров в  $i$ -м слое. При этом эффективная среда однородна и описывается более сложными уравнениями, чем однородная упругая среда. Отметим также, что полученные формулы совпадают с соответствующими формулами из статьи [Роганов, Роганов, 2016], если  $n=2$  и второй слой является жидкостью.

Для дальнейших ссылок выпишем явно параметры плоской волны, удовлетворяющей соотношению (6):

$$u_1^{(i)} = \frac{pb_i}{\rho_i (1 - v_i^2 p^2)}, \quad u_3 = \frac{q}{\rho}, \quad \tau_{11}^{(i)} = -\frac{b_i}{1 - v_i^2 p^2}, \quad \tau_{13} = 0, \quad \tau_{33} = -1, \quad i = 1, \dots, n. \quad (24)$$

Вектор Умова плотности потока энергии, которая переносится плоской волной в низкочастотном диапазоне, описывается формулой

$$\mathbf{W} = - \left( \varepsilon_1 u_1^{(1)} \tau_{11}^{(1)} + \dots + \varepsilon_n u_1^{(n)} \tau_{11}^{(n)}, u_3 \tau_{33} \right) = \left( \varepsilon_1 \frac{pb_1^2}{\rho_1 (1 - v_1^2 p^2)^2} + \dots + \varepsilon_n \frac{pb_n^2}{\rho_n (1 - v_n^2 p^2)^2}, \frac{q}{\rho} \right). \quad (25)$$

Вектор групповой скорости определяется соотношением  $\mathbf{v}_{gr} = \mathbf{W} / (pW_1 + qW_3)$ , где  $\mathbf{W} = (W_1, W_3)$ .

**Плоские волны в периодической среде с наклонными границами с проскальзыванием.** Дисперсионное уравнение в низкочастотном пределе для периодической среды с проскальзыванием и границами, наклонными под углом  $\varphi$  к горизонтали, описывается уравнением (6) относительно медленностей  $p_0, q_0$ , для которых

$$\begin{cases} p = p_0 \cos \varphi + q_0 \sin \varphi, \\ q = -p_0 \sin \varphi + q_0 \cos \varphi. \end{cases} \quad (26)$$

Указанное дисперсионное уравнение при фиксированном  $p_0$  имеет корни  $q_{0j}$ . Каждый корень  $q_{0j}$  определяет вертикальную медленность восходящей или нисходящей

плоской волны с горизонтальной медленностью  $p_0$ . Волны могут быть неоднородными.

Будем считать, что нисходящим волнам соответствуют номера  $j$ , начиная с 1. Воспользовавшись соотношением (26), представим вектор медленности  $(p_0, q_0)$  в системе координат, в которой промежуточные границы горизонтальны, и обозначим его  $(p_j, q_j)$ .

Обозначим  $f_{ij} = \frac{b_i}{1 - v_i^2 p_j^2}$ . Параметры  $j$ -й плоской волны удовлетворяют соотношениям

$$u_{1j}^{(i)} = \frac{p_j f_{ij} \cos \varphi}{\rho_i} - \frac{q_j \sin \varphi}{\rho}, \quad u_{3j}^{(i)} = \frac{p_j f_{ij} \sin \varphi}{\rho_i} + \frac{q_j \cos \varphi}{\rho}, \quad (27)$$

$$\tau_{11j}^{(i)} = -f_{ij} \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi, \quad \tau_{13j}^{(i)} = (-f_{ij} + 1) \sin \varphi \cos \varphi, \quad \tau_{33j}^{(i)} = -f_{ij} \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi. \quad (28)$$

Из формулы (25) и формул (27), (28) следует, что вертикальная компонента вектора плотности потока энергии  $j$ -й волны вычисляется по формуле

$$W_{3j} = \varepsilon_1 \frac{p_j f_{1j}^2 \sin \varphi}{\rho_1} + \dots + \varepsilon_n \frac{p_j f_{nj}^2 \sin \varphi}{\rho_n} + \frac{q_j \cos \varphi}{\rho}. \quad (29)$$

Положительным значениям  $W_{3j}$  соответствуют нисходящие волны, а отрицательным — восходящие. При расчете энергетических коэффициентов преломления все параметры плоских волн нормируются делением на число  $k_{Tj} = \sqrt{|W_{3j}|}$ .

**Низкочастотное рассеяние на полупространстве, заполненном периодической средой с проскальзыванием.** Обозначим соответственно  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  скорости продольной и поперечной волн,  $\rho_0$  — плотность среды в верхнем полупространстве.

При изучении низкочастотного рассеяния на границе между твердым полупространством и полупространством, состоящем из периодически повторяющихся твердых слоев с проскальзыванием, отдельно рассматриваются случаи различных наклонов слоев периодической среды:  $\varphi=0$ ,  $\varphi=90^\circ$  и  $-90^\circ < \varphi < 90^\circ$ ,  $\varphi \neq 0^\circ$ .

Как было отмечено,  $\varphi=0^\circ$  соответствует горизонтально-слоистой среде. Дисперсионное уравнение для соответствующей эффективной среды имеет один корень, соответствующий нисходящей волне.

При  $\varphi=90^\circ$  дисперсионное уравнение имеет  $n$  корней для  $n$  нисходящих волн. В обоих случаях в нижнем полупространстве  $\tau_{13}=0$ . При остальных значениях  $\varphi$  дисперсионное уравнение имеет  $n+1$  корень для нисходящих волн и  $\tau_{13}$  может иметь ненулевые значения.

Будем предполагать, что на горизонтальную границу раздела сверху падает продольная плоская волна под углом  $\theta$ . При рассеянии в верхнем полупространстве порождаются отраженные продольная и поперечная волны с коэффициентами отражения  $R_p, R_s$ . В нижнем полупространстве порождаются преломленные волны с коэффициентами преломления  $T_i$ . Количество преломленных волн совпадает с количеством положительных корней  $q_0$  дисперсионного уравнения (6) при фиксированной горизонтальной медленности  $p_0 = \sin \theta / \alpha_0$  и условия (26).

Определение значений  $R_p, R_s, T_i$  основано на решении системы линейных уравнений, задающих непрерывность определенных функций от параметров на границе раздела между верхним и нижним полупространствами.

В верхнем полупространстве для фиксированного  $p_0$  существует четыре плоские волны: нисходящие продольная и поперечная, а также восходящие продольная и поперечная. Параметры  $(u_1^{(0)}, u_3^{(0)}, \tau_{13}^{(0)}, \tau_{33}^{(0)})^T$  волн в порядке их перечисления, указанном выше, являются столбцами матрицы собственных векторов системной матрицы верхнего полупространства [Роганов, Роганов, 2016]:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \alpha_0 p_0 & \beta_0 \eta_0 & \alpha_0 p_0 & \beta_0 \eta_0 \\ \alpha_0 \xi_0 & -\beta_0 p_0 & -\alpha_0 \xi_0 & \beta_0 p_0 \\ -2\rho_0 \alpha_0 \beta_0^2 p_0 \xi_0 & -\rho_0 \beta_0 (1 - 2\beta_0^2 p_0^2) & 2\rho_0 \alpha_0 \beta_0^2 p_0 \xi_0 & \rho_0 \beta_0 (1 - 2\beta_0^2 p_0^2) \\ -\rho_0 \alpha_0 (1 - 2\beta_0^2 p_0^2) & 2\rho_0 \beta_0^3 p_0 \eta_0 & -\rho_0 \alpha_0 (1 - 2\beta_0^2 p_0^2) & 2\rho_0 \beta_0^3 p_0 \eta_0 \end{pmatrix}, \quad (30)$$

где  $\xi_0 = \sqrt{\frac{1}{\alpha_0^2} - p_0^2}$ ,  $\eta_0 = \sqrt{\frac{1}{\beta_0^2} - p_0^2}$ .

При изучении рассеяния векторы параметров продольных и поперечных волн (столбцы матрицы (30)) нормируются к единичному потоку плотности энергии в вертикальном направлении делением соответственно на числа  $k_p = \alpha_0 \sqrt{|\rho_0 \xi_0|}$  и  $k_s = \beta_0 \sqrt{|\rho_0 \eta_0|}$ .

Энергетические коэффициенты отражения и преломления удовлетворяют равенству  $R_p^2 + R_s^2 + \sum T_i^2 = 1$ , которое означает, что сумма энергий уходящих от интерфейса волн равна 1, т. е. энергии падающей продольной волны (доказательство: приложение, утверждение 3).

**Низкочастотное рассеяние при  $\varphi=0$ .** На горизонтальной границе между полупространствами (рис. 2) непрерывными являются компонента  $u_3$  скорости смещений и компоненты  $\tau_{13}$ ,  $\tau_{33}$  тензора напряжений. Составим систему линейных уравнений, выбирая из матрицы (30) и соотношения (24) параметры  $u_3$ ,  $\tau_{13}$ ,  $\tau_{33}$  плоских волн, участвующие в рассеянии:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_{23} & \mathbf{E}_{24} & \rho^{-1}q \\ \mathbf{E}_{33} & \mathbf{E}_{34} & 0 \\ \mathbf{E}_{43} & \mathbf{E}_{44} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{21} \\ \mathbf{E}_{31} \\ \mathbf{E}_{41} \end{pmatrix}. \quad (31)$$

После нормировки корней  $x_i$  получим коэффициенты отражения и преломления:

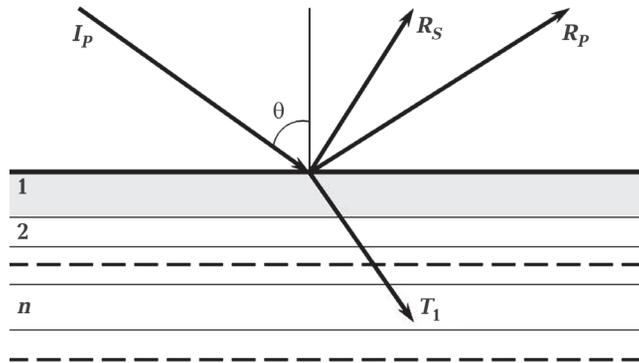


Рис. 2. Низкочастотное рассеяние на полупространстве с горизонтально-слоистой периодической средой: возникают две отраженные и одна преломленная волна.

$$R_p = x_1 = \frac{(1 - 2\beta_0^2 p^2)^2 - 4\beta_0^4 p^2 \xi_0 \eta_0 - \xi_0 \rho q^{-1} \rho_0^{-1}}{(1 - 2\beta_0^2 p^2)^2 + 4\beta_0^4 p^2 \xi_0 \eta_0 + \xi_0 \rho q^{-1} \rho_0^{-1}}, \quad (32)$$

$$R_s = x_2 k_s k_p^{-1} = -\frac{4\beta_0^2 p \sqrt{\xi_0 \eta_0} (1 - 2\beta_0^2 p^2)}{(1 - 2\beta_0^2 p^2)^2 + 4\beta_0^4 p^2 \xi_0 \eta_0 + \xi_0 \rho q^{-1} \rho_0^{-1}}, \quad (33)$$

$$T_1 = x_3 k_{T1} k_p^{-1} = \frac{2\sqrt{\xi_0 \rho q^{-1} \rho_0^{-1}} (1 - 2\beta_0^2 p^2)}{(1 - 2\beta_0^2 p^2)^2 + 4\beta_0^4 p^2 \xi_0 \eta_0 + \xi_0 \rho q^{-1} \rho_0^{-1}}. \quad (34)$$

Отметим, что формула (24) обеспечивает на границе между полупространствами непрерывность и одинаковые значения компонент  $u_3, \tau_{13}, \tau_{33}$  во всех слоях нижнего полупространства. Разложив в ряд по  $p$  правую часть равенства (32), получим приближенное выражение для коэффициента отражения продольной волны:

$$R_p = \frac{\rho\alpha_1 - \rho_0\alpha_0}{\rho\alpha_1 + \rho_0\alpha_0} + \frac{\rho_0(\rho(\alpha_1^2 - 2\beta_1^2)^2 + \rho\alpha_1^2(8\beta_0^2 - \alpha_0^2) + 8\rho_0\alpha_1\beta_0^3)}{\alpha_0\alpha_1(\rho\alpha_1 + \rho_0\alpha_0)^2} \sin^2 \theta, \quad (35)$$

позволяющее оценить AVO-эффект для продольной отраженной волны. В частности, при одинаковых скоростях и плотностях в обоих полупространствах формула (35) значительно упрощается:

$$R_p = 2\left(1 + \frac{\beta_0}{\alpha_0}\right)\left(\frac{\beta_0}{\alpha_0}\right)^2 \sin^2 \theta. \quad (36)$$

**Низкочастотное рассеяние при  $\varphi=90^\circ$ .** При  $\varphi=90^\circ$  контакт с верхним полупространством происходит у всех слоев нижнего полупространства (рис. 3). Эффективная среда нижнего полупространства при  $\varphi=90^\circ$ , также как при  $\varphi=0^\circ$ , имеет свойство жидкости, поскольку  $\tau_{13j}^{(i)} = 0$  для всех слоев  $i$  и плоских волн  $j$ . На границе между полупространствами в каждом слое непрерывны скорости смещений  $u_3$  ( $n$  уравнений) и усредненные по слоям напряжения  $\tau_{13}, \tau_{33}$  (два уравнения). В данном случае  $p=q_0, q=-p_0$  (см. (26)) и формулы (27), (28) при  $\varphi=90^\circ$  определяют параметры  $j$ -й преломленной волны в  $i$ -м слое:

$$u_{1j}^{(i)} = \frac{p_0}{\rho}, u_{3j}^{(i)} = \frac{q_{0j} f_{ij}}{\rho_i}, \tau_{13j}^{(i)} = 0, \tau_{33j}^{(i)} = -f_{ij}, \text{ где } f_{ij} = \frac{b_i}{1 - v_i^2 q_{0j}^2}. \quad (37)$$

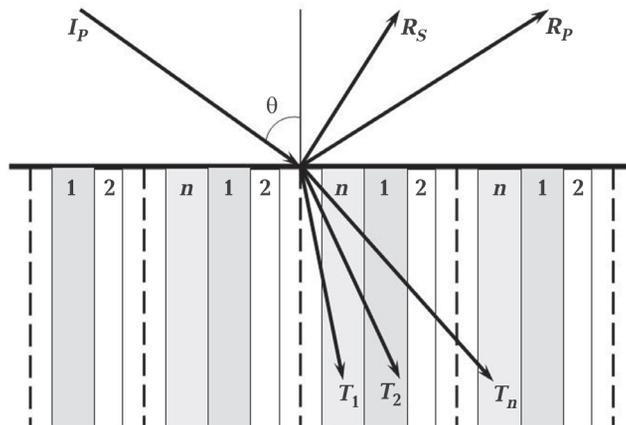


Рис. 3. Низкочастотное рассеяние на полупространстве с вертикально-слоистой периодической средой: возникают две отраженные и  $n$  преломленных волн.

Если обозначить  $x_k, k=1, \dots, n+2$ , амплитуды волн, участвующих в рассеянии, то условия непрерывности на интерфейсе сведутся к линейной системе  $(n+2)$ -х уравнений с  $(n+2)$ -мя неизвестными:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_{23} & \mathbf{E}_{24} & q_{01}f_{11}\rho_1^{-1} & \dots & q_{0n}f_{1n}\rho_1^{-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{E}_{23} & \mathbf{E}_{24} & q_{01}f_{n1}\rho_n^{-1} & \dots & q_{0n}f_{nn}\rho_n^{-1} \\ \mathbf{E}_{33} & \mathbf{E}_{34} & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{E}_{43} & \mathbf{E}_{44} & -\sum_{i=1..n} \varepsilon_i f_{i1} & \dots & -\sum_{i=1..n} \varepsilon_i f_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{21} \\ \dots \\ \mathbf{E}_{21} \\ \mathbf{E}_{31} \\ \mathbf{E}_{41} \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Коэффициенты отражения  $R_p, R_S$  и преломления  $T_j, j=1, \dots, n$ , определяются энергетической нормировкой значений  $x_k, k=1, \dots, n+2$ :

$$R_p = x_1, \quad R_S = x_2 k_S k_p^{-1}, \quad T_j = x_{j+2} k_{Tj} k_p^{-1}, \quad j=1, \dots, n. \quad (39)$$

**Низкочастотное рассеяние при  $-90^\circ < \varphi < 0^\circ$  или  $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ .** При  $\varphi \neq 0$  и  $\varphi \neq 90^\circ$  (рис. 4) дисперсионное уравнение имеет  $2n+2$  корня относительно  $q_0$  при фиксированном  $p_0$ . Из этих корней  $n+1$  корень положителен и соответствует нисходящим преломленным волнам, участвующим в рассеянии. На границе между полупространствами непрерывны во всех слоях вертикальные и горизонтальные компоненты скоростей смещений и усредненные по слоям нормальные и касательные напряжения. Непрерывность вертикальных и горизонтальных компонент скоростей смещений в слоях обеспечивается системой  $2n$  линейных уравнений. Однако в этой системе независимыми являются только  $(n+1)$  уравнений. Остальные  $(n-1)$  уравнений выполняются автоматически, поскольку значения  $u_3^{(i)}$  не зависят от слоев (см. (24) и приложение, утверждение 3). Поэтому в системе уравнений будем использовать  $n$  уравнений непрерывности  $u_3^{(i)}$  и одно уравнение непрерывности  $u_1^{(i)}$ . К этим уравнениям добавим еще два уравнения непрерывности усредненных по слоям напряжений  $\tau_{13}, \tau_{33}$ .

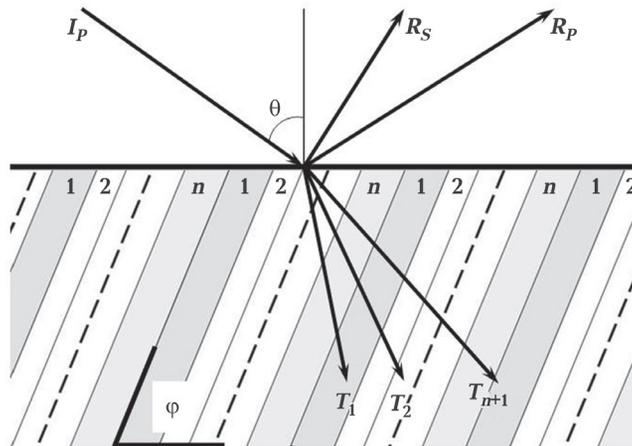


Рис. 4. Низкочастотное рассеяние на полупространстве, заполненном периодической средой с наклонными границами: возникают две отраженные и  $(n+1)$ -а преломленная волна.

Элементы матрицы (30) определяют скорости смещений и напряжения плоских волн в верхнем полупространстве, а формулы (27), (28) определяют параметры  $j$ -й преломленной волны в  $i$ -м слое. В результате получаем линейную систему  $(n+3)$ -х уравнений с  $(n+3)$ -мя неизвестными:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_{13} & \mathbf{E}_{14} & u_{11}^{(1)} & \dots & u_{1n+1}^{(1)} \\ \mathbf{E}_{23} & \mathbf{E}_{24} & u_{31}^{(1)} & \dots & u_{3n+1}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{E}_{23} & \mathbf{E}_{24} & u_{31}^{(n)} & \dots & u_{3n+1}^{(n)} \\ \mathbf{E}_{33} & \mathbf{E}_{34} & \sum_{i=1..n} \varepsilon_i \tau_{131}^{(i)} & \dots & \sum_{i=1..n} \varepsilon_i \tau_{13n+1}^{(i)} \\ \mathbf{E}_{43} & \mathbf{E}_{44} & \sum_{i=1..n} \varepsilon_i \tau_{331}^{(i)} & \dots & \sum_{i=1..n} \varepsilon_i \tau_{33n+1}^{(i)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ x_{n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{11} \\ \mathbf{E}_{21} \\ \dots \\ \mathbf{E}_{21} \\ \mathbf{E}_{31} \\ \mathbf{E}_{41} \end{pmatrix}. \quad (40)$$

Коэффициенты отражения  $R_p, R_s$  и преломления  $T_j, j=1, \dots, n+1$ , определяются энергетической нормировкой значений  $x_j, j=1, \dots, n+3$ , по формулам (39).

**Замечание.** В рассматриваемой теории предполагалось, что все слои нижнего полупространства состоят из твердого вещества, т. е. скорости  $\alpha_i, \beta_i$  при всех  $i=1, \dots, n$  отличны от нуля. При этом считается, что слои проскальзывают на промежуточных границах. Эта теория допускает обобщение на случай наличия жидких слоев в периодической пачке.

Во-первых, заметим, что используя формулы (7), (8), при  $\omega \rightarrow 0$  все жидкие слои можно объединить в один жидкий слой с анизотропной плотностью. Будем предполагать, что таким слоем является слой  $n$ , а остальные слои состоят из твердого вещества.

Во-вторых, если  $n$ -й слой является жидким, то  $\beta_n=0, v_n = 2\beta_n \sqrt{1-\beta_n^2/\alpha_n^2} = 0, 1-v_n^2 p^2 \equiv 1, b_n = 1-2\beta_n^2/\alpha_n^2 = 1$ . Дисперсионное уравнение (6) при наличии одного жидкого слоя имеет на два корня меньше, чем когда все слои твердые. Число преломленных волн в этом случае уменьшится на 1. При этом все компоненты скоростей смещений на границе между верхним и нижним полупространствами могут быть разрывными. Этот факт значительно усложняет краевые условия на интерфейсе с наклонным жидкотвердым полупространством. Изучая изменение компонент  $u_1^{(i)}, u_3^{(i)}$  скоростей смещений при  $\beta_n \rightarrow 0$ , можно убедиться (см. приложение, утверждение 2) в том, что на интерфейсе остаются непрерывными параметры  $u_1^{(i)} \cos \varphi + u_3^{(i)} \sin \varphi, i=1, \dots, n-1$  и  $\sum_{i=1..n} \varepsilon_i u_3^{(i)},$  а  $x_{n+3} \rightarrow 0$ .

В результате из системы уравнений (40) получаем линейную систему  $(n+2)$ -х уравнений с  $(n+2)$ -мя неизвестными

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_{13} \cos \varphi + & \mathbf{E}_{14} \cos \varphi + & u_{11}^{(1)} \cos \varphi + & u_{1n}^{(1)} \cos \varphi + \\ +\mathbf{E}_{23} \sin \varphi & +\mathbf{E}_{24} \sin \varphi & +u_{31}^{(1)} \sin \varphi & \dots & +u_{3n}^{(1)} \sin \varphi \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{E}_{13} \cos \varphi + & \mathbf{E}_{14} \cos \varphi + & u_{11}^{(n-1)} \cos \varphi + & u_{1n}^{(n-1)} \cos \varphi + \\ +\mathbf{E}_{23} \sin \varphi & +\mathbf{E}_{24} \sin \varphi & +u_{31}^{(n-1)} \sin \varphi & \dots & +u_{3n}^{(n-1)} \sin \varphi \\ \mathbf{E}_{23} & \mathbf{E}_{24} & \sum_{i=1..n} \varepsilon_i u_{31}^{(i)} & \dots & \sum_{i=1..n} \varepsilon_i u_{3n}^{(i)} \\ \mathbf{E}_{33} & \mathbf{E}_{34} & \sum_{i=1..n} \varepsilon_i \tau_{131}^{(i)} & \dots & \sum_{i=1..n} \varepsilon_i \tau_{13n}^{(i)} \\ \mathbf{E}_{43} & \mathbf{E}_{44} & \sum_{i=1..n} \varepsilon_i \tau_{331}^{(i)} & \dots & \sum_{i=1..n} \varepsilon_i \tau_{33n}^{(i)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{11} \cos \varphi + \\ +\mathbf{E}_{21} \sin \varphi \\ \dots \\ \mathbf{E}_{11} \cos \varphi + \\ +\mathbf{E}_{21} \sin \varphi \\ \mathbf{E}_{21} \\ \mathbf{E}_{31} \\ \mathbf{E}_{41} \end{pmatrix}. \quad (41)$$

Коэффициенты отражения  $R_p, R_s$  и преломления  $T_j, j=1, \dots, n$ , определяются энергетической нормировкой значений  $x_j, j=1, \dots, n+2$ , по формулам (39).

**Численные примеры.** Продемонстрируем теорию расчета коэффициентов отражения и преломления плоских волн с частотой  $\omega \rightarrow 0$  на примерах, в которых верхнее полупространство является изотропным и однородным, а нижнее является бинарной

периодической средой с проскальзыванием между слоями или бинарной периодической жидкотвердой средой.

Символом ЖТ обозначим периодическую бинарную жидкотвердую среду с параметрами  $\alpha_1=3500$  м/с,  $\beta_1=1750$  м/с,  $\rho_1=2500$  кг/м<sup>3</sup>,  $\alpha_2=1500$  м/с,  $\beta_2=0$  м/с,  $\rho_2=1000$  кг/м<sup>3</sup>.

Символом ТТ обозначим периодическую бинарную твердую среду с проскальзыванием между слоями, описываемую параметрами  $\alpha_1=3500$  м/с,  $\beta_1=1750$  м/с,  $\rho_1=2500$  кг/м<sup>3</sup>,  $\alpha_2=1500$  м/с,  $\beta_2=700$  м/с,  $\rho_2=1000$  кг/м<sup>3</sup>.

Коэффициенты рассеяния найдем для четырех значений  $\varepsilon_2$ : 0,001; 0,01; 0,1; 0,5 и трех значений углов наклона слоев к горизонтали  $\varphi$ : 0°, 80°, 90°.

На рис. 5 показаны кривые медленности для указанных сред при  $\varepsilon_2=0,01$  и  $\omega \rightarrow 0$ . Используя эти среды как заполнитель нижнего полупространства и среду с параметрами  $\alpha_0=\alpha_1$ ,  $\beta_0=\beta_1$ ,  $\rho_0=\varepsilon_1\rho_1+\varepsilon_2\rho_2$  как заполнитель верхнего полупространства, найдем коэффициенты рассеяния  $R_p, R_s, T_i$  при падении сверху на границу между полупространствами продольной волны с частотой  $\omega \rightarrow 0$  под углами  $-80^\circ \leq \theta \leq 80^\circ$  к вертикали. Для этих углов горизонтальная медленность  $p_0 = \sin\theta/\alpha_0$  и ее значение находится в интервале  $(-\alpha_0^{-1}, \alpha_0^{-1})$ . Количество преломленных волн зависит от рассматриваемого случая, а индексы  $j \geq 1$  выбираются так, чтобы последовательность вертикальных медленностей  $q_{0j}$  соответствовала нисходящим волнам и была возрастающей.

Из рис. 5 видно, что при фиксированном  $p_0$  для среды ЖТ при  $\varphi=0^\circ$  существует одна преломленная волна, для среды ЖТ с  $\varphi \neq 0^\circ$  и среды ТТ с  $\varphi=90^\circ$  существуют две преломленные волны, а для среды ТТ с  $\varphi \neq 0^\circ$  и  $\neq 90^\circ$  — три преломленные волны.

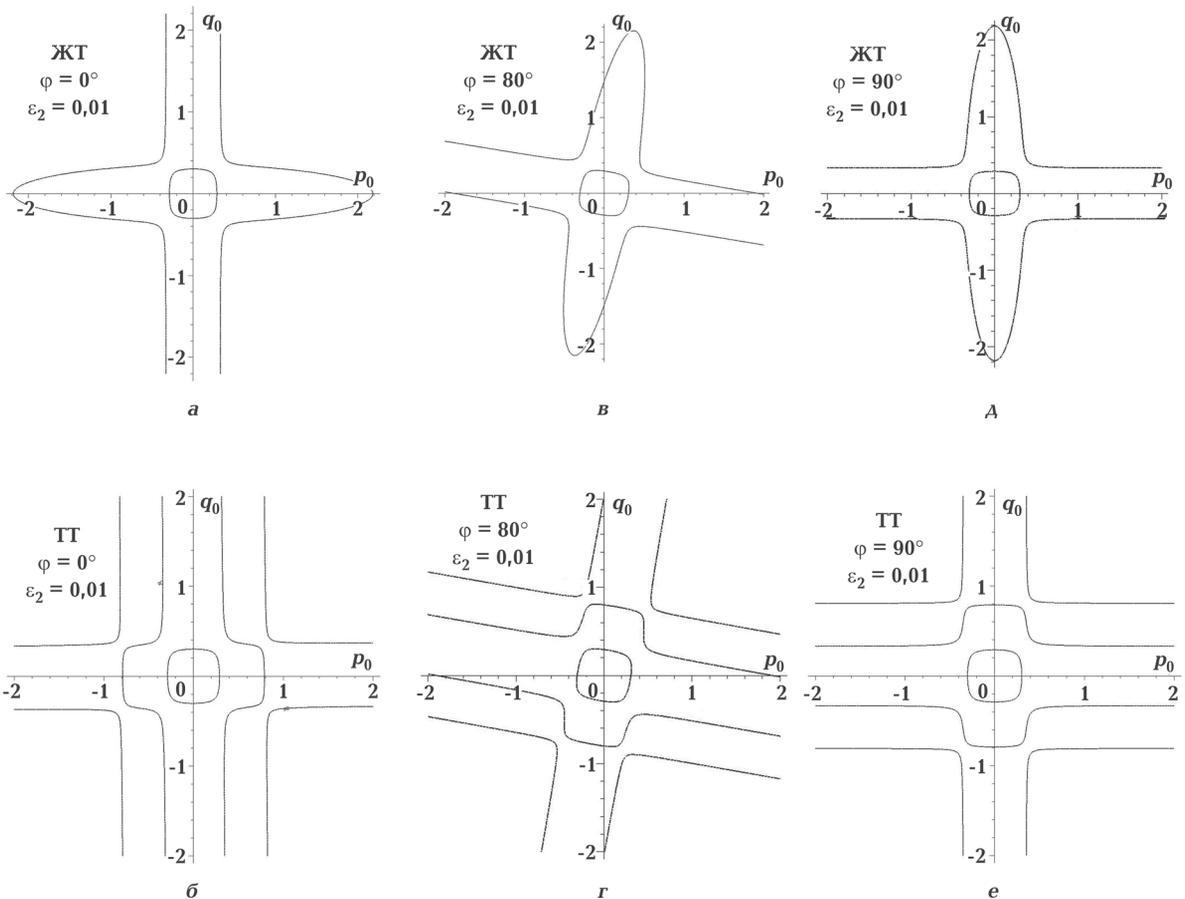


Рис. 5. Кривые медленности при  $\omega \rightarrow 0$  бинарных периодических сред ЖТ и ТТ с углами наклона слоев  $\varphi=0^\circ$ ,  $\varphi=80^\circ$ ,  $\varphi=90^\circ$  к горизонтали и  $\varepsilon_2=0,01$ .

На рис. 6—8 представлены зависимости  $R_p(\theta)$ ,  $R_s(\theta)$ ,  $T_i(\theta)$  для разных заполнений нижнего полупространства, перечисленных выше. Сравнивая графики, расположенные в одном столбце, приходим к выводу, что изменение скорости поперечной волны  $\beta_2$  в четных слоях периодической среды почти не влияет на коэффициенты отражения и преломления.

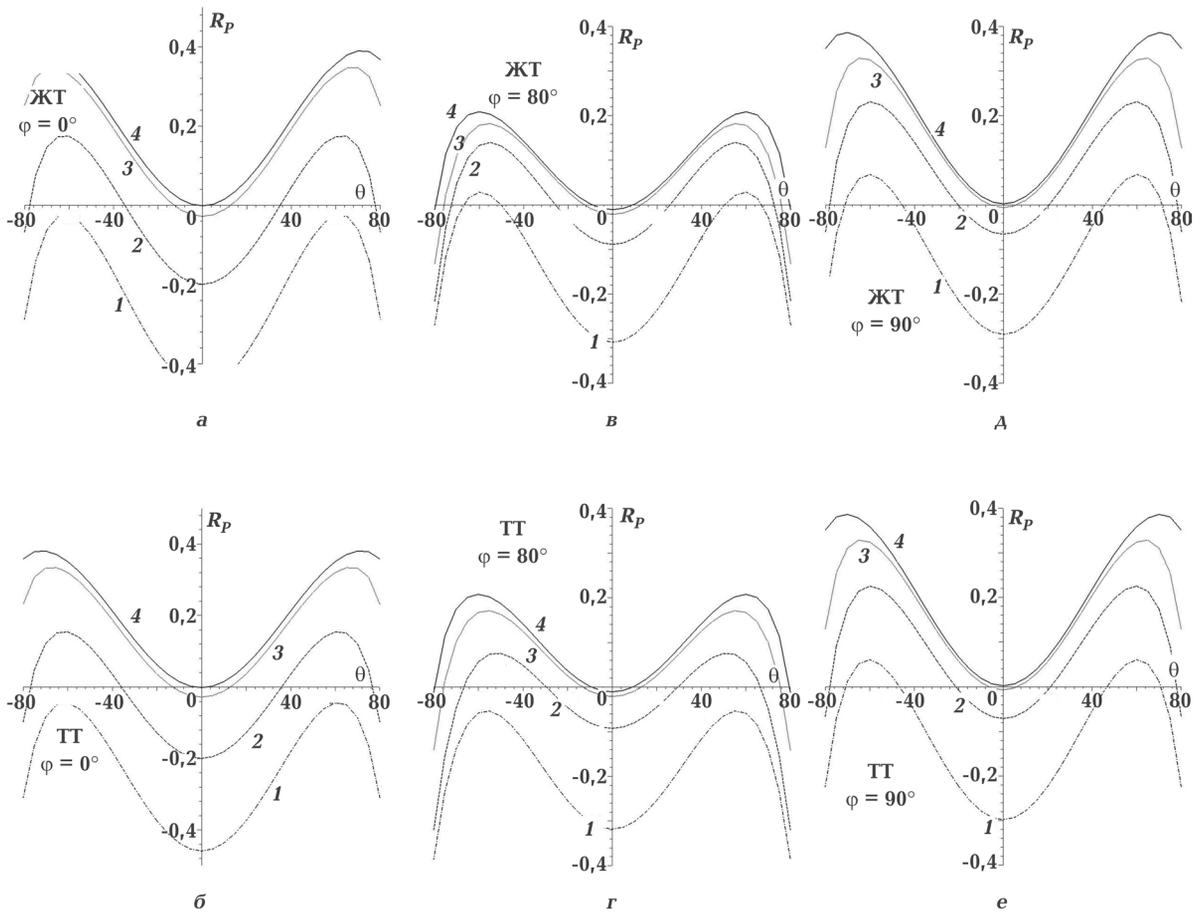


Рис. 6. Коэффициенты отражения  $R_p(\theta)$ : 1 —  $\epsilon_2=0,5$ ; 2 —  $\epsilon_2=0,1$ ; 3 —  $\epsilon_2=0,01$ ; 4 —  $\epsilon_2=0,001$ .

Коэффициенты отражения  $R_p(\theta)$  и преломления  $T_1(\theta)$  являются почти четными функциями при любых углах наклона слоев нижнего полупространства, причем  $R_p(\theta)=0$  и  $T_1(\theta)=1$  при  $\theta=-\varphi$  и  $\theta=90^\circ-\varphi$ .

Функция  $R_s(\theta)$  является нечетной при  $\varphi=0$  и  $\varphi=90^\circ$ .

Вторая преломленная волна существует только при  $\varphi \neq 0$ . Если  $\epsilon_2 \rightarrow 0$  и  $\varphi \neq 90^\circ$ , то  $T_2(\theta)=0$  при  $\theta=-\varphi$  и  $\theta=90^\circ-\varphi$  (рис. 9). Если  $\epsilon_2 \rightarrow 0$  и  $\varphi=90^\circ$ , то  $T_2(\theta)=0$  при любом значении  $\theta$ .

Третья преломленная волна существует только для среды ТТ при  $\varphi \neq 0$  и  $\varphi \neq 90^\circ$ , причем  $T_3(\theta)=0$  при  $\epsilon_2 \rightarrow 0$  (рис. 10).

**Выводы.** В статье разработана низкочастотная эффективная модель для среды с периодически повторяющимися наклонными жидкими и твердыми слоями с проскальзыванием. Показано, что для периодической  $n$ -слойной среды с твердыми наклонными слоями с проскальзыванием существуют  $n+1$  плоских волн с фиксированной горизонтальной медленностью, которые распространяются вниз.

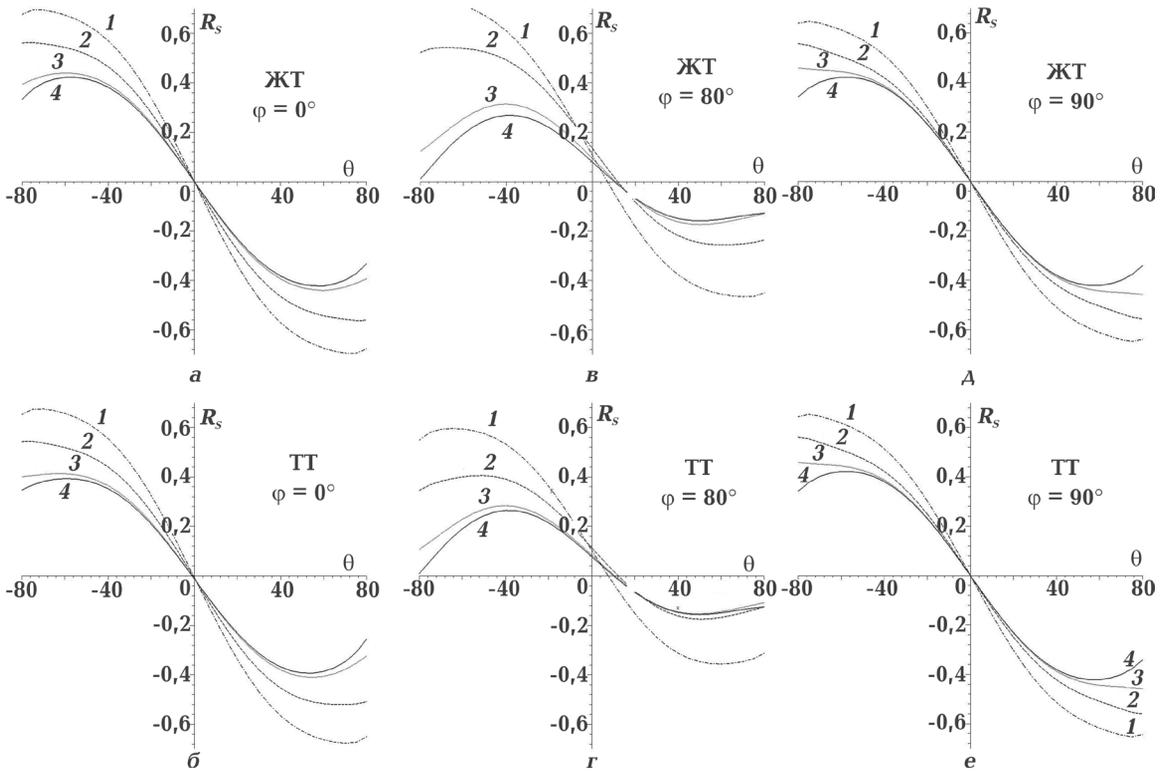


Рис. 7. Коэффициенты отражения  $R_s(\theta)$ . Условные обозначения см. на рис. 6.

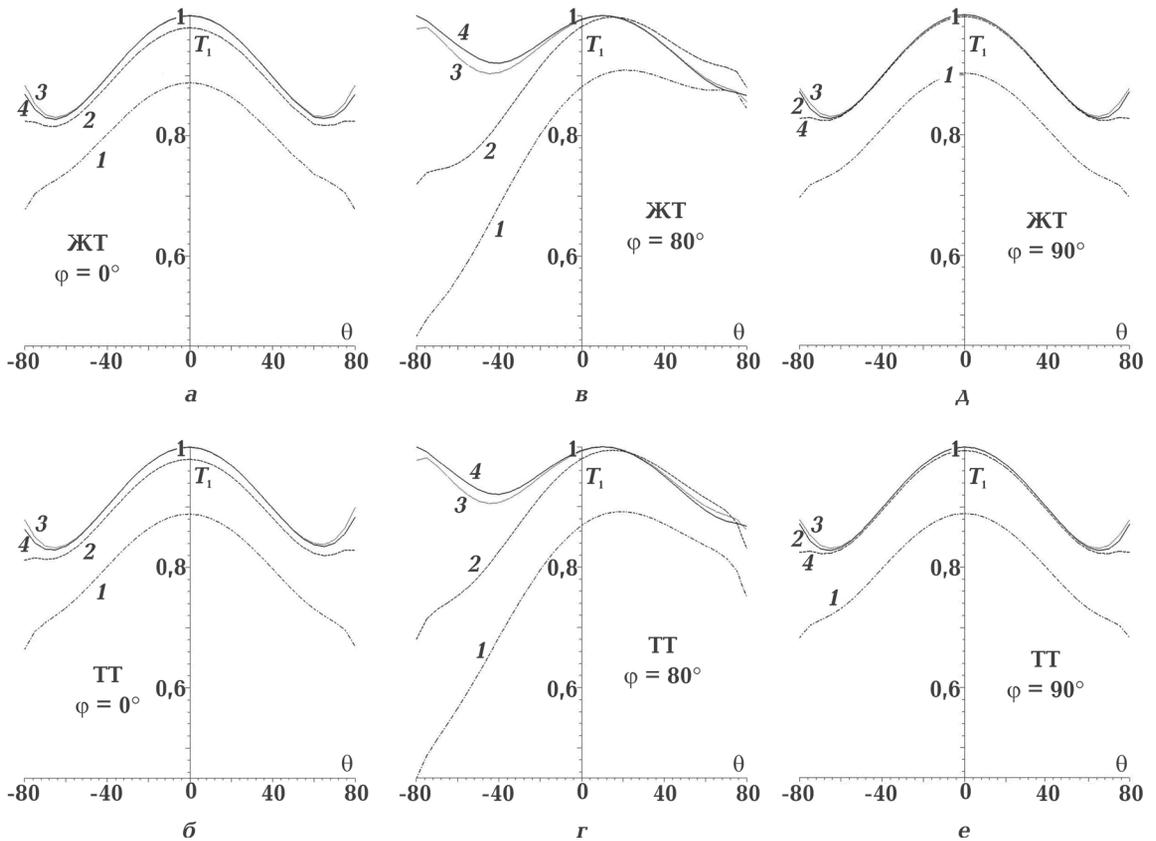


Рис. 8. Коэффициенты преломления  $T_l(\theta)$ . Условные обозначения см. на рис. 6.

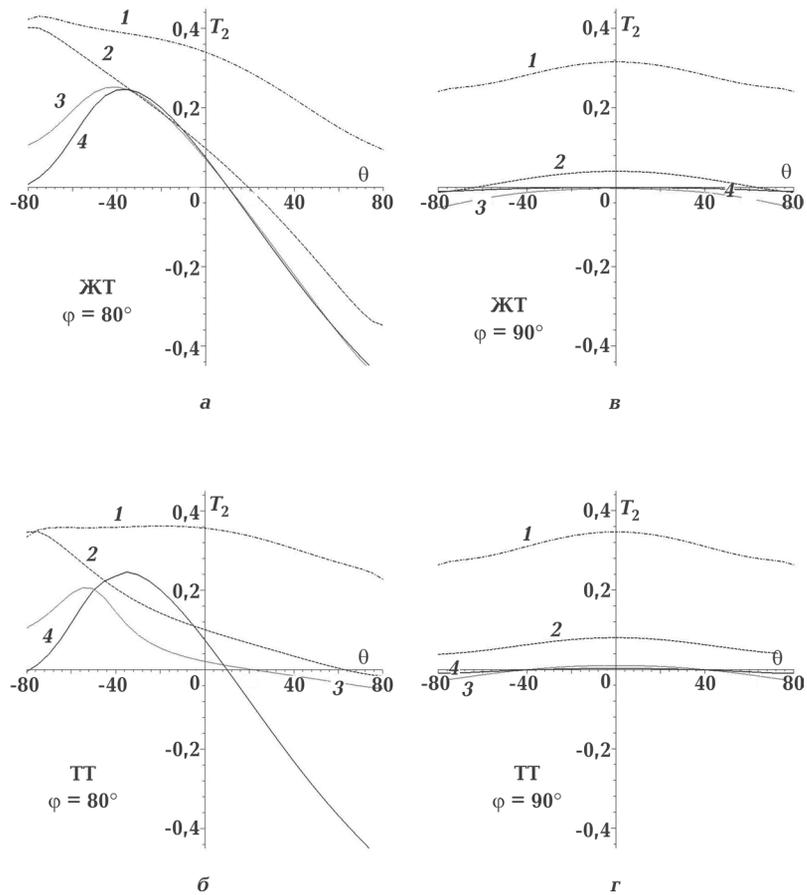


Рис. 9. Коэффициенты преломления  $T_2(\theta)$ . Условные обозначения см. на рис. 6.

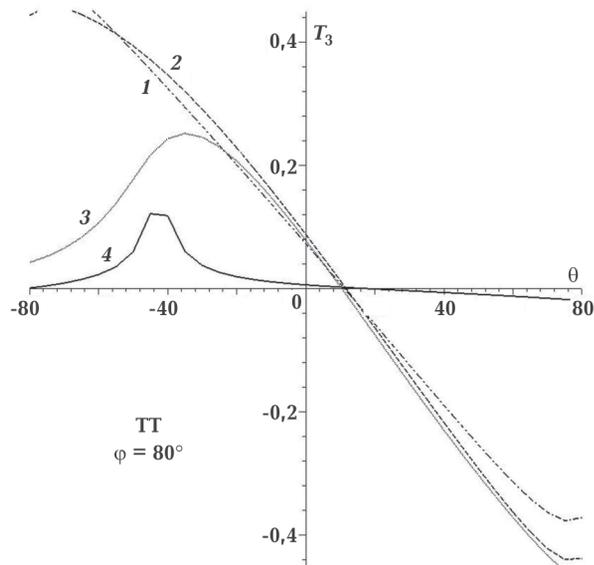


Рис. 10. Коэффициенты преломления  $T_3(\theta)$ . Условные обозначения см. на рис. 6.

Определены краевые условия при низкочастотном рассеянии на границе между твердым полупространством и полупространством, заполненным эффективной средой. Эти условия зависят от угла наклона слоев периодической среды и их заполнения.

На основании краевых условий выведены линейные системы уравнений для коэффициентов отражения и преломления. Получены явные формулы корней этой системы уравнений для случая, когда слои горизонтальны.

Практическое применение разработанной теории состоит в возможности использования полученных формул для расчета амплитуд отраженных и преломленных волн от зон трещиноватости и повышения точности инверсии сейсмических данных в физические параметры трещиноватой среды.

Теория продемонстрирована на различных примерах расчета коэффициентов отражения и преломления.

Авторы выражают благодарность кандидату технических наук Н. Я. Мармалевскому за полезные советы и замечания в процессе написания статьи.

## Приложение

*Утверждение 1.* Пусть  $\mathbf{R} = \text{diag}(r_1, \dots, r_n)$ ,  $\mathbf{v}_1 = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (y_1, \dots, y_n)$ , причем  $r_i \neq r_j$  для всех  $i \neq j$ ,  $r_i, x_i, y_i > 0$ .

Тогда собственное значение  $t$  матрицы  $\mathbf{A} = \mathbf{R} + \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{x_1 y_1}{t - r_1} + \dots + \frac{x_n y_n}{t - r_n} - 1 = 0, \quad (42)$$

а соответствующий собственный вектор определяется по формуле

$$\mathbf{w} = \left( \frac{x_1}{t - r_1}, \dots, \frac{x_n}{t - r_n} \right)^T. \quad (43)$$

*Доказательство.* Допустим, что  $t$  удовлетворяет соотношению (42), которое представим в виде  $\mathbf{v}_2 \mathbf{w} = 1$  и выполним алгебраические преобразования:

$$\mathbf{A} \mathbf{w} = (\mathbf{R} + \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2) \mathbf{w} = \mathbf{R} \mathbf{w} + \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2 \mathbf{w} = \mathbf{R} \mathbf{w} + \mathbf{v}_1^T = t \mathbf{w}. \quad (44)$$

Соотношение (44) означает, что  $\mathbf{w}$  — собственный вектор с собственным значением  $t$ . Нетрудно показать и обратное, если верно соотношение (44), то нормированный условием  $\mathbf{v}_2 \mathbf{w} = 1$  вектор  $\mathbf{w}$  удовлетворяет формуле (43).

Докажем также, что

$$\det(\mathbf{A}) = r_1 \dots r_n \left( 1 + \frac{x_1 y_1}{r_1} + \dots + \frac{x_n y_n}{r_n} \right). \quad (45)$$

Для этого рассмотрим треугольные матрицы  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{Q}$ , ненулевые элементы которых определены соотношениями  $\mathbf{P}_{ii} = \mathbf{Q}_{ii} = 1$ ,  $\mathbf{P}_{jn} = -\frac{x_j}{x_n}$ ,  $\mathbf{Q}_{jn} = \frac{x_j r_n}{r_j x_n}$ , где  $i=1, \dots, n$  и  $j=1, \dots, n-1$ .

Вычисления показывают, что матрица  $\mathbf{B} = \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{Q}$  является треугольной с ненулевыми элементами  $\mathbf{B}_{jj} = r_j$ ,  $\mathbf{B}_{nj} = -x_n y_j$ ,  $\mathbf{B}_{nn} = r_n \left( 1 + \frac{x_1 y_1}{r_1} + \dots + \frac{x_n y_n}{r_n} \right)$ ,  $j=1, \dots, n-1$ . Следовательно,

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B}) = r_1 \dots r_n \left( 1 + \frac{x_1 y_1}{r_1} + \dots + \frac{x_n y_n}{r_n} \right).$$

Из критерия Сильвестра и соотношения (45) следует, что матрица  $\mathbf{A}$  является положительно определенной, если  $r_i, x_i, y_i > 0$  при  $i=1, \dots, n$ , и неотрицательно определенной при  $r_i, x_i, y_i \geq 0$ .

Утверждение 2. Для  $n$ -слойной периодической среды с проскальзыванием, углами наклона слоев  $\varphi \neq 0$ ,  $\varphi \neq 90^\circ$  и значениями скоростей поперечных волн  $\beta_i > 0$ ,  $i=1, \dots, n$ , справедливы соотношения

$$\lim_{\beta_n \rightarrow 0} (u_{1n+1}^{(i)} \cos \varphi + u_{3n+1}^{(i)} \sin \varphi) = 0, \quad i=1, \dots, n-1, \quad (46)$$

$$\lim_{\beta_n \rightarrow 0} (\varepsilon_1 u_{3n+1}^{(1)} + \dots + \varepsilon_n u_{3n+1}^{(n)}) = 0, \quad (47)$$

$$\lim_{\beta_n \rightarrow 0} (\varepsilon_1 \tau_{13n+1}^{(1)} + \dots + \varepsilon_n \tau_{13n+1}^{(n)}) = 0, \quad (48)$$

$$\lim_{\beta_n \rightarrow 0} (\varepsilon_1 \tau_{33n+1}^{(1)} + \dots + \varepsilon_n \tau_{33n+1}^{(n)}) = 0, \quad (49)$$

$$\lim_{\beta_n \rightarrow 0} \left( \frac{W_{3n+1}}{q_{n+1}} \right) = \frac{\cos \varphi}{\rho} \left( 1 + \frac{\rho_n}{\varepsilon_n \rho \operatorname{tg}^2 \varphi} \right), \quad (50)$$

$$\lim_{\beta_n \rightarrow 0} T_{n+1} = 0. \quad (51)$$

Доказательство. Дисперсионное уравнение (6) при выполнении соотношения (26) и условий утверждения 2 имеет  $n+1$  корень  $q_{0j}$ ,  $j=1, \dots, n+1$ . Если  $\beta_n \rightarrow 0$ , то  $b_n \rightarrow 0$ ,  $v_n \rightarrow 0$  и корни  $q_{0j}$ ,  $j=1, \dots, n$  этого уравнения стремятся к корням уравнения (6) при  $\beta_n=0$ ,  $b_n=1$ , а  $q_{0n+1} \rightarrow \infty$ .

Поскольку  $p_0 = \text{const}$ , из соотношения (26) следует, что  $p_{n+1}, q_{n+1} \rightarrow \infty$  и

$$\lim_{\beta_n \rightarrow 0} (p_{n+1}/q_{n+1}) = \operatorname{tg} \varphi. \quad (52)$$

Из (27) следует (46), поскольку  $\lim_{\beta_n \rightarrow 0} (u_{1n+1}^{(i)} \cos \varphi + u_{3n+1}^{(i)} \sin \varphi) = \lim_{p_{n+1} \rightarrow \infty} \frac{b_i p_{n+1}}{\rho_i (1 - v_i^2 p_{n+1}^2)} = 0$ .

Подставим в равенство (6)  $p_{n+1}, q_{n+1}$  и разделим его на  $q_{n+1}^2$ . С учетом (52) получим

$$\lim_{\beta_n \rightarrow 0} (1 - v_n^2 p_{n+1}^2) = -\frac{\varepsilon_n \rho \operatorname{tg}^2 \varphi}{\rho_n}. \quad (53)$$

Следовательно,  $\lim_{\beta_n \rightarrow 0} f_{in+1} = 0$  при  $i=1, \dots, n-1$  и

$$\lim_{\beta_n \rightarrow 0} f_{nn+1} = -\frac{\rho_n}{\varepsilon_n \rho \operatorname{tg}^2 \varphi}. \quad (54)$$

Соотношение (47) непосредственно следует из соотношений (27), (52), (54) и пределов  $\lim_{\beta_n \rightarrow 0} \left( \frac{\varepsilon_1 p_{n+1} f_{1n+1} \sin \varphi}{\rho_1} + \dots + \frac{\varepsilon_{n-1} p_{n+1} f_{n-1n+1} \sin \varphi}{\rho_{n-1}} \right) = 0$  и  $\lim_{\beta_n \rightarrow 0} \left( \frac{\varepsilon_n p_{n+1} f_{nn+1} \sin \varphi}{\rho_n} + \frac{q_{n+1} \cos \varphi}{\rho} \right) = 0$ .

Аналогично доказываются равенства (48)–(50) с использованием соотношений (27), (28), (29), (53) с предельным переходом при  $\beta_n \rightarrow 0$ . Равенства (48), (49) справедливы только после нормировки левых частей делением на  $k_{Tn+1} = \sqrt{|W_{3n+1}|}$ . Для оценки  $W_{3n+1}$  воспользуемся равенствами (29), (52), (54) и получим соотношение (50).

Наконец, рассмотрим поведение корня  $x_{n+3}$  системы (40) при  $\beta_n \rightarrow 0$ . Значение этого корня можно найти по правилу Крамера как отношение определителей  $x_{n+3} = \Delta_{n+3}/\Delta$ . Нетрудно видеть, что определитель  $\Delta_{n+3}$  не зависит от  $\beta_n$ , а определитель системы  $\Delta \sim q_{n+1}$ . Следовательно,  $x_{n+3} \sim 1/q_{n+1}$ . Согласно (50), нормировочный коэффициент  $k_{Tn+1} \sim \sqrt{q_{n+1}}$ . Таким образом,  $T_{n+1} = k_{Tn+1} k_p^{-1} x_{n+3} \sim 1/\sqrt{q_{n+1}}$  и выполняется равенство (50), поскольку  $q_{n+1} \rightarrow \infty$ .

*Утверждение 3.* При низкочастотном рассеянии на полупространстве, заполненном  $n$ -слоистой периодической средой с твердыми слоями с проскальзыванием, справедливо равенство

$$R_p^2 + R_s^2 + \sum T_i^2 = 1. \quad (55)$$

*Доказательство.* Докажем утверждение 3 в предположении, что  $\varphi \neq 0$ ,  $\varphi \neq 90^\circ$  и  $\beta_i > 0$ . В этом случае справедлива система уравнений (40) и в нижнем полупространстве распространяются  $n+1$  преломленных волн. Остальные случаи выводятся переходом к предельным значениям параметров.

Линейная система уравнений (40) включает  $n+3$  уравнения для  $n+3$  неизвестных  $x_p, x_s, x_{Tj}, j=1, \dots, n+1$ .

Из системы уравнений (40)  $2 \div (n+1)$  для  $i=1, \dots, n$

$$E_{23}x_p + E_{24}x_s + \sum_{j=1}^{n+1} u_{3j}^{(i)} x_{Tj} = E_{21} \quad (56)$$

следует, что  $\sum_{j=1}^{n+1} u_{3j}^{(i)} x_{Tj}$  не зависит от слоя  $i$ . Так как  $u_{3j}^{(i)}$  удовлетворяет (27), то  $\sum_{j=1}^{n+1} p_j f_{ij} \rho_i^{-1} x_{Tj}$  также не зависит от  $i$ . Поскольку  $u_{1j}^{(i)} = p_j f_{ij} \rho_i^{-1} \cos \varphi - q_j \rho_i^{-1} \sin \varphi$ , то справедливы  $n$  уравнений  $i=1, \dots, n$ :

$$E_{13}x_p + E_{14}x_s + \sum_{j=1}^{n+1} u_{1j}^{(i)} x_{Tj} = E_{11}, \quad (57)$$

поскольку выполняются соотношения (56) и (57) при  $i=1$ , входящие в систему (40). Включение всех  $2n$  уравнений (56) и (57) приводит к эквивалентной, но переопределенной системе уравнений.

Определим значения  $\chi_{13}^{(i)}, \chi_{33}^{(i)}$  из  $2n$  соотношений  $i=1, \dots, n$ :

$$E_{33}x_p + E_{34}x_s + \sum_{j=1}^{n+1} \tau_{13j}^{(i)} x_{Tj} = \chi_{13}^{(i)}, \quad (58)$$

$$E_{43}x_p + E_{44}x_s + \sum_{j=1}^{n+1} \tau_{33j}^{(i)} x_{Tj} = \chi_{33}^{(i)}. \quad (59)$$

Поскольку система уравнений (40) включает уравнения

$$E_{33}x_p + E_{34}x_s + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n+1} \varepsilon_i \tau_{13j}^{(i)} x_{Tj} = E_{31}, \quad (60)$$

$$E_{43}x_p + E_{44}x_s + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n+1} \varepsilon_i \tau_{33j}^{(i)} x_{Tj} = E_{41}, \quad (61)$$

то справедливы равенства

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \chi_{13}^{(i)} = E_{31} \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \chi_{33}^{(i)} = E_{41}. \quad (62)$$

Итак, систему уравнений (40) можно заменить на эквивалентную ей систему  $4n$ -уравнений (56)—(59) при выполнении соотношений (62). Систему уравнений (56)—(59) представим в векторном виде:

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{Tj} \mathbf{F}_{Tj} = \mathbf{E}_1 - x_p \mathbf{E}_3 - x_s \mathbf{E}_4, \quad (63)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \left( E_{11}^{(i)}, E_{21}^{(i)}, \varepsilon_i \chi_{13}^{(i)}, \varepsilon_i \chi_{33}^{(i)} \right)^T, \quad \mathbf{E}_3 = \left( E_{13}^{(i)}, E_{23}^{(i)}, \varepsilon_i E_{33}^{(i)}, \varepsilon_i E_{43}^{(i)} \right)^T, \\ \mathbf{E}_4 &= \left( E_{14}^{(i)}, E_{24}^{(i)}, \varepsilon_i E_{34}^{(i)}, \varepsilon_i E_{44}^{(i)} \right)^T, \quad \mathbf{F}_j = \left( u_{1j}^{(i)}, u_{3j}^{(i)}, \varepsilon_i \tau_{13j}^{(i)}, \varepsilon_i \tau_{33j}^{(i)} \right)^T \end{aligned} \quad (64)$$

являются векторами размерности  $4n$  с использованием обозначений  $a^{(i)} = (a^{(1)}, \dots, a^{(n)})$  и  $E_{mn}^{(i)} = E_{mn}$ .

Выполняя перестановки компонент, введем дуальные вектор-строки по формулам

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}_1 &= \left( \varepsilon_i \chi_{13}^{(i)}, \varepsilon_i \chi_{33}^{(i)}, E_{11}^{(i)}, E_{21}^{(i)} \right), \quad \tilde{\mathbf{E}}_3 = \left( \varepsilon_i E_{33}^{(i)}, \varepsilon_i E_{43}^{(i)}, E_{13}^{(i)}, E_{23}^{(i)} \right), \\ \tilde{\mathbf{E}}_4 &= \left( \varepsilon_i E_{34}^{(i)}, \varepsilon_i E_{44}^{(i)}, E_{14}^{(i)}, E_{24}^{(i)} \right), \quad \tilde{\mathbf{F}}_j = \left( \varepsilon_i \tau_{13j}^{(i)}, \varepsilon_i \tau_{33j}^{(i)}, u_{1j}^{(i)}, u_{3j}^{(i)} \right). \end{aligned} \quad (65)$$

Из определения нормировочных коэффициентов  $k_0, k_p, k_s, k_{Tj}$  следует

$$\tilde{\mathbf{E}}_1 \mathbf{E}_1 = 2k_0^2, \quad \tilde{\mathbf{E}}_p \mathbf{E}_p = -2k_p^2, \quad \tilde{\mathbf{E}}_s \mathbf{E}_s = -2k_s^2, \quad \tilde{\mathbf{F}}_{Tj} \mathbf{F}_{Tj} = 2k_{Tj}^2, \quad j = 1, \dots, n+1. \quad (66)$$

Воспользовавшись формулой (30), нетрудно показать, что  $\tilde{\mathbf{E}}_m \mathbf{E}_n = 0$  при  $m \neq n$ . Докажем, что  $\tilde{\mathbf{F}}_{Tm} \mathbf{F}_{Tn} = 0$  при  $m \neq n$ . Действительно, из определения компонент этих векторов и соотношений (27), (28) следует

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}_{Tm} \mathbf{F}_{Tn} &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \left( \tau_{13m}^{(i)} u_{1n}^{(i)} + \tau_{13n}^{(i)} u_{1m}^{(i)} + \tau_{33m}^{(i)} u_{3n}^{(i)} + \tau_{33n}^{(i)} u_{3m}^{(i)} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i f_{im} f_{in} (p_m + p_n) \sin \varphi}{\rho_i} + \frac{(q_m + q_n) \cos \varphi}{\rho}. \end{aligned} \quad (67)$$

Вычитая формулы (26) для пар  $(p_m, q_m)$  и  $(p_n, q_n)$ , получаем равенство  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{p_m - p_n}{q_m - q_n}$ . Следовательно,  $\tilde{\mathbf{F}}_{Tm} \mathbf{F}_{Tn} = \left( \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i f_{im} f_{in} (p_m^2 - p_n^2)}{\rho_i} + \frac{(q_m^2 - q_n^2)}{\rho} \right) \cos \varphi = 0$ . Последнее равенство нулю доказывается вычитанием соотношений (22), справедливых для пар  $(p_m, q_m)$  и  $(p_n, q_n)$ .

Наконец, преобразуем равенство (63) к виду  $\sum_{j=1}^{n+1} x_{Tj} \tilde{\mathbf{F}}_{Tj} = \tilde{\mathbf{E}}_1 - x_p \tilde{\mathbf{E}}_3 - x_s \tilde{\mathbf{E}}_4$  и перемножим их. Из взаимной ортогональности и нормировки векторов, доказанной выше, следует соотношение (55).

### Список литературы

- Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология. Теория и методы. Москва: Мир, 1983. 520 с.
- Молотков Л. А. Исследование распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред. Санкт-Петербург: Наука, 2001. 348 с.
- Молотков Л. А. Об эквивалентности слоисто-периодических и трансверсально-изотропных сред. *Зап. научн. сем. ЛОМИ*. 1979. Т. 89. С. 219—233.
- Молотков Л. А. Об эффективной модели, описывающей слоистую периодическую упругую среду с контактами проскальзывания на границах. *Зап. научн. сем. ЛОМИ*. 1994. Т. 210. С. 192—212.
- Молотков Л. А. О новом способе вывода уравнений осредненной эффективной модели периодических сред. *Зап. научн. сем. ЛОМИ*. 1991. Т. 195. С. 82—102.

- Молотков Л. А., Бакулин А. В. Эффективная модель слоистой упруго-жидкой среды как частный случай модели Био. *Зап. научн. сем. ПОМИ*. 1995. Т. 230. С. 172—195.
- Молотков Л. А., Хило А. Е. Исследование однофазных и многофазных эффективных моделей, описывающих периодические среды. *Зап. научн. сем. ЛОМИ*. 1984. Т. 140. С. 105—122.
- Молотков Л. А., Перекарева М. Н. Исследование волнового поля в эффективной модели, описывающей упруго-жидкую слоистую среду. *Зап. научн. сем. ПОМИ*. 2006. Т. 332. С. 175—192.
- Роганов Ю. В., Роганов В. Ю. Распространение волн в периодических жидкотвердых слоистых средах. *Геофиз. журн.* 2016. Т. 38. № 6. С. 101—117.
- Backus G. E., 1962. Long-wave elastic anisotropy produced by horizontal layering. *J. Geophys. Res.* 67, 4427—4440. doi: 10.1029/JZ067i011p04427.
- Corredor R., Santos J., Gauzellino P., Carcione J., 2016. Validation of the boundary conditions to model the seismic response of fractures. *Geophys. Prosp.* 64, 1149—1165. doi:10.1111/1365-2478.12375.
- Deresiewicz H., Rice J. T., 1960. The effect of boundaries on wave propagation in liquid-filled porous solids: I. Reflection of plane waves at a true plane boundary. *Bull. Seismol. Soc. Am.* 50, 599—607.
- Lovera O. M., 1987. Boundary conditions for a fluid-saturated porous solid. *Geophysics*, 52 (2), 174—178.
- Molotkov L. A., 1982. Equivalence of periodically layered and transversally isotropic media. *J. Soviet Math.* 19(4), 1454—1466. doi: 10.1007/BF01085033.
- Molotkov L. A., 1992. New method for deriving equations of an effective average model of periodic media. *J. Soviet Math.*, 62(6), 3103—3107. doi: 10.1007/BF01095684.
- Molotkov L. A., 1997. On an effective model describing a layered periodic elastic medium with slide contacts on the interfaces. *J. Math. Sci.* 83(2), 288—301. doi: 10.1007/BF02405824.
- Molotkov L. A., Bakulin A. V., 1998. The effective model of a stratified solid-fluid medium as a special case of the Biot model. *J. Soviet Math.* 91(2), 2812—2827. doi: 10.1007/BF02433997.
- Molotkov L. A., Khilo A. E., 1986. Single-phase and multiphase effective models describing periodic media. *J. Soviet Math.*, 32 (2), 173—185. doi: 10.1007/BF0108415.
- Molotkov L. A., Perekareva M. N., 2007. Investigation of the wave field in an effective model of a layered elastic-fluid medium. *J. Math. Sci.* 142(6), 2620—2629. doi:10.1007/s10958-007-0150-1.
- Nakagawa S., Schoenberg M., 2007. Poroelastic modeling of seismic boundary conditions across a fracture. *J. Acoust. Soc. Am.* 122(2), 831—847. doi: 10.1121/1.2747206.
- Rajesh S., 2015. Reflection/refraction at the interface of an elastic solid and a partially saturated porous solid containing liquid filled bound pores and a connected pore space saturated by two-phase fluid. *Lat. Am. J. Solids Struct.* 12(10), 1870—1900. doi: 10.1590/1679-78251834.
- Roganov Yu., Stovas A., 2012. Low-frequency wave propagation in periodically layered media. *Geophys. Prosp.* 60, 825—837. doi: 10.1111/j.1365-2478.3011.01028.x.
- Schoenberg M., 1983. Reflection of elastic waves from periodically stratified media with interfacial slip. *Geophys. Prosp.* 31, 265—292. doi: 10.1111/j.1365-2478.1983.tb01054.x.
- Schoenberg M., 1984. Wave propagation in alternating solid and fluid layers. *Wave Motion* 6, 303—320. doi: 10.1016/0165-2125(84)90033-7.
- Schoenberg M., Muir F., 1989. A calculus for finely layered anisotropic media. *Geophysics* 54(5), 581—589. doi: 10.1190/1.1442685.

# Low-frequency scattering on a half-space filled with periodic fluid-solid medium with dipped layers

© Yu. V. Roganov<sup>1</sup>, V. Yu. Roganov<sup>2</sup>, 2017

<sup>1</sup>Tesseral Technologies Inc., Kiev, Ukraine

<sup>2</sup>Institute of Cybernetic of NAS of Ukraine, Kiev, Ukraine

A low-frequency effective model has been developed for a medium with periodical liquid and solid layers with the slip between layers. It is shown that for an effective periodically  $n$ -layered medium with solid dipped layers with slip there exist  $n+1$  plane waves with a fixed horizontal slowness that propagate downward. The boundary conditions are determined for low-frequency scattering at the boundary between a solid half-space and a half-space filled with an effective medium. These conditions depend on the dip angle of the layers and their filling. Based on the boundary conditions, linear systems of equations for the reflection and refraction coefficients are derived. Low-frequency scattering on a half-space with dipped solid layers with the slip is described by a system of  $n+3$  equations with  $n+3$  unknowns. In the presence of liquid layer, the number of equations and unknowns is equal to  $n+2$ . If the lower half-space consists of horizontal layers, the number of equations and unknowns is equal to 3. Explicit formulas for the roots of this system of equations are obtained for the case when the layers are horizontal. The theory is demonstrated on various examples of calculating the reflection and refraction coefficients.

**Key words:** periodical solid-fluid medium, dispersion equation, scattering, reflection and refraction coefficients.

## References

- Aki K., Richards P., 1983. Quantitative seismology. Theory and methods. Moscow: Mir, 520 p. (in Russian).
- Molotkov L. A., 2001. The study of wave propagation in porous and fractured media based on effective models of BIO and layered media. St. Petersburg: Nauka, 348 p. (in Russian).
- Molotkov L. A., 1979. Equivalence of periodically layered and transversally isotropic media. *Zapiski nauchnykh seminarov LOMI* 89, 219—233 (in Russian).
- Molotkov L. A., 1994. On an effective model describing a layered periodic elastic medium with slide contacts on the interfaces. *Zapiski nauchnykh seminarov POMI* 210, 192—212 (in Russian).
- Molotkov L. A., 1991. New method for deriving equations of an effective average model of periodic media. *Zapiski nauchnykh seminarov LOMI* 195, 82—102 (in Russian).
- Molotkov L. A., Bakulin A. V., 1995. The effective model of a stratified solid-fluid medium as a special case of the Biot model. *Zapiski nauchnykh seminarov POMI* 230, 172—195 (in Russian).
- Molotkov L. A., Khilo A. E., 1984. Single-phase and multiphase effective models describing periodic media. *Zapiski nauchnykh seminarov LOMI* 140, 105—122 (in Russian).
- Molotkov L. A., Perekareva M. N., 2006. Investigation of the wave field in an effective model of a layered elastic-fluid medium. *Zapiski nauchnykh seminarov POMI* 332, 175—192 (in Russian).
- Roganov Yu. V., Roganov V. Yu., 2016. Wave propagation in periodic fluid-solid layered media. *Geofizicheskiy zhurnal* 38 (6), 101—117 (in Russian).
- Backus G. E., 1962. Long-wave elastic anisotropy produced by horizontal layering. *J. Geophys. Res.* 67, 4427—4440. doi: 10.1029/JZ067i011p04427.
- Corredor R., Santos J., Gauzellino P., Carcione J., 2016. Validation of the boundary conditions to model the seismic

- response of fractures. *Geophys. Prosp.* 64, 1149—1165. doi:10.1111/1365-2478.12375.
- Deresiewicz H., Rice J. T., 1960. The effect of boundaries on wave propagation in liquid-filled porous solids: I. Reflection of plane waves at a true plane boundary. *Bull. Seismol. Soc. Am.* 50, 599—607.
- Lovera O. M., 1987. Boundary conditions for a fluid-saturated porous solid. *Geophysics*, 52 (2), 174—178.
- Molotkov L. A., 1982. Equivalence of periodically layered and transversally isotropic media. *J. Soviet Math.* 19(4), 1454—1466. doi: 10.1007/BF01085033.
- Molotkov L. A., 1992. New method for deriving equations of an effective average model of periodic media. *J. Soviet Math.*, 62(6), 3103—3107. doi: 10.1007/BF01095684.
- Molotkov L. A., 1997. On an effective model describing a layered periodic elastic medium with slide contacts on the interfaces. *J. Math. Sci.* 83(2), 288—301. doi: 10.1007/BF02405824.
- Molotkov L. A., Bakulin A. V., 1998. The effective model of a stratified solid-fluid medium as a special case of the Biot model. *J. Soviet Math.* 91(2), 2812—2827. doi: 10.1007/BF02433997.
- Molotkov L. A., Khilo A. E., 1986. Single-phase and multiphase effective models describing periodic media. *J. Soviet Math.*, 32 (2), 173—185. doi: 10.1007/BF0108415.
- Molotkov L. A., Perekareva M. N., 2007. Investigation of the wave field in an effective model of a layered elastic-fluid medium. *J. Math. Sci.* 142(6), 2620—2629. doi:10.1007/s10958-007-0150-1.
- Nakagawa S., Schoenberg M., 2007. Poroelastic modeling of seismic boundary conditions across a fracture. *J. Acoust. Soc. Am.* 122(2), 831—847. doi: 10.1121/1.2747206.
- Rajesh S., 2015. Reflection/refraction at the interface of an elastic solid and a partially saturated porous solid containing liquid filled bound pores and a connected pore space saturated by two-phase fluid. *Lat. Am. J. Solids Struct.* 12(10), 1870—1900. doi: 10.1590/1679-78251834.
- Roganov Yu., Stovas A., 2012. Low-frequency wave propagation in periodically layered media. *Geophys. Prosp.* 60, 825—837.
- Schoenberg M., 1983. Reflection of elastic waves from periodically stratified media with interfacial slip. *Geophys. Prosp.* 31, 265—292. doi: 10.1111/j.1365-2478.1983.tb01054.x.
- Schoenberg M., 1984. Wave propagation in alternating solid and fluid layers. *Wave Motion* 6, 303—320. doi: 10.1016/0165-2125(84)90033-7.
- Schoenberg M., Muir F., 1989. A calculus for finely layered anisotropic media. *Geophysics* 54(5), 581—589. doi: 10.1190/1.1442685.